Вольтерровость задачи с условием Бицадзе-Самарского для смешанного парболо-гиперболического уравнения третьего порядка

Б.Э. Эшматов, Д.С. Мамутова
Каршинский инженерно-экономический институт, Карши, Узбекистан
e-mail: dariya_mamyt@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена доказательству вольтерровости задачи с условием Бицадзе-Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка.

В теории краевых задач для дифференциальных уравнений, известно, что отличие задач типа Бицадзе-Самарского [1] от других классических задач состоит в том, что граничные значения искомого решения повторяются во внутренних точках области, где искомая функция удовлетворяет уравнению.

В математической научной литературе имеется многочисленные работы, посвященные задачам типа Бицадзе-Самарского, в основном, для уравнений второго порядка. Аналогичные задачи для уравнений высокого, в частности, третьего порядка изучены сравнительно мало.

В связи с этим возникают естественные вопросы: как сформулировать задачи типа Бицадзе-Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка и существует ли среди таких задач вольтерровые задачи?

Вольтерровость одного класса задач с условиями типа Бицадзе-Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения второго порядка с нехарактеристической линией изменения типа исследованы в работах [2], [3].

Данная работа посвящена изучению одной задачи с условием типа Бицадзе-Самарского для смешанного парболо-гиперболического уравнения третьего порядка с двумя независимыми переменными.

Основным результатом работы является доказательство вольтерровости сформулированной выше задачи для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка.

Рассмотрим уравнение

$$Lu = f\left(x, y\right), \tag{1}$$

где

$$Lu = \frac{\partial}{\partial x} lu = \frac{\partial}{\partial x} \begin{cases} u_x - u_{yy}, & y > 0, \\ u_{xx} - u_{yy}, & y < 0 \end{cases}$$

в конечной односвязной области Ω плоскости независимых переменных x и y, ограниченной при $y > 0$ отрезками AA_0, A_0B_0, BB_0 прямых $x = 0$, $y = 1$, $x = 1$ соответственно, а при $y < 0$ – характеристиками $AC : x + y = 0$ и $BC : x - y = 1$ уравнения (1).

Пусть гладкая кривая AD : $y = -\gamma(x)$, $0 \leq x \leq l$, где $0,5 < l < 1$; $\gamma(0) = 0$, $l + \gamma(l) = 1$ расположена внутри характеристического треугольника $0 \leq x + y \leq x - y \leq$ ≤ 1. Относительно кривой AD всюду в дальнейшем предположим, что $\gamma(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция и функции $x-\gamma(x)$ и $x+\gamma(x)$ монотонно возрастают;

$$0<\gamma'(0)<1, \quad \gamma(x)>0, \quad x>0.$$

В области Ω рассматривается нелокальная задача для уравнения (1), где в гиперболической части смешанной области условие Бицадзе-Самарского поточено связывает значения касательной производной искомого решения на характеристике AC с производными по направлении характеристики AC искомой функции на произвольной кривой AD, лежащей внутри характеристического треугольника ABC, с концами в начале координат и на характеристике BC (в точке D).

Задача А. Найти решения уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям

$$u\Big|_{AA_0\cup A_0B_0}=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AA_0\cup AC}=0, \tag{3}$$

$$[u_x-u_y][\theta_0\,(t)]+\mu\,(t)\,[u_x-u_y][\theta^*\,(t)]=0, \tag{4}$$

где n – внутренняя нормаль, $\theta_0(t)\,(\theta^*(t))$ – аффикс точки пересечения характеристики AC (кривой AD) с характеристикой выходящей из точки $(t,0)$ $0<t<1$, $\mu(t)$ – заданная функция.

Вольтерровость аналога задачи Трикоми (задача в случае, когда $\mu(t)\equiv 0$) для уравнения (1) доказана в работе [4].

Функцию u из класса $C^1\left(\bar{\Omega}\right)$ будем называть *р е г у л я р н ы м* решением задачи A если она обладает непрерывными производными, входящими в уравнение (1) в областях Ω_0 и Ω_1, и в этих областях удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (2) – (4).

