Всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами

А.Е. Толеуханов, Н.Е. Токмагамбетов

Институт математики, информатики и механики МОН РК, г.Алматы, Казахстан
e-mail: aman_mkm@mail.ru, tokmagam@list.ru

Аннотация

В работе дано полное описание всюду разрешимых краевых задач для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами на отрезке. Для наглядности все результаты иллюстрируются на неоднородных дифференциальных уравнениях третьего порядка с переменными коэффициентами на отрезке.

1 Введение

Известно [1], что для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами всюду разрешимой задачей является задача Коши, то есть для всюду разрешимости краевые условия выбираются специальным образом. В данной работе предлагается еще один способ постановки всюду разрешимых краевых задач для неоднородных дифференциальных уравнений третьего порядка с переменными коэффициентами. Для наглядности все результаты иллюстрируются на неоднородных дифференциальных уравнениях третьего порядка с переменными коэффициентами на отрезке. В настоящей статье описаны всевозможные всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами на отрезке. Метод работы идейно близок к методам работ [2,3,4].

2 Вспомогательные утверждения и доказательства теорем

Теорема 1. *Пусть $p_k(x) \in C^{3-k}[0,1]$ при $k = 1,2,3$. В пространстве $L_2[0,1]$ решение задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами вида*

$$y^{'''}(x) + p_1(x)y^{''}(x) + p_2(x)y^{'}(x) + p_3(x)y(x) = f(x), 0 \le x \le 1, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(0) = 0, y^{'}(0) = 0, y^{''}(0) = 0, \tag{2}$$

задается формулой

$$y(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt, \tag{3}$$

где

$$k(x,t) = \frac{1}{\Delta(t)} \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) & y_3^{'}(t) \\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$\Delta(t) = \begin{vmatrix} y_1^{''}(t) & y_2^{''}(t) & y_3^{''}(t) \\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) & y_3^{'}(t) \\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$ - решения однородного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами.

Доказательства теоремы 1 приведены в работе [1].

Пусть $h(x)$ - произвольная трижды дифференцируемая на отрезке [0, 1] функция, примем $h^{'''}(x) \in L_2[0,1]$ Введем новую функцию по формуле:

$$I(x) = \int_0^x k(x,t)\left[h^{'''}(t) + p_1(t)h^{''}(t) + p_2(t)h^{'}(t) + p_3(t)h(t)\right]dt. \tag{6}$$

Какими свойствами обладает $I(x)$ функция? Вычислим значение функции $I(x)$ в точке $x = 0$.

$$I(0) = \int_0^0 k(0,t)\left[h^{'''}(t) + p_1(t)h^{''}(t) + p_2(t)h^{'}(t) + p_3(t)h(t)\right]dt = 0. \tag{7}$$

Теперь найдем производную первого порядка функции $I(x)$ и найдем ее значение в точке $x = 0$.

$$I^{'}(x) = \int_0^x k_x^{'}(x,t)\left[h^{'''}(t) + p_1(t)h^{''}(t) + p_2(t)h^{'}(t) + p_3(t)h(t)\right]dt +$$

$$+k(x,x)\left[h^{'''}(x) + p_1(x)h^{''}(x) + p_2(x)h^{'}(x) + p_3(x)h(x)\right],$$

так как $k(x,x) = 0$, то получим следующую формулу:

$$I^{'}(x) = \int_0^x k_x^{'}(x,t)\left[h^{'''}(t) + p_1(t)h^{''}(t) + p_2(t)h^{'}(t) + p_3(t)h(t)\right]dt, \tag{8}$$

$$I^{'}(0) = \int_0^0 k_x^{'}(0,t)\left[h^{'''}(t) + p_1(t)h^{''}(t) + p_2(t)h^{'}(t) + p_3(t)h(t)\right]dt = 0. \tag{9}$$

Найдем производную второго порядка функции $I(x)$:

$$I^{''}(x) = \int_0^x k_x^{''}(x,t)\left[h^{'''}(t) + p_1(t)h^{''}(t) + p_2(t)h^{'}(t) + p_3(t)h(t)\right]dt +$$

$$+k_x^{'}(x,x)\left[h^{'''}(x) + p_1(t)h^{''}(x) + p_2(t)h^{'}(x) + p_3(t)h(x)\right],$$

