# Абсолютная устойчивость регулируемых систем с ограниченными ресурсами в основном случае

*С.А. Айсагалиев, Е.Б. Злобина*
*Институт математики и механики КазНУ им.аль-Фараби,Алматы*
*г.Алматы, ул.Масанчи, 39/47, e-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz*

**Аннотация**

Получен эффективный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных регулируемых систем в основном случае, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы.

**Постановка задачи.** Уравнение движения регулируемых систем в основном случае имеет вид

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \;\; \sigma = Sx, \;\; x(0) = x_0, \; t \in I = [0, \infty), \tag{1}$$

где $A, B, S$ — постоянные матрицы порядков $n{\times}n$, $n{\times}1$, $1{\times}n$, соответственно, матрица $A$ – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A){<}0$, $j{=}\overline{1,n}$, $\lambda_j(A)$ $j{=}\overline{1,n}$ – собственные значения матрицы $A$.

Нелинейная система автоматического управления с уравнением (1) называется системой с ограниченным ресурсом, если функция

$$\varphi(\sigma){\in}\Phi_0{=}\{\varphi(\sigma){\in}C(R^1, R^1)/0{\le}\varphi(\sigma)\sigma{<}\mu_0\sigma^2, \forall\sigma, \sigma{\in}R^1, \varphi(0){=}0, |\varphi(\sigma)|{\le}\varphi_*{<}\infty\}. \tag{2}$$

Все на практике встречающиеся системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами.

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_*{+}B\varphi(\sigma_*){=}0$, $\sigma_*{=}Sx_*$. Так как $A$ — гурвицева матрица, то $x_* = -A^{-1}B\varphi(\sigma_*)$, $\sigma_* = -SA^{-1}B\varphi(\sigma_*)$, где $\varphi(0){=}0$ только при $\sigma{=}0$. Отсюда следует, что система (1), (2) имеет единственное положение равновесия ($x_* = 0, \sigma_* = 0$), если $SA^{-1}B \neq 0$. Положение равновесия $x_* = 0$ системы (1), (2) называется абсолютно устойчивым, если 1) матрицы $A, A + B\mu S$, $0 < \mu < \bar{\mu}_0$, $\mu_0 \le \bar{\mu}_0$ — гурвицевы; 2) для всех $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ решение системы (1) обладает свойством $x(t; 0, x_0, \varphi) \to 0$ при $t \to \infty$, $\forall x_0$, $|x_0| < \infty$.

Элементы матриц $A$, $B$, $S$ и величина $\mu_0$ называются конструктивными параметрами системы автоматического управления. Критерием абсолютной устойчивости системы (1), (2) называются соотношения связывающие конструктивные параметры системы, при выполнении которых положение равновесия $x_* = 0$ абсолютно устойчиво.

Ставится задача: Найти новый эффективный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия $x_* = 0$ системы (1), (2), который выделяет в пространстве конструктивных параметров системы область шире, чем известные критерии.

Существуют метод А.И. Лурье [1], метод В.М. Попова [2] для получения критериев абсолютной устойчивости. Связь между этими методами установлена в работах В.А.Якубовича [3] и его учеников [4]. В работах [5,6] предложены алгебраические критерии абсолютной устойчивости на основе частотного критерия. Эти критерии могут быть применены и к исследованию системы с ограниченными ресурсами. Однако их проверка чрезвычайно сложна. Поэтому разработка новых эффективных методов исследования абсолютной устойчивости являются актуальными.

В работах [7-12] приведены результаты исследования абсолютной устойчивости регулируемых систем на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Данная работа является продолжением этих исследований и направлена на использование дополнительных условий, позволяющих получить более эффективные критерии. На примере показано, что предлагаемый критерий дает необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости.

**Неособое преобразование.** Для простоты проверки предлагаемого критерия абсолютной устойчивости целесообразно преобразовать исходное уравнение движения (1).