Здесь $\Omega_0=\Omega\cap\{y>0\},\Omega_1=\Omega\cap\{y<0\}$.

Через $W_2^{2,1}\,(\Omega)$ – обозначим пространство С.Л. Соболева с нормой

$$||u||_{2,1}^2=\iint\limits_{\Omega}[|u|^2+|u_x|^2+|u_y|^2+|u_{xx}|^2]dxdy,$$

$W_2^{0,0}\,(\Omega)\equiv L_2(\Omega)$ пространство квадратно суммируемых в Ω функций.

Теорема 1. Пусть $\mu(t)\in C^2[0,1]$ и $\mu(t)\neq -1, 0\leq t\leq 1$. Тогда для любой функции $f(x,y)\in C^1\left(\bar{\Omega}\right)$, $f\,(A)=0$ существует единственное регулярное решение задачи A и оно удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{2,1}\leq c\|f\|_{0,0} \tag{5}$$

и представимо в виде

$$u\,(x,y)=\iint\limits_{\Omega}K\,(x,y;x_1,y_1)\,f\,(x_1,y_1)\,dx_1dy_1, \tag{6}$$

где $K(x,y;x_1,y_1)\in L_2(\Omega)$, – здесь и далее означает положительные, вообще говоря, разные постоянные,

$$K(x,y;\ x_1y_1)=\theta(x-x_1)[\theta(y)K_0(x,y;x_1,y_1)+\theta(-y)K_1(x,y;x_1,y_1)]\,, \tag{7}$$

где

$$K_0\left(x,y;x_1,y_1\right)=\theta(y_1)\Bigg\{\bar{G}(x-x_1,y,y_1)+$$

$$+\int\limits_{x_1}^{x}\bar{G}_{y_1}(x-t,y,0)\left[\bar{G}_y(t-x_1,0,y_1)+\int\limits_{x_1}^{t}\Gamma(t-z)\bar{G}_y(z-x_1,0,y_1)dz\right]dt\Bigg\}+$$

$$+\theta(-y_1)\theta(x-x_1+y_1)\cdot\int\limits_{x_1-y_1}^{x}\bar{G}_{y_1}(x-t,y,0)\Bigg\{\frac{\theta\left(y_1+\frac{x}{2}\right)+\mu(t)\theta\left(y_1+\frac{x}{2}-\frac{\lambda(x)}{2}\right)}{1+\mu(t)}+$$

$$+\int\limits_{x_1-y_1}^{t}\frac{\Gamma(t-z)\left[\theta\left(y_1+\frac{x}{2}\right)+\mu(z)\theta\left(y_1+\frac{x}{2}-\frac{\lambda(x)}{2}\right)\right]}{1+\mu(z)}dz\Bigg\}dt,$$

$\theta(y)=1$ если $y>0$ и $\theta(y)=0$ если $y<0$,

$$\bar{G}\left(x-x_1,y,y_1\right)=\int\limits_{x_1}^{x}G\left(t-x_1,y,y_1\right)dt,$$

где $G\left(x,y,y_1\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi x}}\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty}\left[e^{-\dfrac{\left(y-y_1+2n\right)^2}{4x}}-e^{-\dfrac{\left(y+y_1+2n\right)^2}{4x}}\right]$ – функция Грина первой начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности в квадрате ABA_0B_0.

$$\Gamma(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^n k_n(x),\ \ k_1(x)=k(x),\ \ k_{n+1}(x)=\int\limits_{0}^{x}k_1(x-t)k_n(t)dt,$$

$$k\left(x\right)=\left(\pi x\right)^{-\frac{1}{2}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\exp\left(-\frac{n^2}{x}\right),$$

$\xi=\lambda(\eta)$, $0\leq\eta\leq1$ уравнение кривой AD в характеристических переменных $\xi=x+y$, $\eta=x-y$.

