Метод построения периодического решения линейных дифференциальных уравнений

Ж. Сулейменов
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
e-mail: 2261032@mail.ru

Аннотация

В работе излагается метод построения периодического решения линейных дифференциальных уравнений с помощью функций Коши, Грина и граничных функций.

Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение высшего порядка

$$\overset{(n)}{x} + p_1(t)\overset{(n-1)}{x} + ... + p_n(t)x = q(t), \quad n \geq 2, \tag{1}$$

где $p_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, $q(t)$ – непрерывные на R ω-периодические функции, $\omega > 0$. Соответствующее линейное неоднородное уравнение запишется в виде:

$$\overset{(n)}{y} + p_1(t)\overset{(n-1)}{y} + ... + p_n(t)y = 0. \tag{2}$$

Если разрешить (1) и (2) относительно старшей производной, то правые части полученных уравнений будут ω-периодическими по переменной t.

Ищем решение уравнения на отрезке $[0;\ \omega]$, длиной равной одному периоду. Поставим для уравнения (1) периодические краевые условия:

$$H_j x := \overset{(j-1)}{x}(0) - \overset{(j-1)}{x}(\omega). \tag{3}$$

Пусть $y_1(t), y_2(t), ..., y_n(t)$ – фундаментальная система решений уравнения (2). Предположим, что

$$\Delta(0;\ w) = \begin{vmatrix} H_1y_1 & H_1y_2 & ... & H_1y_n \\ H_2y_1 & H_2y_2 & ... & H_2y_n \\ ...... & ...... & ... & ...... \\ H_ny_1 & H_ny_2 & ... & H_ny_n \end{vmatrix} \neq 0. \tag{4}$$

Тогда однородная краевая задача (2), (3) имеет лишь нулевое решение, т.е. однородное уравнение (2) не имеет нетривиального ω-периодического решения.

Определение 1. Функцию $K(t, s)$ от двух переменных называют функцией Коши [1], если она как функция от t является решением уравнения (2) с начальными условиями при $t = s$:

$$K(s, s) = \dot{K}(s, s) = ... = \overset{(n-2)}{K}(s, s) = 0, \quad \overset{(n-1)}{K}(s, s) = 1. \tag{5}$$

При непрерывности $p_j(t)$ и $q(t)$ функция Коши существует, единственна и выражается формулой [2]:

$$K(t,s)=\frac{W(t,s)}{W(s)},$$

где $W(t)\neq 0$, $\forall t\in[0;\ w]$ – вронскиан фундаментальной системы решений уравнения (2), а $W(t,s)$ – определитель, получаемый из вронскиана $W(s)$ с помощью замены n-ой строки на фундаментальную систему решений:

$$W(t,s)=\begin{vmatrix} y_1(s) & y_2(s) & ... & y_n(s)\\ ...... & ...... & ... & ......\\ \overset{(n-2)}{y}_1(s) & \overset{(n-2)}{y}_2(s) & ... & \overset{(n-2)}{y}_n(s)\\ y_1(t) & y_2(t) & ... & y_n(t)\end{vmatrix}.$$

Определение 2. Функции $\varphi_k(t)$ называются граничными функциями [1] краевой задачи (1), (3), если они удовлетворяют однородному уравнению (2) и краевым условиям:

$$H_j\varphi_k:=\overset{(j-1)}{\varphi_k}(0)-\overset{(j-1)}{\varphi_k}(w)=\delta_{jk}=\begin{cases}1, & j=1,\\ 0, & j\neq k.\end{cases}\qquad(6)$$

Легко доказать [2], что при выполнении условия (4) граничные функции на отрезке $[0;\omega]$ существуют, единственны и выражаются формулами:

$$\varphi_j(t)=\frac{\Delta_j(t,0;\omega)}{\Delta(0;\omega)},\quad j=\overline{1,n},$$

где $\Delta_j(t,0;\omega)$ – определитель, получаемый из определителя $\Delta(0;\omega)$ с помощью замены j-ой строки на фундаментальную систему решений уравнения (2).

Очевидно, что решения $\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t)$ также образуют фундаментальную систему решений уравнения (2). С помощью этой фундаментальной системы и функции Коши общее решение уравнения (1) записывается в виде:

$$x(t)=C_1\varphi_1(t)+C_2\varphi_2(t)+...+C_n\varphi_n(t)+\int\limits_0^t K(t,a)q(s)ds.\qquad(7)$$

Рассмотрим отдельно интегральный член в формуле (7):

$$\psi(t)=\int\limits_0^t K(t,s)q(s)ds.$$

Если учесть (5), то

$$\overset{(j)}{\psi}(t)=\int\limits_0^t \overset{(j)}{K}_t(t,s)q(s)ds,\quad j=\overline{0,n-1}.$$