Характеристический полином матрицы $A$ имеет вид

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0,$$

где $I_n$ — единичная матрица порядка $n \times n$, $a_i$, $i = \overline{0,n}$ — известные числа. Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли $\Delta(A) = 0$. Тогда

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_1 A - a_0 I_n.$$

**Лемма 1** . *Пусть вектор-строка $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ такой, что*

$$\theta B = 0,\ \theta AB = 0, \theta A^2 B = 0, \ldots, \theta A^{n-2}B = 0, \theta A^{n-1}B \neq 0, \tag{3}$$

*Тогда уравнения движения системы (1) может быть представлено в виде*

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \ldots, \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ &\dot{y}_n = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - a_{n-1}y_n + \theta A^{n-1}B\varphi(\sigma), \end{aligned} \tag{4}$$

*где $y_1 = \theta x$, $y_2 = \theta Ax$, $\ldots$, $y_n = \theta A^{n-1}x$, $x = x(t)$, $y_i = y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$.*

**Доказательство.** Рассмотрим первое уравнение из (1). Умножая слева на $\theta$ системы имеем

$$\theta\dot{x} = \theta Ax + B\varphi(\sigma) = \theta Ax,\ \ \theta x(0) = \theta x_0,\ t \in I, \tag{5}$$

в силу равенства $\theta B = 0$, где $\theta\dot{x} = \theta\dot{x}(t) = y_1(t)$, $\theta Ax(t) = y_2(t)$, $t \in I$. Дифференцируя по $t$ тождество (5) получим $\theta\ddot{x} = \theta A\dot{x} = \dot{y}_2 = \theta A[AxB\varphi(\sigma)] = \theta A^2 = y_3$, $t \in I$, $y_2(0) = \theta Ax_0$, где $\theta AB = 0$. Аналогичным путем получим следующую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{y}_3 = \theta\dddot{x} = \theta A^2\dot{x} = \theta A^3 x = y_4, \ldots, \dot{y}_{n-1} = \theta A^{n-2}\dot{x} = \theta A^{n-1}x = y_n,$$

$$\dot{y}_n = \theta A^{n-1}\dot{x} = \theta A^n x + \theta A^{n-1}B\varphi(\sigma) = -a_{n-1}y_n - \ldots - a_0 y_1 + \theta A^{n-1}B\varphi(\sigma).$$

Лемма доказана.

**Лемма 2** . *Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$R = \|\theta^*, A^*\theta^*, \ldots, A^{*n-1}\theta^*\| \tag{6}$$

*порядка $n \times n$ равен $n$. Тогда:*

*1) существует вектор-строка $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ такой, что*

$$\sigma = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + \ldots + \beta_{n-1}y_n; \tag{7}$$

*2) если $y_1 = \theta x = 0$, $y_2 = \theta Ax = 0, \ldots$, $y_n = \theta A^{n-1}x = 0$, то $x = 0$.*

**Доказательство.** Заметим, что ранг $R = n$ тогда и только тогда, когда векторы $\theta^*$, $A^*\theta^*$, $\ldots$, $A^{*n-1}\theta^*$ — линейно независимы. Поскольку векторы $\theta^*$, $A^*\theta^*$, $\ldots$, $A^{*n-1}\theta^*$ образуют базис в $R^n$, то вектор $S^* \in R^n$ может быть представлен однозначно в виде $S^* = \beta_0\theta^* + \beta_1 A^*\theta^* + \ldots + \beta_{n-1}A^{*n-1}\theta^*$. Тогда $\sigma = Sx = \beta_0\theta x + \beta_1\theta Ax + \ldots + \beta_{n-1}\theta A^{n-1}x = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + \ldots + \beta_{n-1}y_n$. Теперь второе уравнение из (1) запишется в виде (7).

С другой стороны, из (6) следует, что пара управляема. Из управляемости пары $(\theta^*, A^*)$ следует, что равенства $\theta x = 0$, $\theta A x = 0$, $\ldots$, $\theta A_{n-1} x = 0$, влечет за собой $x = 0$. Следовательно, из $y_i = 0$, $i = \overline{1,n}$ следует $x = 0$.

Лемма доказана.

Из лемм 1, 2 следует, что, если выполнены равенства (3) и ранг $R = n$, то система (1) равносильна системе (4), (7). Более того, из $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t) = 0$, $i = \overline{1,n}$ следует $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$.

**Свойства решений.** Можно показать, что решения системы (2), (1), (2), а также системы (4), (7). Эти свойства решений могут быть использованы при оценке несобственных интегралов.

