О гладкости решения некоторых краевых задач для уравнения Лапласа в классах Гельдера

Б.Х. Турметов, Б.Т. Торебек
Международный казахско-турецкий университет имени Х.А.Ясави, Казахстан
e-mail: turmetovbh@mail.ru, turebekb85@mail.ru

Аннотация

В настоящей работе исследуются свойства некоторых интегро-дифференциальных операторов в классе гармонических функций. В качестве применения этих операторов рассматриваются операторные краевые задачи в единичном шаре.

1.Введение. Для постановки и исследования краевых задач нам нужно ввести понятие операторов дробного дифференцирования.

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - единичный шар,$n \geq 2$, $\partial\Omega$ - сфера. Пусть далее, функция $u(x)$ - гармоническая в шаре Ω, m - натуральное число, $r = |x|$, $\theta = \frac{x}{|x|}$, $0 < \alpha < 1$. Рассмотрим операторы

$$D^{\alpha}[f](t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds, D_*^{\alpha}[f](t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{f'(s)}{(t-s)^{\alpha}} ds$$

где $\Gamma(\alpha)$ - гамма функция Эйлера. Оператор D^{α} - называется оператором дифференци-рования порядка α в смысле Римана-Лиувилля, а оператор D_*^{α} - оператором дифферен-цирования порядка α в смысле Капуто (см. [1]). Введем обозначения

$$B[u](x) = B^{\alpha_1}[u](x) = r^{\alpha_1} D^{\alpha_1}[u](x), B_*[u](x) = B_*^{\alpha_1}[u](x) = r^{\alpha_1} D_*^{\alpha_1}[u](x),$$

$$B^m[u](x) = B^{\alpha_1}[B^{\alpha_2} ... B^{\alpha_m}[u](x)] = B^{\alpha_m}[B^{\alpha_m - 1} ... B^{\alpha_1}[u](x)],$$

$$B_*^m[u](x) = B_*^{\alpha_1}[B_*^{\alpha_2} ... B_*^{\alpha_m}[u](x)] = B_*^{\alpha_m}[B_*^{\alpha_m - 1} ... B_*^{\alpha_1}[u](x)],$$

2.Свойства операторов B^m и B_*^m.

Лемма 1 *Пусть $0 < \alpha < 1$ и $H_k(x)$ - однородный гармонический полином степени k, $k = 0, 1, ...$ Тогда справедливы равенства*

$$B[H_k](x) = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} H_k(x), B_*[H_k](x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k = 0 \\ \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} H_k(x) & \text{если} \quad k \geq 1 \end{cases}$$

Доказательство:В соответствии с определением оператора $B[u] = B^{\alpha}[u](x)$ запишем

$$B[H_k](x) = \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} H_k(\tau\theta) d\tau = \frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^k H_k(\theta) d\tau =$$

$$= \frac{H_k(\theta) r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \tau^k d\tau = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} H_k(x)$$

Далее, очевидно, что $B_*[t^0] = B_*[1] = 0$.

Пусть $k \geqslant 1$. Тогда по определению оператора $B_*[u](x) \equiv B_*^\alpha[u](x)$, аналогично предыдущим равенствам запишем

$$B_*[H_k](x) = \frac{r^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^r (r-\tau)^{-\alpha} \frac{d}{d\tau} H_k(\tau\theta) d\tau = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} H_k(x)$$

Лемма 1 доказано.

Следствие 1 *Пусть* $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m)$, $0 < \alpha < 1$ *и* $H_k(x)$ *- однородный гармони-ческий полином степени* k, $k = 1, 2, ...$ *Тогда справедливы равенства*

$$B^m[H_k](x) = \gamma_{k,m} H_k(x), \tag{1}$$

$$B_*^m[H_k](x) = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad k = 0 \\ \gamma_{k,m} H_k(x) & \text{если} \quad k \geq 1 \end{cases} \tag{2}$$

где обозначено

$$\gamma_{k,m} H_k(x) = \frac{\Gamma^m(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha_1)\Gamma(k+1-\alpha_2)...\Gamma(k+1-\alpha_m)} H_k(x)$$

Следствие доказывается последовательным применением леммы 1.

Теорема 1 *Если* $u(x)$ *гармоническая в шаре* Ω *функция, то функции* $B^m[u](x)$ *и* $B_*^m[u](x)$ *также являются гармоническими в шаре* Ω.