$$K_1\left(x,y;x_1,y_1\right)=\theta(-y)\Bigg\{\theta(y_1)\theta(\xi-x_1)\int\limits_{x_1}^{\xi}\Gamma_1(\xi-t)\bar{G}_y(t-x_1,0,y_1)dt+$$

$$+\theta(-y_1)\Bigg[\theta\left(y_1+\frac{\xi}{2}\right)\theta(\xi-x_1+y_1)\int\limits_{x_1-y_1}^{\xi}\frac{\Gamma_1(\xi-t)}{1+\mu(t)}dt+$$

$$+\theta(x-x_1+y_1)\int\limits_{0}^{\xi}\theta\left(y_1+\frac{t}{2}-\frac{\lambda(t)}{2}\right)\frac{\mu(t)\Gamma_1(\xi-t)}{1+\mu(t)}dt+$$

$$+\theta(x-x_1)\theta(\xi-x_1-y_1)\theta(\eta-x_1+y_1)K_{22}\left(x,y;x_1,y_1\right)\Big]\Big\}.$$

Здесь $K_{22}\left(x,y;x_1,y_1\right)=\begin{cases} K_{11}\left(x,y;x_1,y_1\right), & \text{если} \quad x+3y>0, \\ K_{12}\left(x,y;x_1,y_1\right), & \text{если} \quad x+3y<0. \end{cases}$

Ядра $K_{11}\left(x,y;x_1,y_1\right)$ и $K_{12}\left(x,y;x_1,y_1\right)$ определяются из следующих выражений:

$$2\iint\limits_{\Omega_1}\theta(x-x_1)\theta(\xi-x_1-y_1)\theta(\eta-x_1+y_1)K_{11}(x,y;x_1,y_1)f(x_1,y_1)dx_1dy_1=$$

$$=\left\{\int\limits_{-\frac{\eta}{2}}^{-\frac{\xi}{2}}dy_1\int\limits_{-y_1}^{\eta+y_1}\left(\int\limits_{x_1+y_1}^{\eta+2y_1}\frac{1+\mu\left(t-2y_1\right)\theta\left(t-\lambda(t-2y_1)\right)}{1+\mu\left(t-2y_1\right)}dt\right)+\right.$$

$$+\int\limits_{-\frac{\xi}{2}}^{\frac{\xi-\eta}{2}}dy_1\left[\int\limits_{-y_1}^{\xi+y_1}\left(\int\limits_{\xi+2y_1}^{\eta+2y_1}\frac{1+\mu\left(t-2y_1\right)\theta\left(t-\lambda(t-2y_1)\right)}{1+\mu\left(t-2y_1\right)}dt\right)+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{\xi+y_1}^{\eta+y_1}\left(\int\limits_{x_1+y_1}^{\eta+2y_1}\frac{1+\mu\left(t-2y_1\right)\theta\left(t-\lambda(t-2y_1)\right)}{1+\mu\left(t-2y_1\right)}dt\right)\right]+$$

$$+\int\limits_{\frac{\xi-\eta}{2}}^{0}dy_1\left[\int\limits_{-y_1}^{\xi+y_1}\left(\int\limits_{\xi+2y_1}^{\xi}\frac{1+\mu\left(t-2y_1\right)\theta\left(t-\lambda(t-2y_1)\right)}{1+\mu\left(t-2y_1\right)}dt\right)+\right.$$

$$\left.\left.+\int\limits_{\xi+y_1}^{\xi-y_1}\left(\int\limits_{x_1+y_1}^{\xi}\frac{1+\mu\left(t-2y_1\right)\theta\left(t-\lambda(t-2y_1)\right)}{1+\mu\left(t-2y_1\right)}dt\right)\right]\right\}f(x_1,y_1)dx_1,$$

$$2\iint\limits_{\Omega_1}\theta(x-x_1)\theta(\xi-x_1-y_1)\theta(\eta-x_1+y_1)K_{12}(x,y;x_1,y_1)f(x_1,y_1)dx_1dy_1=$$