**Теорема 1** . *Пусть матрица $A$ — гурвицева ,т.е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1,n}$, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ и пусть, кроме того, выполнены равенства (3) и ранг $R = n$.*

*Тогда верны оценки*

$$|x(t)| \le c_0, \ \ |\dot{x}(t)| \le c_1, \ \ t \in I, c_0, c_1 = const < \infty, \tag{8}$$

$$|y_i(t)| \le m_{i1}, \ \ |\dot{y}_i(t)| \le m_{i2}, \ \ i = \overline{1,n}, \ t \in I, \tag{9}$$

$$|\sigma(t)| \le c_2, \ |\dot{\sigma}(t)| \le c_3 \ \ \forall t, t \in I, \tag{10}$$

*где $m_{i1} = const < \infty$, $m_{i2} = const < \infty$, $c_i = const < \infty$, $i = 0,1,2,3$. Кроме того, функции $x(t)$, $y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $\sigma(t)$, $t \in I$ — равномерно непрерывны.*

**Доказательство.** Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ следует, что $|\varphi(\sigma(t)| \le \varphi_*$, $0 < \varphi_* < \infty$, $\forall t, t \in I$. Так как матрица $A$ — гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $a = \max\limits_{1\le j\le n} Re\lambda_j(A) < 0$, то $\|e^{At}\| \le ce^{(a+\varepsilon)t}$, $\forall t$, $t \in I$, $c = c(\varepsilon) > 0$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int\limits_0^T e^{A(t-\tau)}B\varphi(\sigma(\tau))d\tau, \ t \in I.$$

Тогда

$$|x(t)| \le \|e^{At}\||x_0| + \int\limits_0^t \|e^{A(t-\tau)}\|\|B\||\varphi(\sigma(\tau))|d\tau \le c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + ce^{(a+\varepsilon)t}\|B\|\varphi_* \int\limits_0^t e^{-(a+\varepsilon)\tau}d\tau =$$

$$= c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + ce^{(a+\varepsilon)t}\|B\|\varphi_* \left[-\frac{1}{a+\varepsilon}e^{-(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon}\right] =$$

$$= c|x_0|e^{(a+\varepsilon)t} + \frac{1}{a+\varepsilon}c\|B\|\varphi_*(-1 + e^{(a+\varepsilon)t}) \le c_0, \forall t, t \in I,$$

где $e^{(a+\varepsilon)t} \le 1, \forall t, t \in I$, $a + \varepsilon < 0$. Отсюда следует ограниченность решения системы (1), (2). Из (1) следует, что

$$|\dot{x}(t)| \le \|A\||x(t)| + |B\||\varphi(\sigma(t))| \le \|A\|c_0 + \|B\|\varphi_* = c_1,$$

$$|\sigma(t)| \le \|S\||x(t)\| \le c_2, \ \ |\dot{\sigma}(t)| \le \|S\||\dot{x}(t)\| \le c_3, \forall t, t \in I.$$

Из ограниченности $\dot{x}(t)$, $\dot{\sigma}(t)$, $t \in I$ следуют их равномерные непрерывности. Так как $y_1 = \theta x$, $y_2 = \theta A x$, $\ldots$, $y_n = \theta A^{n-1} x$, то $|y_1| \le \|\theta\||x| \le \|\theta\|c_0 = m_{11}$, $|y_2| \le \|\theta\|\|A\||x| \le m_{21}$, $\ldots$, $|y_n| \le \|\theta\|\|A^{n-1}\||x| \le m_{n1}$, Из (4) следует $\|\dot{y}_i\| \le m_{i2}$, $i = \overline{1,n}$, $t \in I$. Из ограниченности производных $\dot{y}_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t \in I$ следуют равномерные непрерывности функций $y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t \in I$. Теорема доказана.

**Лемма 3** . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, величина* $\kappa = \theta A^{n-1}B$. *Тогда вдоль решения системы (4), (7), (2) верны тождества*

$$\varphi(\sigma(t)) = \kappa^{-1}\omega + \kappa^{-1}a_0y_1 + \kappa^{-1}a_1y_2 + \ldots + \kappa^{-1}a_{n-1}y_n,\ t \in I, \tag{11}$$

$$\sigma(t) = \beta_0y_1 + \beta_1y_2 + \ldots + \beta_{n-1}y_n,\ t \in I, \tag{12}$$

$$\dot\sigma(t) = \beta_0y_2 + \beta_1y_3 + \ldots + \beta_{n-2}y_n + \beta_{n-1}\omega,\ t \in I, \tag{13}$$

*где* $\omega = \omega(t) = \dot y_n(t)$, $y_i = y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $t \in I$.