так как $k_x^{'}(x,x) = 0$, отсюда следует:

$$I^{''}(x) = \int_0^x k_x^{''}(x,t)\left[h^{'''}(t) + p_1(t)h^{''}(t) + p_2(t)h^{'}(t) + p_3(t)h(t)\right]dt. \tag{10}$$

$$I^{''}(0) = \int_0^0 k_x^{''}(0,t)\left[h^{'''}(t) + p_1(t)h^{''}(t) + p_2(t)h^{'}(t) + p_3(t)h(t)\right]dt = 0. \tag{11}$$

Найдем производную третьего порядка функции $I(x)$:

$$I^{'''}(x) = \int_0^x k_x^{'''}(x,t)\left[h^{'''}(t) + p_1(t)h^{''}(t) + p_2(t)h^{'}(t) + p_3(t)h(t)\right]dt +$$

$$+k_x^{''}(x,x)\left[h^{'''}(x) + p_1(x)h^{''}(x) + p_2(x)h^{'}(x) + p_3(x)h(x)\right],$$

так как $k_x^{''}(x,x) = 1$, то получим следующую формулу:

$$I^{'''}(x) = \int_0^x k_x^{'''}(x,t)\left[h^{'''}(t) + p_1(t)h^{''}(t) + p_2(t)h^{'}(t) + p_3(t)h(t)\right]dt +$$

$$+\left[h^{'''}(x)+p_1(x)h^{''}(x)+p_2(x)h^{'}(x)+p_3(x)h(x)\right]. \qquad (12)$$

Если взять линейную комбинацию (6), (8), (10), (12) в виде $I^{'''}(x)+p_1(x)I^{''}(x)+p_2(x)I^{'}(x)+p_3(x)I(x)$, то получим

$$I^{'''}(x)+p_1(x)I^{''}(x)+p_2(x)I^{'}(x)+p_3I(x)=$$

$$=\int_0^x\left[k_x^{'''}(x,t)+p_1(x)k_x^{''}(x,t)+p_2(x)k_x^{'}(x,t)+p_3(x)k(x,t)\right]*$$

$$*\left[h^{'''}(t)+p_1(t)h^{''}(t)+p_2(t)h^{'}(t)+p_3(t)h(t)\right]dt+h^{'''}(x)+p_1(x)h^{''}(x)+p_2(x)h^{'}(x)+p_3(x)h(x),$$

то есть

$$I^{'''}(x)+p_1(x)I^{''}(x)+p_2(x)I^{'}(x)+p_3(x)I(x)=h^{'''}(x)+p_1(x)h^{''}(x)+p_2(x)h^{'}(x)+p_3(x)h(x). \quad (13)$$

Здесь учтено, что при $0\le t<x<1$, $k_x^{'''}(x,t)+p_1(x)k_x^{''}(x,t)+p_2(x)\,k_x^{'}(x,t)+p_3(x)\,k(x,t)=0$.

Таким образом мы показали, что значение самой функции $I(x)$ и производной первого порядка в точке $x=0$ равно нулю и существует производная второго,третьего порядка, причем выполняется соотношение (13).

С другой стороны если вспомнить формулу Логранжа, то $I(x)$ функцию можно переписать в виде:

$$I(x)=\int_0^x k(x,t)\left[h^{'''}(t)+p_1(t)h^{''}(t)+p_2(t)h^{'}(t)+p_3(t)h(t)\right]dt=$$

$$=\int_0^x h(t)\left[k_t^{'''}(x,t)-(p_1(t)k(x,t))_t^{''}+(p_2(t)k(x,t))_t^{'}-p_3(t)k(x,t)\right]dt-h(x)+k_t^{''}(x,0)h(0)-$$

$$-k_t^{'}(x,0)[h^{'}(0)+p_1(0)h(0)]+k(x,0)[h^{''}(0)+p_1(0)h^{'}(0)-p_1^{'}(0)+p_2(0)h(0)]. \qquad (14)$$

Вычислим следующие выражения $k_t^{'''}(x,t)-(p_1(t)k(x,t))_t^{''}+(p_2(t)k(x,t))_t^{'}-p_3(t)k(x,t)$, $k(x,0)$, $k_t^{'}(x,0)\,k_t^{''}(x,0)$ по отдельности.