Доказательство: Пусть $u(x)$ - гармоническая функция в шаре Ω. Тогда известно (см. [2]), что функция $u(x)$ представляется в виде

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) \tag{3}$$

где - $\left\{ H_k^{(i)}(x),\, i = 1, \ldots, h_k \right\}$ - полная система однородных гармонических полиномов, а $u_k^{(i)}$ - коэфиценты разложения (3). Известно, что $h_k = (1 + 2k/(n-2))C_{k+n-3}^{n-3} \sim 2k^{n-2}/(n-2)!$, $k \to \infty$. Более того, ряд (3) сходится абсолютно и равномерно по x при $|x| \leqslant \rho < 1$ и значит $\forall \rho < 1, \exists C_\rho, \forall x, |x| \leq \rho, |u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x)| \leq C_\rho$. Применяя формально оператор B^m к ряду (3) учитывая равенство (1) получаем

$$B^m[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) \tag{4}$$

В силу асимптотической оценки [3, с. 366] $\frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+1-\alpha)} \sim k^\alpha$при $k \to \infty$, $0 < \alpha_j < 1$, $j = 1, \ldots, m$ получаем $\gamma_{k,m} \sim k^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_m}$ когда $k \to \infty$ и значит $\lim\limits_{x \to \infty} \sqrt[k]{\gamma_{k,m}} = 1$. Поэтому, при $|x| \leq r\rho$ и $r < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} |u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x)| \leq C_\rho \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{k,m} h_k r^k < \infty$$

и значит ряд (4) сходится абсолютно и равномерно по x при $|x| \le r\rho < 1$ и его сумма представляет собой гармоническую функцию. В силу произвольности $\rho < 1$ функция $B^m[u](x)$ определена во всем шаре Ω.Аналогично доказывается гармоничность функции $B^m_*[u](x)$.

Лемма 2 *Пусть функция $u(x)$ - гармоническая в шаре Ω. Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство*

$$B^m_*[u](x) = B^m[u](x) - \frac{u(0)}{\Gamma(1-\alpha_1)\cdots\Gamma(1-\alpha_m)} \tag{5}$$

Доказательство: Представим гармоническую функцию $u(x)$ в виде ряда (3). Тогда используя равенства (1) и (2) из следствия 1 и теорему 1 запишем

$$B^m[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x), \quad B^m_*[u](x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x)$$

Сравнивая эти ряды и учитывая, что $h_0 = 1$ и $u_0^{(i)} H_0^{(i)}(x) = u(0)$ получим

$$B^m_*[u](x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) - \sum_{i=1}^{h_0} \gamma_{0,m} u_0^{(i)} H_0^{(i)}(x) = B^m[u](x) - \gamma_{0,m} u(0)$$

Поскольку $\gamma_{0,m} = 1/(\Gamma(1-\alpha_1)\cdots\Gamma(1-\alpha_m))$, то лемма доказана.

Используя однородность гармонических полиномов $H_k(x)$, легко доказывается следующее утверждение

Лемма 3 *Пусть $H_k(x)$ - однородный гармонический полином степени k при $k = 0, 1, ...$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $0 < \alpha_j < 1$. Тогда справедливо равенство*

$$\frac{1}{\gamma_{k,m}} H_k(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} H_k(sx) ds_m \tag{6}$$

где - $(1-s)^{\alpha-1} = (1-s_1)^{\alpha_1-1}\cdots(1-s_m)^{\alpha_m-1}$, $s^{-\alpha} = s_1^{-\alpha_1}\cdots s_m^{-\alpha_m}$, $sx = (s_1\cdots s_m x_1, \ldots, s_1\cdots s_m x_n)$.

Теорема 2 *Пусть функция $u(x)$ - гармоническая в Ω, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $0 < \alpha_j < 1$. Тогда, в обозначениях леммы 3, для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство*

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B^m[u](sx) ds_m \tag{7}$$

Доказательство: Представим гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$ в виде ряда

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} \frac{1}{\gamma_{k,m}} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) \tag{8}$$

Далее, учитывая равенства (1), (6) и равномерную сходимость ряда (8) по x при $|x| \le \rho < 1$ его можно привести к виду

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} \gamma_{k,m} u_k^{(i)} \frac{1}{\gamma_{k,m}} H_k^{(i)}(x) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{u_k^{(i)}}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_0^1 ds_2\cdots\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B^m[H_k^{(i)}](sx)ds_m =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_0^1 ds_2\cdots\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B^m\left[\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}u_k^{(i)}H_k^{(i)}\right](sx)ds_m =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_0^1 ds_2\cdots\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B^m[u](sx)ds_m$$

Теорема доказана.