**Доказательство.** Если величина $\kappa = \theta A^{n-1}B \neq 0$, то из тождества (4) следует равенство (11) для любого $t \in I$. Тождества (12), (13) следуют из (7), где $\omega = \omega(t) = \dot y_n(t)$, $t \in I$. Лемма доказана.

**Несобственные интегралы.** На основе тождеств (11)-(13) и включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (4), (7), (2).

**Теорема 2** . *Пусть выполнены условия лемм 1-3, матрица A гурвицева, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. *Тогда для любой величины* $\tau$ *вдоль решения системы (4), (7) несобственный интеграл*

$$\begin{gathered} I_1 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\varphi(\sigma(t))\tau\dot\sigma(t)]dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [N_0\omega^2(t) + N_1y_1^2(t) + \ldots + N_ny_n^2(t)]dt + \\ + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt = \lim_{T\to\infty}\int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} \varphi(\sigma)\tau d\sigma < \infty, \end{gathered} \tag{14}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt\right| = \left|\lim_{T\to\infty} F_1(T) - F_1(0)\right| < \infty. \tag{15}$$

**Доказательство.** Для решения системы (4), (7) верны тождества (11)-(13). Произведение

$$\begin{gathered} \varphi(\sigma(t))\tau\dot\sigma(t) = \kappa^{-1}[\omega(t) + a_0y_1(t) + a_1y_2(t) + \ldots + a_{n-1}y_n(t)]\tau\times \\ \times[\beta_{n-1}\omega(t) + \beta_0y_2(t) + \beta_1y_3(t) + \ldots + \beta_{n-2}y_n(t)],\quad t \in I \end{gathered}$$

является квадратичной формой от переменных $\omega, y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Пусть $z(t) = (\omega(t), y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$, $t \in I$. Тогда несобственный интеграл

$$I_1 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T z^*(t)Nz(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} \varphi(\sigma)\tau d\sigma < \infty,$$

где $N$ — постоянная матрица порядка $(n+1)\times(n+1)$. Можно показать, что путем интегрирования по частям несобственный интеграл

$$\begin{gathered} I_1 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T z^*(t)Nz(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [N_0\omega^2(t) + N_1y_1^2(t) + \ldots + N_ny_n^2(t)]dt + \\ + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt, \end{gathered}$$

где $F_1(t), t \in I$ — квадратичная форма относительно переменных $y_1, \ldots, y_n$. Далее, используя оценки (8)-(10) получим соотношения (14), (15). Теорема доказана.

**Теорема 3** . *Пусть выполнены условия лемм 1-3, матрица $A$ — гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой величины $\tau_1 > 0$ вдоль решения системы (4), (7), (2) несобственный интеграл*

$$0 \le I_2 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\varphi(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \varphi(\sigma(t))\mu_0^{-1}\tau_1\varphi(\sigma(t))]dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [M_0\omega^2(t)+$$
$$+M_1y_1^2(t) + \ldots + M_n y_n^(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt, \tag{16}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt\right| = \left|\lim_{T\to\infty} F_2(T) - F_2(0)\right| < \infty. \tag{17}$$

**Доказательство.** Из включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ следует

$$\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu_0, \ \ \frac{\sigma}{\varphi(\sigma)} > \mu_0^{-1}, \ \ \sigma, \sigma \in R^1.$$

Тогда для любой величины $\tau_1>0$ верно неравенство $\varphi(\sigma)\tau_1\sigma>\mu_0^{-1}\tau_1\varphi(\sigma)$, $\forall\sigma$, $\sigma\in R^1$. Отсюда следует, что вдоль решения системы (4), (7), (2) выполняется неравенство

$$\varphi(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \varphi(\sigma(t))\mu_0^{-1}\tau_1\varphi(\sigma(t)) > 0, \sigma(t) \ne 0, \forall t, t \in I, \tag{18}$$