$$=\left\{\int\limits_{-\eta/2}^{\frac{\xi-\eta}{2}}dy_1\int\limits_{-y_1}^{\eta+y_1}\left(\int\limits_{x_1+y_1}^{\eta+2y_1}\frac{1+\mu\left(t-2y_1\right)\theta\left(t-\lambda(t-2y_1)\right)}{1+\mu\left(t-2y_1\right)}dt\right)+\right.$$

$$+\int\limits_{\frac{\xi-\eta}{2}}^{-\xi/2}dy_1\int\limits_{-y_1}^{\xi-y_1}\left(\int\limits_{x_1+y_1}^{\xi}\frac{1+\mu\left(t-2y_1\right)\theta\left(t-\lambda(t-2y_1)\right)}{1+\mu\left(t-2y_1\right)}dt\right)+$$

$$+\int\limits_{-\xi/2}^{0}dy_1\left[\int\limits_{-y_1}^{\xi+y_1}\left(\int\limits_{\xi+2y_1}^{\xi}\frac{1+\mu\left(t-2y_1\right)\theta\left(t-\lambda(t-2y_1)\right)}{1+\mu\left(t-2y_1\right)}dt\right)+\right.$$

$$+\int\limits_{\xi+y_1}^{\xi-y_1}\left(\int\limits_{x_1+y_1}^{\xi}\frac{1+\mu\left(t-2y_1\right)\theta\left(t-\lambda(t-2y_1)\right)}{1+\mu\left(t-2y_1\right)}dt\right)\Bigg]\Bigg\}f(x_1,y_1)dx_1.$$

Отметим что теорема 1 доказано в работе [5], здесь мы лишь уточняем оценку (5).

Через W обозначим множество функций из класса

$$u\in C^1\left(\bar{\Omega}\right),u_{xx},u_{xyy}\in C\left(\bar{\Omega}_0\right),u_{xxx},u_{xyy}\in C\left(\bar{\Omega}_1\right),$$

удовлетворяющих условиям (2) – (4).

Функцию $u\in L_2\left(\Omega\right)$ назовем *с и л ь н ы м* решением задачи если существует последовательность функции $\{u_n\}$, $u_n\in W$, такая, что u_n и Lu_n сходятся в $L_2\left(\Omega\right)$ к u и f соответственно.

Т е о р е м а 2. Пусть выполнено условие теоремы 1. Тогда для любой $f\left(x,y\right)\in L_2\left(\Omega\right)$ существует единственное сильное решение задачи . Это решение принадлежит классу $C\left(\bar{\Omega}\right)\cap W_2^{2,1}\left(\Omega\right)$, удовлетворяет неравенству (5) и представимо в виде (6).

Доказательство теоремы 2. Отметим сразу, что в силу результатов теоремы 1 и представлений (6) следует выполнение неравенства (5) при всех $f(x,y)\in L_2(\Omega)$.

Из оценки (5) следует также единственность сильного решения задачи .

В силу плотности в $L_2(\Omega)$ множества

$$C_0^1(\Omega)=\left\{f(x,y):f(x,y)\in C^1(\Omega),\,f|_{\partial\Omega}=\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{\partial\Omega}=\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{\partial\Omega}=0\right\},$$

для любой функции $f\in L_2(\Omega)$ существует последовательность $f_n(x,y)\in C_0^1(\overline{\Omega})$ такая, что $\|f_n-f\|_0\to 0$ при $n\to\infty$.

Через u_n обозначим регулярное решение задачи для уравнения (1) с правой частью $f_n(x,y)$. Из теоремы 1 следует, что $u_n(x,y)\in W$, при всех $f_n\in C_0^1(\overline{\Omega})$.

В силу полноты пространства $L_2(\Omega)$ последовательность f_n будет фундаментальной.