Используя связь между операторами B^m и B_*^m, следующую из равенств (1) и (2) можно установить следующее утверждение.

Теорема 3 *Если функция $u(x)$- гармоническая в шаре Ω, $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, $0<\alpha_j<1$, то для любого $x\in\Omega$ справедливо равенство*

$$u(x) = u(0) + \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_0^1 ds_2\cdots\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B_*^m[u](sx)ds_m \tag{9}$$

Теорема 2, а точнее равенство (7) позволяет определить следующий оператор

$$B^{-m}[u](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_0^1 ds_2\cdots\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}u(sx)ds_m \tag{10}$$

где - $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)$, $0<\alpha_j<1$, $(1-s)^{\alpha-1}=(1-s_1)^{\alpha_1-1}\cdots(1-s_m)^{\alpha_m-1}$, $s^{-\alpha}=s_1^{-\alpha_1}\cdots s_m^{-\alpha_m}$, $sx=(s_1\cdots s_m x_1,\dots,s_1\cdots s_m x_n)$.

Теорема 4 *Если функция $u(x)$ - гармоническая в шаре Ω, тогда функция $B^{-m}[u](x)$ также является гармонической в шаре Ω.*

Доказательство: Непосредственным подсчетом находим, что в шаре Ω верно равенс-тво

$$\Delta\left(B^{-m}[u](x)\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_0^1 ds_2\cdots\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{2-\alpha}\Delta u(sx)ds_m = 0, \quad x\in\Omega$$

Следовательно, функция $B^{-m}[u](x)$ - гармоническая в шаре Ω. Теорема доказана.

Основное свойство оператора $B^{-m}[u](x)$ сформулировано в следующем утверждении.

Теорема 5 *Если функция $u(x)$ - гармоническая в шаре Ω, то справедливы равенства*

$$B^{-m}\left[B^m[u]\right](x) = u(x)\ ,\quad B^m\left[B^{-m}[u]\right](x) = u(x)$$

Доказательство: Докажем первое равенство теоремы.

Применим к функции $B^m[u](x)$ оператор B^{-m}. По определению оператора $B^{-m}[u](x)$ (10) и в соответствии с теоремой 2 будем иметь

$$B^{-m}\left[B^m[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int\limits_0^1 ds_1\int\limits_0^1 ds_2\cdots\int\limits_0^1 (1-s)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B^m\left[u\right](sx)ds_m = u(x)$$

Для доказательства второго равенства теоремы применим оператор $B = B^{\alpha_1}[u](x) = r^{\alpha_1}\cdot$ $\cdot D^{\alpha_1}[u](x)$ к функции $B^{-m}[u](x)$. Будем иметь

$$B\left[B^{-m}[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)} B\left[\int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} u(sx) ds_m\right] =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} \frac{r^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha_1} u(s\tau\theta) d\tau ds_m.$$

Далее, нетрудно убедится в следующих равенствах

$$\frac{r^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{dr} \int_0^r (r-\tau)^{-\alpha_1} u(s\tau\theta) d\tau \underset{s\tau=t}{=} \frac{r^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{dr} \int_0^{rs} (r-t/s)^{-\alpha_1} u(t\theta) \frac{d\tau}{s} =$$

$$= \frac{r^{\alpha_1} s^{\alpha_1 - 1}}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{dr} \int_0^{sr} (sr-t)^{-\alpha_1} u(t\theta)\, dt = \frac{(sr)^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)} \frac{d}{d(sr)} \int_0^{sr} (sr-t)^{-\alpha_1} u(t\theta)\, dt = B[u](sx)$$

где учтено, что $\theta = \frac{x}{|x|} = \frac{sx}{|sx|}$. Поэтому будем иметь

$$B\left[B^{-m}[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B\left[u\right](sx) ds_m$$

Следовательно, вспоминая определение оператора $B^m[u](x) = B^{\alpha_m}[\cdots B^{\alpha_1}[u]](x)$, можно записать

$$B^m\left[B^{-m}[u]\right](x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)} \int_0^1 ds_1 \int_0^1 ds_2 \cdots \int_0^1 (1-s)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B^m\left[u\right](sx) ds_m = u(x)$$

Второе равенство теоремы доказано.