где

$$\varphi(\sigma(t))\mu_0^{-1}\tau_1\varphi(\sigma(t)) = (\omega + a_0y_1 + a_1y_2 + \ldots + a_{n-1}y_n)\kappa^{-1}\tau_1\times$$
$$\times\mu_0^{-1}\kappa^{-1}(\omega + a_0y_1 + a_1y_2 + \ldots + a_{n-1}y_n), t \in I;$$
$$\varphi(\sigma(t))\tau_1\varphi(\sigma(t)) = (\omega + a_0y_1 + a_1y_2 + \ldots + a_{n-1}y_n)\kappa^{-1}\tau_1(\beta_0y_1 + \beta_1y_2 + \ldots + \beta_{n-1}y_n), t \in I,$$

Интегрируя по $t$ неравенство (18) с учетом оценки (8)-(10) получим утверждения теоремы (16), (17), где $F_2(t)$, $t \in I$ — квадратичная форма относительно переменных $y_1$, $y_2$, $\ldots$, $y_n$. Теорема доказана.

**Теорема 4** . *Пусть выполнены условия лемм 1-3, матрица $A$ — гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любых величин $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n$ вдоль решения системы (4), (7), (2) несобственный интеграл*

$$0 \le I_3 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\gamma_0\omega + \gamma_1y_1 + \ldots + \gamma_ny_n]dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\Gamma_0\omega^2(t) + \Gamma_1y_1^2(t) + \ldots +$$
$$+\Gamma_ny_n^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt, \tag{19}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt\right| = \left|\lim_{T\to\infty} F_3(T) - F_3(0)\right| < \infty, \tag{20}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

**Теорема 5** . *Пусть выполнены условия лемм 1-3, матрица $A$ — гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, и пусть, кроме того, существует непрерывная по $\sigma$ функция $\psi(\sigma), \sigma \in R^1$ такая, что $\psi(\sigma(t)) = \alpha_0\omega(t) + \alpha_1 y_1(t) + \ldots + \alpha_n y_n(t)$, $t \in I$, где $\alpha_i$, $i = \overline{0,n}$ — некоторые числа. Тогда вдоль решения системы (2), (4), (7) несобственный интеграл*

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [P_0\omega^2(t) + P_1 y_1^2(t) + \ldots + P_n y_n^2(t)]dt + + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt = = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} \psi(\sigma)d\sigma < \infty, \tag{21}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt\right| = \left|\lim_{T\to\infty} F_4(T) - F_4(0)\right| < \infty. \tag{22}$$

**Доказательство.** Произведение

$$\psi(\sigma(t))\dot\sigma(t) = [\alpha_0\omega(t) + \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \alpha_3 y_3(t)]\times$$
$$\times[\beta_{n-1}\omega(t) + \beta_0 y_2(t) + \beta_1 y_3(t) + \ldots + \beta_{n-2} y_n(t)], t \in I$$

является квадратичной формой от переменных $z = (\omega(t), y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогда

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \psi(\sigma(t))\dot\sigma(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T z^*(t)Pz(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} \psi(\sigma)d\sigma < \infty,$$

где $P$ — постоянная матрица порядка $(n+1)\times(n+1)$. Как в доказательстве теоремы 2 можно показать, что

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T z^*(t)Pz(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [P_0\omega^2(t) + P_1 y_1^2(t) + \ldots + P_n y_n^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt,$$

где второе слагаемое удовлетворяет оценке (22). Отсюда следуют оценки (21), (22). Теорема доказана.

**Теорема 6** . *Пусть выполнены условия лемм 1-3 , матрица $A$ — гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любых величин $h_0, h_1, h_2$ вдоль решения системы (4), (7), (2) несобственный интеграл*

$$0 \le I_5 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [h_0\dot\sigma(t) + h_1\sigma(t) + h_2\varphi(\sigma(t))]^2 dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [H_0\omega^2(t) + H_1 y_1^2(t) + + \ldots + H_n y_n^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_5(t)\right]dt, \tag{23}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_5(t)\right]dt\right| = |\lim_{T\to\infty} F_5(T) - F_5(0)| < \infty. \tag{24}$$