Из линейности уравнения (1) и оценки (5) получаем, что

$$\|u_n-u_m\|_1\leq C\|f_n-f_m\|_0,$$

то есть последовательность $u_n(x,y)$ будет фундаментальной в $W_2^{2,1}(\Omega)$. Принимая во внимание полноту пространства $W_2^{2,1}(\Omega)$ получаем, что существует единственный предел $u\in W_2^{2,1}(\Omega)$ последовательности $\{u_n\}$, который и будет искомым сильным решением задачи для уравнения (1) с павой частью $f\in L_2(\Omega)$. Теорема 2 доказана.

Через $\mathbf{L}$ – обозначим замыкание в пространстве $L_2\left(\Omega\right)$ – дифференциального оператора $\mathbf{L}$, заданного на W, элементы которого удовлетворяют условиям (2) – (4).

Согласно, определению сильного решения задачи A, $u\left(x,y\right)$ - сильное решение задачи A, тогда и только тогда, когда $u\left(x,y\right)\in D(\mathbf{L})$, где $D(\mathbf{L})$ – область определения оператора $\mathbf{L}$.

Из теорем 1 и 2, при выполнении соответствующих условий, следует, что оператор $\mathbf{L}$ – замкнут, и его область определения плотна в $L_2\left(\Omega\right)$; обратный оператор $\mathbf{L}^{-1}$ определен на всем $L_2\left(\Omega\right)$ и вполне непрерывный.

Поэтому возникает естественный вопрос о существовании собственных значении оператора $\mathbf{L}^{-1}$, а следовательно, и задачи A.

Основным результатом работы является следующая теорема об отсутствии собственных значений оператора $\mathbf{L}^{-1}$.

Теорема 3. Пусть $\mu(t) \neq -1, 0 < t < 1$. Тогда задача A является вольтерровой, то есть для любого комплексного числа λ решение уравнения

$$Lu - \lambda u = f(x, y)$$

существует и единственно при всех $f(x, y) \in L_2(\Omega)$.

Доказательство теоремы 3. В силу теоремы 2, обратный оператор $\mathbf{L}^{-1}$ задачи (оператора $\mathbf{L}$) существует определен на всем $L_2(\Omega)$, представим в виде

$$\mathbf{L}^{-1} f(x, y) = \iint\limits_{\Omega} K(x, y; x_1, y_1) f(x_1, y_1) dx_1 dy_1$$

и вполне непрерывен. Поэтому докажем, что $\mathbf{L}^{-1}$ - квазинильпотентный в $L_2(\Omega)$.

Для этого воспользуемся критерием вольтерровости интегральных операторов Б. Нерсесяна [6].

Из (7) нетрудно заметить, что

$$K(x, y; x_1, y_1) = 0, \quad \text{если} \quad x < x_1.$$

Поэтому, из результатов работы [6] следует, что оператор $\mathbf{L}^{-1}$ не имеет собственных значений и в силу полной непрерывности является вольтерровым.

Отсюда легко следует утверждения теоремы 3.

Теорема 3 доказана.

Список литературы

[1] *Бицадзе А.С., Самарский А.А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // ДАН СССР. -1969. –Т. 185, №4. –С. 739-740.

[2] *Бердышев А.С.* О вольтерровости некоторых задач с условиями типа Бицадзе – Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения. // Сибирский математический журнал. -2005. – Т. 46, №3. –С. 500-510.

[3] *Эшматов Б.Э.* О вольтерровости задачи для параболо-гиперболического уравнения // Узб. матем. журн. -2001. -№1. –С. 73-78.

[4] *Бердышев А.С.* О вольтерровости аналога задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения третьего порядка // Узбекский математический журнал – 1996. №2. –С. 22-31.

[5] *Бердышев А.С., Мырзиярова Н.Ж., Эшматов Б.Э.* Разрешимость задачи типа Бицадзе-Самарского для смешанного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка. Труды института магистратуры и докторантуры КазНПУ имени Абая, выпуск 3, серия “естественные специальности”. Алматы 2010 –С.11-15.

[6] *Нерсесян А.Б.* К теории интегрального уравнений типа Вольтерра // Доклады ФН СССР. -1964. Т. 155, №5. –С. 1049-1051.