Таким образом, из утверждения теоремы 5 следует, что операторы B^m и B^{-m} являются взаимно обратными на гармонических в шаре Ω функциях.

3. Постановка и решение краевых задач.

Теперь перейдем к постановке и решению некоторых краевых задач, включающих значения операторов B^m и B_*^m на границе.

Задача 1 *Найти гармоническую в шаре Ω функцию $u(x)$, для которой функция $B^m[u](x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере $\partial\Omega$ равенству*

$$B^m[u(x)] = f(x), \quad x \in \partial\Omega$$

Задача 2 *Найти функцию $u(x)$ гармонической в шаре Ω, для которой функция $B_*^m[u](x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере $\partial\Omega$ равенству*

$$B_*^m[u(x)] = f(x), \quad x \in \partial\Omega\ .$$

Заметим, что аналогичные задачи рассматривались для операторов целого порядка в работах [4,5], а для операторов дробного порядка при *m=1* в работах [6-8].

Пусть $v(x)$ - классическое решение задачи Дирихле в шаре

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, & x \in \Omega \\ v(x) = f(x), & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{11}$$

Справедливы следующие основные утверждения.

Лемма 4 . *Пусть* $0 < \lambda$, $0 < \gamma < 1$, λ *и* $\lambda + \gamma$ *- нецелые,* $f(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$. *Тогда, если* $v(x)$ *-решение задачи Дирихле, то функция*

$$w(x) = \int_0^1 (1-\tau)^{\gamma-1}\tau^{-\gamma} v(\tau x) d\tau$$

принадлежит классу $C^{\lambda+\gamma}(\overline{\Omega})$.

Доказательство: Пусть $v(x)$ - решение задачи Дирихле (11). Известно (см. [9]), что если $f(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$, то $v(x) \in C^{\lambda}(\overline{\Omega})$ и для любого мультииндекса κ с $|\kappa| = \kappa_1 + \kappa_2 + ... + \kappa_n > \lambda$ справедлива оценка

$$|D^{\kappa}[v](x)| \leq C(1-|x|)^{\lambda-|\kappa|} \tag{12}$$

И наоборот. Если $v(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ и для $D^{\kappa}[v](x)$ справедливо оценка (12), то $v(x) \in C^{\lambda}(\overline{\Omega})$.

Так как $v(x)$ гармоническая, то таковым является и функция $w(x)$. Оценим $D^{\kappa}[w](x)$, где $|\kappa| > \lambda + \gamma$.

В силу оценки (12) получим

$$|D^{\kappa}[w](x)| \leq \int_0^1 (1-\tau)^{\gamma-1}\tau^{-\gamma}|D^{\kappa}[w](x)|\tau^{|\kappa|}d\tau \leq C\int_0^1 (1-\tau)^{\gamma-1}\tau^{|\kappa|-\gamma}(1-\tau|x|)^{\lambda-|\kappa|}d\tau$$

Последний интеграл разделим на две части

$$\int_0^1 = \int_0^{|x|} + \int_{|x|}^1 = I_1 + I_2$$

Оценим интеграл I_1. Рассмотрим два случая. а) Пусть $1/2 \leq |x| \leq 1$. Тогда

$$I_1 = \int_0^{|x|} (1-\tau)^{\gamma-1}\tau^{|\kappa|-\gamma}(1-\tau|x|)^{\lambda-|\kappa|}d\tau$$

Так как для любого $\tau \in [0, |x|]$ справедливо неравенство $1 - \tau|x| \geq 1 - \tau$ и $|\kappa| > \gamma$, то $\tau^{|\kappa|-\gamma} \leq 1$ и

$$I_1 \leq C\int_0^{|x|} (1-\tau)^{\gamma-1+\lambda-|\kappa|}d\tau \leq C(1-|x|)^{\gamma+\lambda-|\kappa|}$$

б) Пусть $|x| \leq 1$. В этом случае $1 - \tau|x| \geq 1 - |x|^2 \geq 1 - 1/4 = 3/4$. Следовательно, $I_1 \leq C$. Т.е. I_1 - ограничено.