**Доказательство.** Как следует из тождеств (11)-(13) сумма

$$h_0\dot{\sigma}(t)+h_1\sigma(t)+h_2\varphi(\sigma(t))=h_0[\beta_0y_2(t)+\beta_1y_3(t)+\ldots+\beta_{n-2}y_n(t)+\beta_{n-1}\omega(t)]+$$

$$+h_1[\beta_0y_1(t)+\beta_1y_2(t)+\ldots+\beta_{n-1}y_n(t)]+h_2\kappa^{-1}[\omega(t)+a_0y_1(t)+\ldots+a_{n-1}y_n(t)],t\in I.$$

Тогда $[h_0\dot{\sigma}(t)+h_1\sigma(t)+h_2\varphi(\sigma(t))]^2$ является квадратичной формой относительно переменных $\omega(t)$, $y_1$, $\ldots$, $y_n$. Далее, интегрируя по частям по $t$ данную квадратичную форму, с учетом (8)-(10) получим оценки (23), (24). Теорема доказана.

**Абсолютная устойчивость.** На основе результатов изложенных выше могут быть сформулированы критерии абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

**Теорема 7** . *Пусть выполнены следующие условия:*
*1) матрицы $A, A+B\mu S$, $0\leq\mu<\bar{\mu}_0$, $\mu_0<\bar{\mu}_0$ — гурвицевы, функция $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$;*
*2) существует вектор-строка $\theta=(\theta_1,\ldots,\theta_n)$ такой,что $\theta B=0$, $\theta AB=0$, $\ldots$, $\theta A^{n-2}B$ величина $\kappa=\theta A^{n-1}B\neq 0$;*
*3)ранг матрицы $R=\|\theta^*,A^*\theta^*,\ldots,A^{*n-1}\theta^*\|$ равен $n$;*
*4) выполнены равенства $M_0+\Gamma_0=N_0$, $M_i+\Gamma_i=N_i$, $i=\overline{1,n}$.*
*Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.*

**Доказательство.** При выполнении условий 1)-3) теоремы, верны утверждения теорем 2-4. Как следует из условия 4) теоремы выполнено равенство

$$0\leq I_2+I_3=I_1+R_1,R_1=\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\left[\frac{d}{dt}(F_2+F_3-F_1)\right]dt,$$

где $|R_1|<\infty, I_2\geq 0, I_3\geq 0$,

$$I_1=\lim_{T\to\infty}\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(T)}\varphi(\sigma)\tau d\sigma<\infty.$$

Тогда $0\leq I_2\leq I_2+I_3=I_1+R_1<\infty$. Следовательно,

$$0\leq I_2=\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\left[\varphi(\sigma(t))\tau_1\sigma(t)-\varphi(\sigma(t))\mu_0^{-1}\tau_1\varphi(\sigma(t))\right]dt<\infty,$$

где $I_2>0$ при $\sigma(t)\not\equiv 0, t\in I$. Отсюда следует, что

$$0<I_2=\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T V(\sigma(t))dt<\infty, V(\sigma(t))>0, V(0)=0, \qquad (25)$$

где функция $V(\sigma(t))=\varphi(\sigma(t))\tau_1\sigma(t)-\varphi(\sigma(t)), t\in I$.

Как следует из леммы 3 функции $y_i(t)$, $i=\overline{1,n}, \sigma(t), t\in I$ — равномерно непрерывные функции. Из (25) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t)=0$. Так как $\varphi(0)=0$, то $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(\sigma(t))=0$.

Теперь рассмотрим уравнения движения (4). Так как исследуемая система автономна, т.е. свойства решения системы не зависят от начала отсчета времени, $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(\sigma(t))=0$, то при $t\to\infty$ функции $y_i(t), i=\overline{1,n}$ удовлетворяют уравнениям

$$\dot{y}_1=y_2,\dot{y}_2=y_3,\ldots,\dot{y}_{n-1}=y_n,\dot{y}_n=-a_0y_1-a_1y_2-\ldots-a_{n-1}y_n.$$

Заметим, что $\ddot{y}_1 = \dot{y}_2 = y_3$, $\dddot{y}_1 = \dot{y}_3 = y_4, \ldots, y_1^{(n-1)} = y_n$, $y_1^{(n)} = \dot{y}_n$. Тогда

$$y_1^{(n)} = -a_0 y_1 - a_1 \dot{y}_1 - \ldots - a_{n-1} y_1^{(n-1)}, \tag{26}$$