$$k_t^{'}(x\,t)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1^{''}(t) & y_2^{''}(t) & y_3^{''}(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{''}(t) & y_2^{''}(t) & y_3^{''}(t)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) & y_3^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\end{vmatrix}}+p_1(t)k(x,t),$$

$$k_{tt}^{''}(x,t)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1^{''}(t) & y_2^{''}(t) & y_3^{''}(t)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) & y_3^{'}(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{''}(t) & y_2^{''}(t) & y_3^{''}(t)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) & y_3^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\end{vmatrix}}-p_2(t)k(x,t)+p_1^{'}(t)k(x,t)+p_1^2(t)k(x,t)+p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1^{''}(t) & y_2^{''}(t) & y_3^{''}(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{''}(t) & y_2^{''}(t) & y_3^{''}(t)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) & y_3^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\end{vmatrix}}$$

$$k_t^{'''}(x,t)=p_3(t)k(x,t)-p_2^{'}(t)k(x,t)-p_2(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1^{''}(t) & y_2^{''}(t) & y_3^{''}(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1^{''}(t) & y_2^{''}(t) & y_3^{''}(t)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) & y_3^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\end{vmatrix}}-2p_1(t)p_2(t)k(x,t)+$$

$$+p_1''(t)k(x,t)+3p_1(t)p_1'(t)k(x,t)+p_1^2(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\end{vmatrix}}+p_1^3(t)k(x,t)+$$

$$+2p_1'(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\end{vmatrix}}+p_1(t)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1''(t) & y_2''(t) & y_3''(t)\\ y_1'(t) & y_2'(t) & y_3'(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t)\end{vmatrix}}$$

$$-k_t'''(x,t)+(p_1(t)k(x,t))_t''-(p_2(t)k(x,t))_t'+p_3(t)k(x,t)=-k_t'''(x,t)+p_1(t)k_t''(x,t)+$$

$$+p_1'(t)k_t'(x,t)+p_1''(t)k(x,t)+p_1'(t)k_t'(x,t)-p_2(t)k_t'(x,t)-p_2'(t)k(x,t)+p_3(t)k(x,t)=0,$$

$$k(x,0)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1'(0) & y_2'(0) & y_3'(0)\\ y_1(0) & y_2(0) & y_3(0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1''(0) & y_2''(0) & y_3''(0)\\ y_1'(0) & y_2'(0) & y_3'(0)\\ y_1(0) & y_2(0) & y_3(0)\end{vmatrix}},$$

$$k_t'(x,0)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1''(0) & y_2''(0) & y_3''(0)\\ y_1(0) & y_2(0) & y_3(0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1''(0) & y_2''(0) & y_3''(0)\\ y_1'(0) & y_2'(0) & y_3'(0)\\ y_1(0) & y_2(0) & y_3(0)\end{vmatrix}}+p_1(0)k(x,0),$$

$$k_t''(x,0)=\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1''(0) & y_2''(0) & y_3''(0)\\ y_1'(0) & y_2'(0) & y_3'(0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1''(0) & y_2''(0) & y_3''(0)\\ y_1'(0) & y_2'(0) & y_3'(0)\\ y_1(0) & y_2(0) & y_3(0)\end{vmatrix}}-p_2(0)k(x,0)+p_1'(0)k(x,0)+p_1(0)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x)\\ y_1''(0) & y_2''(0) & y_3''(0)\\ y_1(0) & y_2(0) & y_3(0)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1''(0) & y_2''(0) & y_3''(0)\\ y_1'(0) & y_2'(0) & y_3'(0)\\ y_1(0) & y_2(0) & y_3(0)\end{vmatrix}}+$$

$$+p_1^2(0)k(x,0),$$

где $\begin{matrix} y_1(0)=1 & y_1'(0)=0 & y_1''(0)=0\\ y_2(0)=0 & y_2'(0)=1 & y_2''(0)=0\\ y_3(0)=0 & y_3'(0)=0 & y_3''(0)=1\end{matrix}$ начальные значения фундаментальной системы решений

$y_1(x), y_2(x), y_3(x)$. Тогда получим, что

$$k(x,0) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} = y_3(x), \tag{15}$$

$$k_t^{'}(x,0) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} + p_1(0)k(x,0) = -y_2(x) + p_1(0)y_3(x), \tag{16}$$

$$k_t^{''}(x,0) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} - p_2(0)y_3(x) + p_1^{'}(0)y_3(x) + p_1(0)\frac{\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} +$$

$$+p_1^2(0)y_3(x) = y_1(x) - p_2(0)y_3(x) + p_1^{'}(0)y_3(x) - p_1(0)y_2(x) + p_1^2(0)y_3(x), \tag{17}$$