Оценим интеграл I_2.

$$I_1 = \int\limits_{|x|}^{1} (1-\tau)^{\gamma-1}\tau^{|\kappa|-\gamma}(1-\tau|x|)^{\lambda-|\kappa|}d\tau$$

В этом случае для τ справедливо $|x| \leq \tau \leq 1$. Следовательно, $1-\tau|x| \geq 1-|x|$. Тогда $(1-\tau|x|)^{\lambda-|\kappa|} \leq (1-|x|)^{\lambda-|\kappa|}$ и $\tau^{|\kappa|-\gamma} \leq 1$

$$\int\limits_{|x|}^{1} (1-\tau)^{\gamma-1} \leq (1-|x|)^{\gamma}$$

Таким образом

$$I_2 \leq C(1-|x|)^{\lambda+\gamma-|\kappa|}$$

Лемма доказана.

Лемма 5 . *Пусть* $0<\lambda$, $\gamma = \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m$, λ *и* $\lambda+\gamma$ *- нецелые,* $f(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$. *Тогда, если* $v(x)$ *-решение задачи Дирихле, то функция* $w(x) = B^{-m}[v](x)$ *принадлежит классу* $C^{\lambda+\gamma}(\overline{\Omega})$.

Лемма 5 доказывается последовательным применением леммы 4.

Теорема 6 . *Если* $0<\lambda$, $\gamma = \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m$, λ *и* $\lambda+\gamma$ *- нецелые,* $f(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$. *То решение задачи 1 существует, единственно и принадлежит классу* $C^{\lambda+\gamma}(\overline{\Omega})$.

Теорема 7 . *Если* $0<\lambda$, $\gamma = \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_m$, λ *и* $\lambda+\gamma$ *- нецелые,* $f(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$. *Тогда для разрешимости задачи 2 необходимо и достаточно выполнения условия*

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(x)ds_x = 0$$

Если решение задачи 2 существует, то оно единственно с точностью до постоянной и принадлежит классу $C^{\lambda+\gamma}(\overline{\Omega})$.

Доказательства теорем.

Решение задачи 1. Пусть $u(x)$ - решение задачи 1. Тогда применяя оператор B^m к функции $u(x)$ и обозначив $v(x) = B^m[u](x)$, относительно $v(x)$ получим задачу Дирихле (11). Если $f(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$, то решение задачи Дирихле (11) существует и принадлежит классу $C^{\lambda}(\overline{\Omega})$. Тогда функция $u(x) = B^{-m}[v](x)$ удовлетворяет всем условиям теоермы 6.

Решение задачи 2. Пусть $u(x)$ - решение задачи 2. Тогда применяя оператор B_*^m к функции $u(x)$ и обозначив $v(x) = B_*^m[u](x)$, относительно $v(x)$ получим задачу Дирихле (11) с условием $v(0) = 0$. Если $u(x)$ - решение задачи Дирихле (11), то условие $v(0) = 0$ эквивалентно условию $\int\limits_{\partial\Omega} f(x)ds_x = 0$. При выполнении этого условия функция $u(x) = B^{-m}[v](x)+$С удовлетворяет всем условиям теоермы 7.

Список литературы

[1] *Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. М. Физматлит., 2003г.- 272 стр*

[2] *Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.М: "Мир".1974.- 333 с.*

[3] *БариН.К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.*

[4] *Баврин И.И. Операторы для гармонических функций и их приложения. //Дифференциальные уравнения. 1985. т.21.№1.С.9-15.*

[5] *Карачик В.В,Турметов Б.Х. Об одной задаче для гармонического уравнения. //Изв. АН Уз ССР сер.Физ.-мат.наук 1990 . № 4, С.17-21*

[6] *Турметов Б.Х. Об одной краевой задаче для гармонического уравнения. // Дифференциальные уравнения . Минск 1996.т.32,№8, С.1089-1092.*

[7] *Турметов Б.Х. О гладкости решения одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка. Труды Математики Новосибирск.2004.т.7.№1.с.189-199.*

[8] *Турметов Б.Х., Ильясова М.Т. Об одной краевой задаче для уравнения Пуассона с граничным оператором дробного порядка в смысле Адамара-Маршо. Вестник ЕНУ. Серия "Естественно-технических наук ". 2009.№4.с.6-15.*

[9] *Алимов Ш.А. Об одной задаче с наклонной производной. //Дифференциальные уравнения . 1981. т.17.№10.С.1738-1751.*