где $a_i, i = \overline{1,n}$ — коэффициенты характеристического полинома матрицы $A$. Поскольку матрица $A$ — гурвицева, то из (26) следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} y_1(t) = 0$. Так как $\dot{y}_1(t) = y_2$, где $y_2(t)$ — равномерно непрерывная функция, то $\dot{y}_1(t), t \in I$ — равномерно непрерывная функция. Тогда согласно лемме Барбалата [2] предел $\lim\limits_{t\to\infty} y_1(t) = 0$ влечет за собой $\lim\limits_{t\to\infty} \dot{y}_1(t) = 0$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} y_2(t) = 0$. Так как $\dot{y}_2(t) = y_3(t)$, где $y_3(t)$ — равномерно непрерывная функция, то $\lim\limits_{t\to\infty} y_2(t) = 0$ влечет за собой $\lim\limits_{t\to\infty} y_3(t) = 0$ и так далее, $\lim\limits_{t\to\infty} y_n(t) = 0$.

Таким образом, пределы

$$\lim_{t\to\infty} y_1(t) = \lim_{t\to\infty} \theta x(t) = 0, \lim_{t\to\infty} y_2(t) = \lim_{t\to\infty} \theta A x(t) = 0, \ldots, \lim_{t\to\infty} y_n(t) = \lim_{t\to\infty} \theta A^{n-1} x(t) = 0.$$

Тогда согласно утверждению леммы 2, функция $x(t) = x(t; 0, x_0, \varphi) \to 0$ при $t \to \infty$. Из условия 1) теоремы, а также $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; 0, x_0, \varphi) = 0, \forall x_0, |x_0| < \infty, \forall \varphi, \varphi \in \Phi_0$ следует, что положение равновесия $x_* = 0$ системы (1), (2) абсолютно устойчиво. Теорема доказана.

**Теорема 8** . *Пусть выполнены условия 1)-3) теоремы 7, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$M_0 + \Gamma_0 = N_0 + P_0, \;\; M_i + \Gamma_i = N_i + P_i, \;\; i = \overline{1,n}. \tag{27}$$

*Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.*

**Доказательство.** Если выполнено равенство (26), то верно равенство

$$0 \le I_2 + I_3 = I_1 + I_4 + R_2, \;\; R_2 = \int_0^T \left[ \frac{d}{dt}(F_2 + F_3 - F_1 - F_4) \right] dt,$$

где $|R_2| < \infty, I_2 \ge 0, I_3 \ge 0, I_1 < \infty, I_4 < \infty$. Следовательно, $0 < I_2 \le I_2 + I_3 = I_1 + I_4 + R_2 < \infty$. Далее, повторяя доказательство теоремы 7, получим утверждение теоремы 8. Теорема доказана.

**Теорема 9** . *Пусть выполнены условия 1)-3) теоремы 7, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$\Gamma_0 + H_0 = N_0 + P_0, \;\; \Gamma_i + H_i = N_i + P_i, \;\; i = \overline{1,n}, \tag{28}$$

*функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ — равномерно непрерывна.*

*Тогда*

$$\lim_{T\to\infty} [h_0 \dot{\sigma}(t) + h_1 \sigma(t) + h_2 \varphi(\sigma(t))] = 0. \tag{29}$$

*Если, кроме того, решение системы*

$$h_0 \dot{z} + h_1 z + h_2 \varphi(z) = 0, t \in I \tag{30}$$

*абсолютно устойчиво, то положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.*

**Доказательство.** Как следует из условия (28), верно равенство

$$0 \le I_3 + I_5 = I_1 + I_4 + R_3, \;\; R_3 = \int\limits_0^T \left[ \frac{d}{dt}(F_3 + F_5 - F_1 - F_4) \right] dt,$$

где $|R_3| < \infty, I_1 < \infty, I_4 < \infty, I_3 \ge 0, I_5 \ge 0$. Тогда $0 \le I_5 \le I_3 + I_5 = I_1 + I_4 + R_3 < \infty$. Следовательно,

$$0 \le I_5 = \lim_{T \to \infty} \int\limits_0^T \left[ h_0 \dot\sigma(t) + h_1 \sigma(t) + h_2 \varphi(\sigma(t)) \right] dt = 0. \qquad (31)$$

где $h_0 \dot\sigma(t) + h_1 \sigma(t) + h_2 \varphi(\sigma(t))$, $t \in I$ — равномерная непрерывная функция.