То есть (14) формула примет следующий вид:

$$I(x) = h(x) - k_t^{''}(x,0)h(0) + k_t^{'}(x,0)[h^{'}(0) + p_1(0)h(0)] -$$

$$-k(x,0)[h^{''}(0) + p_1(0)h^{'}(0) - p_1^{'}(0) + p_2(0)h(0)] =$$

$$= h(x) - h(0)y_1(x) - h^{'}(0)y_2(x) - h^{''}(0)y_3(x). \tag{18}$$

Удобно вести обозначение $M(x) = h(x) - I(x)$. Найдем производную первого и второго,третьего порядка функции $M(x)$.

$$M^{'}(x) = h^{'}(x) - I^{'}(x), \quad M^{''}(x) = h^{''}(x) - I^{''}(x). \quad M^{'''}(x) = h^{'''}(x) - I^{'''}(x).$$

Если взять линейную комбинацию $M^{'''}(x) + p_1(x)M^{''}(x) + p_2(x)M^{'}(x) + p_3(x)M(x)$, то в результате для любой гладкой функции $h(x)$ получим соотношение

$$M^{'''}(x) + p_1(x)M^{''}(x) + p_2(x)M^{'}(x) + p_3(x)M(x) =$$

$$= h^{'''}(x) - I^{'''}(x) + p_1(x)h^{''}(x) - p_1(x)I^{''}(x) + p_2(x)h^{'}(x) - p_2(x)I^{'}(x) + p_3(x)h(x) - p_3(x)I(x) = 0,$$

или

$$M^{'''}(x) + p_1(x)M^{''}(x) + p_2(x)M^{'}(x) + p_3(x)M(x) = 0. \tag{19}$$

Теперь используем граничные условия (7), (9),(11) тогда для произвольной гладкой функции $h(x)$ имеем граничные соотношения

$$h(x)|_{x=0} - M(x)|_{x=0} = 0, \quad h^{'}(x)|_{x=0} - M^{'}(x)|_{x=0} = 0, \quad h^{''}(x)|_{x=0} - M^{''}(x)|_{x=0} = 0.$$

В силу произвольности $h(x)$ при $t \in [0,1]$ из соотношения (17) убеждаемся в справедливости следующего свойства функции $k(x,t)$:

$$k(x,t)|_{x=0,\,t=0} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t}k(x,t)|_{x=0,\,t=0} = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}k(x,t)|_{x=0,\,t=0} = -1. \tag{20}$$

Поэтому сформулируем необходимые для дальнейшего результаты в виде отдельного утверждение.

Теорема 2. *Функция $k(x,t)$ задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами на отрезке обладает свойствами:*
1) $k(P,Q) = k(Q,P), \forall Q, P \in [0,1]$,
2) $k(P,Q) \le 0, \forall Q, P \in [0,1]$,
3) $k_x^{'''}(Q,P) + p_1(Q)k_x^{''}(Q,P) + p_2(Q)k^{'}(Q,P) + p_3(Q)k(Q,P) = 0, \forall Q, P \in [0,1]$,
4) при $P = Q$, $k(P,Q) = 0$
5)при $P = Q = 0$ справедливо соотношение (20).

Теперь образуем новую функцию по формуле:

$$W(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt + h(x) - I(x). \tag{21}$$

где $h(x)$ - произвольная достаточно гладкая функция. $I(x)$ - определяется по формуле (18).

3 Основные результаты

Теорема 3. *Функция $W(x)$, введенная по формулам (21)и (17), является решением следующей задачи:*

$$W^{'''}(x) + p_1(x)W^{''}(x) + p_2(x)W^{'}(x) + p_3(x)W(x) = f(x), 0 \le x \le 1, \tag{22}$$

$$W(x)|_{x=0} = h(x)|_{x=0}, \tag{23}$$
$$W^{'}(x)|_{x=0} = h^{'}(x)|_{x=0}, \quad W^{''}(x)|_{x=0} = h^{''}(x)|_{x=0},$$

где $h(x)-$ произвольная достаточно гладкая функция.

Причем решение краевой задачи (22), (23) единственно, то есть решение зависит только от граничных значений $h(x)|_{x=0}$, $h^{'}(x)\Big|_{x=0}$, $h^{''}(x)\Big|_{x=0}$ но не зависит от $h(x)$, $h^{'}(x)$, $h^{''}(x)$ когда $0 < x < 1$.