Следовательно,

$$\overset{(j)}{\psi}(0) = 0, \quad \overset{(j)}{\psi}(\omega) = \int\limits_0^\omega \overset{(j)}{K}(\omega, s)q(s)ds, \quad j = \overline{0, n-1}.$$

Тогда, подставляя решение (7) в краевые условия (3) с учетом того, что граничные функции удовлетворяют условиям (6), получим

$$C_j = -H_j\psi = -\overset{(j-1)}{\psi}(0) + \overset{(j-1)}{\psi}(\omega) = \overset{(j-1)}{\psi}(\omega) = \int\limits_0^\omega \overset{(j-1)}{K}(\omega, s)q(s)ds, \quad j = \overline{1, n}.$$

Подставляя эти значения C_j, $j = \overline{1, n}$ в формулу (7), получим

$$x(t) = \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) \int\limits_0^\omega \overset{(j-1)}{K_t}(\omega, s)q(s)ds + \int\limits_0^t K(t, s)q(s)ds. \tag{8}$$

Это есть единственное решение краевой задачи.

Определение 3. Функция двух переменных $G(t, s)$ называется функцией Грина [3] краевой задачи (1), (3), если она удовлетворяет следующим условиям:

1^0) $G(t, s)$ непрерывна на отрезке $[0; \omega]$ вместе со своими производными по t до $(n-2)$-го порядка включительно, а производная по t $(n-1)$-го порядка непрерывна $[0; \omega]$ при $t \neq s$ и при $t = s$ имеет разрыв вида:

$$\overset{(n-1)}{G_t}(s+0; s) - \overset{(n-1)}{G_t}(s-0; s) = 1;$$

2^0) $G(t, s)$ удовлетворяет по t однородному уравнению (2) при $t \neq s$ и однородным краевым условиям:

$$H_j G(t, s) := \overset{(j-1)}{G_t}(0, s) - \overset{(j-1)}{G_t}(w, s) = 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Представим теперь интегралы с постоянными пределами в (8) в виде:

$$\int\limits_0^\omega \overset{(j-1)}{K}(\omega, s)q(s)ds = \int\limits_0^t \overset{(j-1)}{K}(\omega, s)q(s)ds + \int\limits_t^\omega \overset{(j-1)}{K}(\omega, s)q(s)ds_0.$$

Введем функцию

$$G(t, s) = \begin{cases} \phi_1(t) K(\omega, s) + \phi_2(t) \dot{K}_t(\omega, s) + \ldots + \phi_n(t) \overset{(n-1)}{K}_t(\omega, s), \; 0 \le t < s \le \omega; \\ \\ \phi_1(t) K(\omega, s) + \ldots + \phi_n(t) \overset{(n-1)}{K}_t(\omega, s) + K(t, s), \; 0 \le s < t \le \omega. \end{cases}$$

Она является функцией Грина, так как удовлетворяют условиям определения 3, что проверяется легко. Она единственна, с ее помощью единственное решение задачи (1), (3) записывается так [2]:

$$x(t) = \int_0^{\omega} G(t,s)q(s)ds. \tag{9}$$

Периодичность этого решения следует из следующих свойств решений уравнений (1)и (2): если какая-то функция $x(t)$ является решением уравнения (1), то функция $x(t+\omega)$, в силу ω-периодичности коэффициентов и свободного члена, также является его решением. А разность двух решений линейного неоднородного уравнения (1) является решением соответствующего линейного однородного уравнения (2). При выполнении условия (4), что предполагается, единственным решением уравнения является нулевое решение, т.е.

$$y_0(t) := x(t+\omega) - x(t) = 0, \quad \forall t \in [0;\omega].$$

Следовательно, (9) является единственным ω-периодическим решением линейного уравнения на $[0;\omega]$. Распространяя метод построения и для любого отрезка периодичности $[(k-1)\omega, k\omega] \quad k \in Z$ функций $p_j(t), j = \overline{1,n}, q(t)$ и объединяя отрезки получим ω-периодическое решение, определенное на $[0;\omega]$.

Указанный метод построения периодического решения можно применить и для неоднородной периодической дифференциальной периодической системы [4].

Список литературы

[1] *Касымов К.А.* Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. – Алматы: Санат, 1997. – 176 с.

[2] *Касымов К.А., Сулейменов Ж.С.* Од одном методе решения линейного дифференциального уравнения с периодическими краевыми условиями // Доклады НАН РК. – 2003. – №6. – С. 15 - 23.

[3] *Бибиков Ю.Н.* Общий курс обыкновенных дифференциальных уравнений. Ленинград. Изд-во ЛГУ, 1981. – 232 с.

[4] *Сүлейменов Ж.С., Наукенова М.Д.* Сызықтық біртекті емес периодтық дифференциалдық жүйенің периодты шешімін құру әдісі // Абай атындағы ҚазҰПУ хабаршысы. Физика-математика ғылымдары сериясы. – 2008. – №4(24). – 123 - 126 б.