О граничных условиях объемного теплового потенциала для полипараболического уравнения

Н.Е. Токмагамбетов, А.Е. Толеуханов
Институт математики, информатики и механики МОН РК
КазНУ им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан.
e-mail: tokmagam@list.ru, aman_mkm@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассмотрен объемный тепловой потенциал для полипараболического уравнения. И получены граничные условия объемного теплового потенцияла для полипараболического уравнения в цилиндрической области с достаточно гладкой границей.

В цилиндрической области $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$, где $\Omega \subset R^n$- односвязная и ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, рассмотрим объемный тепловой потенциал

$$u(x,t) = \int_0^t \int_\Omega \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau \tag{1}$$

где $\varepsilon_{m,n}(x,t) = \frac{\theta(t)t^{m-1}}{(2\sqrt{\pi t})^n} \exp(-\frac{|x|^2}{4t})$- фундаментальное решение задачи Коши для полипараболического уравнения [1], т.е.

$$\begin{aligned}
&\Diamond_{x,t}^m \varepsilon_{m,n}(x-\xi,t-\tau) = (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x)^m \varepsilon_{m,n}(x-\xi,t-\tau) \\
&= (\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x)^{m-1} \varepsilon_{m-1,n}(x-\xi,t-\tau) = \delta(x-\xi,t-\tau), \\
&(\Diamond_{\xi,\tau}^+)^m \varepsilon_{m,n}(x-\xi,t-\tau) = (-\frac{\partial}{\partial \tau} - \Delta_\xi)^m \varepsilon_{m,n}(x-\xi,t-\tau) \\
&= (-\frac{\partial}{\partial \tau} - \Delta_\xi)^{m-1} \varepsilon_{m-1,n}(x-\xi,t-\tau) = \delta(x-\xi,t-\tau).
\end{aligned} \tag{2}$$

Известно что [2], если функция $f(x,t) \in C_{x,t}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}$, то $u(x,t) \in C_{x,t}^{2m+\alpha,m+\frac{\alpha}{2}}$, где $0 < \alpha < 1$ и

$$\Diamond^m u(x,t) = f(x,t), \tag{3}$$

$$\frac{\partial^i u(x,t)}{\partial t^i} \mid_{t=0} = 0, i = \overline{0, m-1}. \tag{4}$$

Не сложно показать что (4) и следующие условия эквивалентны.

$$\Diamond^i v(x,t) \mid_{t=0} = 0, i = \overline{0, m-1}.$$

Отметим, что граничные условия объемного потенциала приведены в работе [3].

Ниже находим боковые граничные условия, определяемые объемным тепловым потенциалом (1).

Теорема. Для любой $f(x,t) \in C_{x,t}^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}$ объемный тепловой потенциал (1) удовлетворяет граничным условиям

$$Q_k(u) = \frac{\Diamond^k u(x,t)}{2} + \sum_{i=0}^{m-k-1} [\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial (\Diamond_{\xi,\tau}^+)^{i+k} \varepsilon_{m,n}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} \Diamond^{m-i-1} u(\xi,\tau) dS_\xi d\tau$$

$$-\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \Diamond^{m-i-1} u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} (\Diamond_{\xi,\tau}^+)^{i+k} \varepsilon_{m,n}(x-\xi,t-\tau) dS_\xi d\tau] = 0, \tag{5}$$

$$\forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), k = \overline{0, m-1}.$$

где $\frac{\partial}{\partial n_\xi}$- производная по внутренней нормали боковой границы.

Если функция $u(x,t) \in C_{x,t}^{2m+\alpha, m+\frac{\alpha}{2}}$ удовлетворяет уравнению (3) и начальным условиям (4), а также боковомым граничным условиям (5) , то функция $u(x,t)$ однозначно определяет объемный тепловой потенциал (1).

Доказательство. Предполагая, что $u(x,t) \in C_{x,t}^{2m+\alpha, m+\frac{\alpha}{2}}$ с учетом свойств фундаментального решения [1], начального условия (4) и непосредственными вычислениями для любого $(x,t) \in \Omega \times (0,T)$ имеем

$$u(x,t) = \int_0^t \int_\Omega \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau = \int_0^t \int_\Omega \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) \diamondsuit (\diamondsuit^{m-1} u(\xi,\tau)) d\xi d\tau =$$

$$= \int_\Omega \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) \diamondsuit^{m-1} u(\xi,\tau) \mid_0^t d\xi$$