Доказательство. Заметим, что из соотношения (18) представление (21) можно переписать в виде

$$W(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt + h(0)y_1(x) + h^{'}(0)y_2(x) + h^{''}(0)y_3(x). \tag{24}$$

Проверим какими свойствами обладает $W(x)$ функция. Вычислим значение функции $W(x)$ в точке $x = 0$.

$$W(0) = \int_0^0 k(0,t)f(t)dt + h(0)y_1(0) + h^{'}(0)y_2(0) + h^{''}(0)y_3(0) = h(0). \tag{25}$$

Найдем производную $W^{'}(x)$, $W^{''}(x)\,W^{'''}(x)$ и найдем значение $W^{'}(x)|_{x=0}\,W^{''}(x)|_{x=0}$.

$$W^{'}(x) = \int_0^x k_x^{'}(x,t)f(t)dt + k(x,x)f(x) + h(0)y_1^{'}(x) + h^{'}(0)y_2^{'}(x) + h^{''}(0)y_3^{'}(x, \tag{26}$$

$$W^{'}(0)=\int_0^0 k^{'}_x(0,t)f(t)dt+h(0)y^{'}_1(0)+h^{'}(0)y^{'}_2(0)+h^{''}(0)y^{'}_3(0)=h^{'}(0). \qquad (27)$$

$$W^{''}(x)=\int_0^x k^{''}_x(x,t)f(t)dt+k^{'}_x(x,x)f(x)+h(0)y^{''}_1(x)+h^{'}(0)y^{''}_2+h^{''}(0)y^{''}_3(x), \qquad (28)$$

$$W^{''}(0)=\int_0^0 k^{''}_x(0,t)f(t)dt+h(0)y^{''}_1(0)+h^{'}(0)y^{''}_2(0)+h^{''}(0)y^{''}_3(0)=h^{''}(0), \qquad (29)$$

$$W^{'''}(x)=\int_0^x k^{'''}_x(x,t)f(t)dt+f(x)+h(0)y^{'''}_1(x)+h^{'}(0)y^{'''}_2+h^{''}(0)y^{'''}_3(x). \qquad (30)$$

Если взять линейную комбинацию (24), (26), (28), (30) в виде $W^{'''}(x)+p_1(x)W^{''}(x)+p_2(x)W^{'}(x)+p_3(x)W(x)$, то получим

$$W^{'''}(x)+p_1(x)W^{''}(x)+p_2(x)W^{'}(x)+p_3(x)W(x)=$$

$$=\int_0^x\left[k^{'''}_x(x,t)+p_1(x)k^{''}_x(x,t)+p_2(x)k^{'}_x(x,t)+p_3(x)k(x,t)\right]f(t)dt+$$

$$+h(0)\left[y^{'''}_1(x)+p_1(x)y^{''}_1(x)+p_2(x)y^{'}_1(x)+p_3(x)y_1(x)\right]+$$

$$+h^{'}(0)\left[y^{'''}_2(x)+p_1(x)y^{''}_2(x)+p_2(x)y^{'}_2(x)+p_3(x)y_2(x)\right]+$$

$$+h^{''}(0)\left[y^{'''}_3(x)+p_1(x)y^{''}_3(x)+p_2(x)y^{'}_3(x)+p_3(x)y_3(x)\right]+f(x),$$

$$W^{'''}(x)+p_1(x)W^{''}(x)+p_2(x)W^{'}(x)+p_3(x)W(x)=f(x). \qquad (31)$$

Из формул (31), (25), (27),(29) вытекает утверждение теоремы 3.

Теперь покажем, как используя теорему 3 можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами на отрезке $[0,1]$.

Для этого достаточно, чтобы функция $h(x)$ непрерывным образом зависела от функции $f(x)$, то есть пусть существует непрерывный в смысле нормы $L_2[0,1]$ оператор K, отображающий $f(x)$ в $h(x)$. Напомним $h(x)$ - гладкая функция. Итак, пусть $h=Kf(x)$. Тогда задача (22), (23) примет вид

$$W^{'''}(x)+p_1(x)W^{''}(x)+p_2(x)W^{'}(x)+p_3(x)W(x)=f(x), 0\le x\le 1, \qquad (32)$$

$$W(x)|_{x=0}-K(W^{'''}+p_1W^{''}+p_2W^{'}+p_3W)(x)|_{x=0}=0, \qquad (33)$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(W^{'''}+p_1W^{''}+p_2W^{'}+p_3W(x))|_{x=0}=0.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}W(x)|_{x=0}-\frac{d^2}{dx^2}K(W^{'''}+p_1W^{''}+p_2W^{'}+p_3W(x))(x)|_{x=0}=0.$$

Условия (33) накладываемые на функцию $W(x)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (32) при любой правой части $f(x)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (32), (33) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми "краевыми"условиями вида (33). Итак, справедливо