$$- \int_0^t \int_\Omega \frac{\partial \varepsilon_{m,n}(x-\xi,t-\tau)}{\partial \tau} \diamondsuit^{m-1} u(\xi,\tau) d\xi d\tau - \int_0^t \int_\Omega \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) \Delta_\xi (\diamondsuit^{m-1} u(\xi,\tau)) d\xi d\tau$$

$$= \int_0^t \int_\Omega \diamondsuit_{\xi,\tau}^{+} \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) \diamondsuit^{m-1} u(\xi,\tau) d\xi d\tau + \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \varepsilon_{m,n}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} \diamondsuit^{m-1} u(\xi,\tau) dS_\xi d\tau$$

$$- \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \diamondsuit^{m-1} u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) dS_\xi d\tau = ...$$

$$= \int_0^t \int_\Omega (\diamondsuit_{\xi,\tau}^{+})^m \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) u(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

$$+ \sum_{i=0}^{m-1} [\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial (\diamondsuit_{\xi,\tau}^{+})^i \varepsilon_{m,n}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} \diamondsuit^{m-i-1} u(\xi,\tau) dS_\xi d\tau$$

$$- \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \diamondsuit^{m-i-1} u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} (\diamondsuit_{\xi,\tau}^{+})^i \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) dS_\xi d\tau]$$

$$= u(x,t) + \sum_{i=0}^{m-1} [\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial (\diamondsuit_{\xi,\tau}^{+})^i \varepsilon_{m,n}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} \diamondsuit^{m-i-1} u(\xi,\tau) dS_\xi d\tau$$

$$- \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \diamondsuit^{m-i-1} u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} (\diamondsuit_{\xi,\tau}^{+})^i \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) dS_\xi d\tau].$$

Отсюда следует

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{m-1} [\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial (\diamondsuit_{\xi,\tau}^{+})^i \varepsilon_{m,n}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} \diamondsuit^{m-i-1} u(\xi,\tau) dS_\xi d\tau \\ &- \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \diamondsuit^{m-i-1} u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} (\diamondsuit_{\xi,\tau}^{+})^i \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) dS_\xi d\tau] = 0, \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T). \end{aligned} \tag{6}$$

С учетом свойств потенциала [4,5] двойного и простого слоя из (6), при $(x,t) \to \partial\Omega \times (0,T)$ находим, что

$$\begin{aligned} &\frac{u(x,t)}{2} + \sum_{i=0}^{m-1} [\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial (\diamondsuit_{\xi,\tau}^{+})^i \varepsilon_{m,n}(x-\xi,t-\tau)}{\partial n_\xi} \diamondsuit^{m-i-1} u(\xi,\tau) dS_\xi d\tau \\ &- \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \diamondsuit^{m-i-1} u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} (\diamondsuit_{\xi,\tau}^{+})^i \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) dS_\xi d\tau] = 0, \quad \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T). \end{aligned} \tag{7}$$

А для нахождения k-того бокового граничного условия мы обозначим через $v(x,t) = \diamondsuit^k u(x,t)$, $k = \overline{0, m-1}$, и проведя аналогичные действия относительно $v(x,t)$ получим следующие боковые граничные условия

$$
\begin{aligned}
&Q_k(u) = \frac{\diamondsuit^k u(x,t)}{2} + \sum_{i=0}^{m-k-1} [\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\diamondsuit^+_{\xi,\tau})^{i+k} \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau)}{\partial n_\xi} \diamondsuit^{m-i-1} u(\xi,\tau) dS_\xi d\tau \\
&- \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \diamondsuit^{m-i-1} u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} (\diamondsuit^+_{\xi,\tau})^{i+k} \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) dS_\xi d\tau] = 0, \\
&\forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), k = \overline{0, m-1}.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Тем самым объемный тепловой потенциал (1) удовлетворяет боковым граничным условиям (5).

Обратно, если решение уравнения $\diamondsuit^m u(x,t) = f(x,t)$, где $u(x,t) \in C^{2m+\alpha, m+\frac{\alpha}{2}}_{x,t}$ удовлетворяет начальным условиям (4) и боковым граничным условиям (5), то оно однозначно задается формулой (1), т.е. порождает объемный тепловой потенциал (1).