Теорема 4. *Для любого непрерывного в смысле $L_2[0,1]$ оператора K отображающего пространство $\{f\}\in L_2[0,\,1]$ в множество гладких функции $\{h\}\in W_2^3[0,\,1]$ задача (32), (33) имеет единственное устойчивое в смысле $L_2[0,1]$ решение при всех правых частях $f(x)$ из $L_2[0,1]$.*

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 5. *Если уравнение (32) при всех правых частях $f(x)$ из $L_2[0,1]$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое в смысле $L_2[0,1]$ решение, то найдется непрерывный в смысле $L_2[0,1]$ оператор K, отображающий пространство $\{f\} \in L_2[0,1]$ в множество гладких функции $\{h\} \in W_2^3[0,1]$, такой что дополнительное условие эквивалентно условию вида (33) с оператором K.*

Доказательство. Пусть уравнение (32) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $f(x)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $W(x,f)$. Для удобства введем новую функцию $u_0(x,f) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt$. Рассмотрим разность $\upsilon(x) = W(x,f) - u_0(x,f)$. Функция $\upsilon(x)$ удовлетворяет условию $\upsilon^{'''} + p_1\upsilon^{''} + p_2\upsilon^{'} + p_3\upsilon = 0$. Таким образом, для любого f единственным образом находим υ, то есть существует линейный оператор $\upsilon = Kf(x)$. С другой стороны, введем новую функцию $\omega(x,f) = u_0(x,f) + \upsilon(0,f)y_1(x) + \upsilon^{'}(0,f)y_2(x) + \upsilon^{''}(0,f)y_3(x)$. Последняя формула аналогична формуле (24). В данном случае роль $h(x)$ играет функция $\upsilon(x)$. Следовательно, выше приведенные рассуждения из теоремы 3 показывают, что

$$\omega^{'''}(x) + p_1(x)\omega^{''}(x) + p_2(x)\omega^{'}(x) + p_3(x)\omega(x) = f(x), \tag{34}$$

$$\omega(x)|_{x=0} = \upsilon(x,f)|_{x=0}, \tag{35}$$

$$\frac{d}{dx}\omega(x)|_{x=0} = \frac{d}{dx}\upsilon(x,f)|_{x=0}, \quad \frac{d^2}{dx^2}\omega(x)|_{x=0} = \frac{d^2}{dx^2}\upsilon(x,f)|_{x=0},$$

где $\upsilon(x) = Kf(x)$ или $\upsilon(x) = K(\omega^{'''} + p_1\omega^{''} + p_2\omega^{'} + p_3\omega)(x)$. С другой стороны, ясно что $W(x,f) = u_0(x,f) + \upsilon(x)$. Следовательно, имеем

$$W^{''}(x) + p_1(x)W^{'}(x) + p_2(x)W(x) = f(x), 0 \le x \le 1, W(x,f)|_{x=0} = \upsilon(x,f)|_{x=0}, \tag{36}$$

$$\frac{d}{dx}W(x,f)|_{x=0} = \frac{d}{dx}\upsilon(x,f)|_{x=0}. \quad \frac{d^2}{dx^2}W(x,f)|_{x=0} = \frac{d^2}{dx}\upsilon(x,f)|_{x=0}.$$

Сравнивая соотношение (35) и (36) видим, что $W(x,f) = \omega(x,f)$, то есть дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид:

$$W(x)|_{x=0} - K(W^{''} + p_1W^{'} + p_2W)(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(W^{'''} + p_1W^{''} + p_2W^{'} + p_3W)(x)|_{x=0} = 0.$$

Остается заметить, что оператор K-непрерывен в смысле $L_2[0,1]$ и отображает пространство $L_2[0,1]$ в $W_2^3[0,1]$. Теорема 5 полностью доказана.

Список литературы

[1] *Наймарк М.А.*, Линейные дифференциальные операторы. - М.: Наука, 1969. - 528 с.

[2] *Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О.*, О регулярных задачах для уравнения Лаврентьева - Бицадзе // Диф.уравнения. 1981. т.17, №5. - С. 873-885.

[3] *Кальменов Т.Ш.*, О регулярных краевых задачах для волнового уравнения // Диф.уравнения. 1981.т.17, №5. - С.1105-1121.

[4] *Павлов Б.С.*, Теория расширений и явнорешаемые модели // Успехи мат. наук, т.42, №6(258), 1987. - С. 99-131.