Действительно, если u_1 удовлетворяют уравнению (3), начальным условиям (4) и боковым граничным условиям (5), то $u_1 \equiv u$, где u объемный тепловой потенциал (1). Если не так, то функция $v = u - u_1$ удовлетворяет уравнению

$$\diamondsuit^m v(x,t) = 0, \tag{9}$$

$$\diamondsuit^k v(x,t) \mid_{t=0} = 0, k = \overline{0, m-1}. \tag{10}$$

и однородным условиям

$$Q_k(v) = 0, \forall (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), k = \overline{0, m-1}. \tag{11}$$

Обозначим через

$$
\begin{aligned}
&M^k_v(x,t) = \sum_{i=0}^{m-k-1} [\int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial(\diamondsuit^+_{\xi,\tau})^{i+k} \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau)}{\partial n_\xi} \diamondsuit^{m-i-1} u(\xi,\tau) dS_\xi d\tau \\
&- \int_0^t \int_{\partial\Omega} \frac{\partial \diamondsuit^{m-i-1} u(\xi,\tau)}{\partial n_\xi} (\diamondsuit^+_{\xi,\tau})^{i+k} \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) dS_\xi d\tau] = 0 \\
&\forall (x,t) \in \Omega \times (0,T), k = \overline{0, m-1}.
\end{aligned} \tag{12}
$$

С другой стороны, используя (10) мы получаем следующее:

$$
\begin{gathered}
0 = \int_0^t \int_\Omega \varepsilon_{m,n}(x-\xi, t-\tau) \diamondsuit^{m-k} (\diamondsuit^k v(\xi,\tau)) d\xi d\tau = \diamondsuit^k v(x,t) + M^k_v(x,t), \\
\forall (x,t) \in \Omega \times (0,T),\ k = \overline{0, m-1}.
\end{gathered}
$$

Переходя к пределу $(x,t) \to \partial\Omega \times (0,T)$, получим следующее

$$\diamondsuit^k v(x,t) \mid_{\partial\Omega \times (0,T)} = -M^k_v(x,t) \mid_{\partial\Omega \times (0,T)} = Q_k(v) = 0, k = \overline{0, m-1}.$$

То есть задача (9)-(11) эквивалентна к задаче

$$\diamondsuit^m v(x,t) = 0, \tag{13}$$

$$\diamondsuit^k v(x,t) \mid_{t=0} = 0, k = \overline{0, m-1}, \tag{14}$$

$$\diamondsuit^k v(x,t) \mid_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0, k = \overline{0, m-1}. \tag{15}$$

Смешанную задачу (13)-(15) разделим на следующие k-задачи

$$\diamondsuit(\diamondsuit^{m-k}v(x,t)) = 0, \tag{16}$$

$$\diamondsuit^{m-k}v(x,t) \mid_{t=0}= 0, \tag{17}$$

$$\diamondsuit^{i}(\diamondsuit^{m-k}v(x,t)) \mid_{t=0}= 0, \tag{18}$$

$$\diamondsuit^{m-k}v(x,t) \mid_{\partial\Omega\times(0,T)}= 0, \tag{19}$$

$$\diamondsuit^{i}(\diamondsuit^{m-k}v(x,t)) \mid_{\partial\Omega\times(0,T)}= 0, \tag{20}$$

где $k = \overline{1,m}$.

Из задачи (16)-(20), согласно принципу максимума [1], для $k = 1$ получим что $\diamondsuit^{m-1}v(x,t) \equiv 0, \forall(x,t) \in \bar{\Omega}\times(0,T)$, и применив это ко второй задаче, т.е. для $k = 2$ получим что $\diamondsuit^{m-2}v(x,t) \equiv 0, \forall(x,t) \in \bar{\Omega} \times (0,T)$, и продолжая аналогичные рассуждения придем к

$$\diamondsuit^{m-k}v(x,t) = 0, \forall(x,t) \in \bar{\Omega} \times (0,T), k = \overline{1,m}, \tag{21}$$

т. е. получим $v = u - u_1$ и $u_1 = u$.

Таким образазм, боковые граничные условия (5) и начальные условия (4) для уравнения теплопроводности (3) порождает объемный тепловой потенциал однозначно. Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. - 512 с.

[2] *Крылов Н.В.* Лекции по эллиптическим и параболическим уравнениям в пространствах Гелдера. - Новосибирск: 1998. - 176 с.

[3] *Кальменов Т.Ш., Сураган Д.* К спектральным вопросам объемного потенциала. // Доклады академии наук России, 2009, Т. 428, №4, С.16-19.

[4] *G.C.Hsiao, W.L.Wendland.* Boundary Integral Equations. 2008.

[5] *Пресдорф З., Мазья В.Г.* Анализ 4. Интегральные уравнения. 1988.