Из (31) следует равенство (29). Пусть $z(t), t \in I$ — решение дифференциального уравнения (30). Тогда $\sigma(t) \to z(t)$ при $t \to \infty$. По условию теоремы решение уравнения (30) абсолютно устойчиво. Следовательно, $z(t) \to 0$ при $t \to \infty$, $\varphi(z(t)) \to \varphi(0) = 0$ при $t \to \infty$. Далее, повторяя доказательство теоремы 7, получим утверждение теорем.

Теорема 7-9 являются частными случаями следующей теоремы.

**Теорема 10** . *Пусть выполнены условия 1)-3) теоремы 7, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$M_0 + \Gamma_0 + H_0 = N_0 + P_0, \;\; M_0 + \Gamma_i + H_i = N_i + P_i, \;\; i = \overline{1, n}. \qquad (32)$$

*Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.*

**Доказательство.** Можно показать, что при выполнении условия (32) выполняется равенство

$$0 \le I_2 + I_3 + I_5 = I_1 + I_4 + R_4, \;\; R_4 = \int\limits_0^T \left[ \frac{d}{dt}(F_2 + F_3 + F_5 - F_1 - F_4) \right] dt,$$

где $|R_4| < \infty, I_2 \ge 0, I_3 \ge 0, I_5 \ge 0, I_1 < \infty, I_4 < \infty$. Тогда $0 \le I_2 \le I_2 + I_3 + I_5 = I_1 + I_4 + R_4 < \infty$. Далее, повторяя доказательство теоремы 7, получим утверждение теорем. Теорема доказана.

Из теорем 10, в частности, следует: 1) если $h_0 = 0, h_1 = 0, u_2 = 0, \tau_2 = 0$, то утверждение теоремы 7; 2) если $h_0 = 0, h_1 = 0, h_2 = 0$, то утверждение теоремы 8; 3) если $\tau_1 = 0$, функция $\varphi(\sigma)$ — равномерно непрерывна, то утверждение теоремы 9.

**Пример.** Пусть уравнения движения системы имеет вид

$$\begin{array}{l} \dot x_1 = x_1 + x_2, \dot x_2 = -2x_1 - 1,03x_2 - 0,03x_3 - 0,75\varphi(\sigma), \\ \dot x_3 = -0,01x_2 - 1,01x_2 - 0,25\varphi(\sigma), \sigma = x_2 + x_3, \end{array} \qquad (33)$$

где функция

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{ \varphi(\sigma) \in C(R^1, R^1) / 0 \le \varphi(\sigma)\sigma < \mu_0 \sigma^2, \varphi(0) = 0, |\varphi(\sigma)| \le \varphi_* \}. \qquad (34)$$

Для данного примера матрица $A$, векторы $B, S$ равны:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1,03 & -0,03 \\ 0 & -0,01 & -1,01 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ -0,75 \\ -0,25 \end{pmatrix}, S = (0, 1, 1), m = 1, n = 3.$$

I. Ниже приведены результаты применения теоремы 7.

1) Характеристические уравнение матрицы $A$ равно

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = |\lambda I_3 - A| = \lambda^3 + 1,04\lambda^2 + \lambda + 0,98 = 0.$$

Так как все коэффициенты характеристического полинома больше нуля и $1,04 > 0,98$, то матрица $A$ — гурвицева.

Характеристическое уравнение матрицы $A + B\mu S$ равно

$$\Delta_1(\lambda) = |\lambda I_3 - A - B\mu S| = \lambda^3 + (1,04 + \mu)\lambda^2 + \lambda + (0,98 - 0,5\mu) = 0.$$

Матрица $A + B\mu S$ — гурвицева, если $0 \le \mu < 1,96$. Тогда $\overline{\mu}_0 = 1,96$.

2) Пусть $\theta = (\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Тогда $\theta B = -0,75\theta_2 - 0,25\theta_3 = 0$ если, $\theta_3 = -3\theta_2$. Теперь вектор $\theta = (\theta_1, \theta_2, -3\theta_2)$ удовлетворяет условию $\theta B = 0$. Выберем $\theta_1, \theta_2$ из условия $\theta AB = 0$. Так как $\theta A = (\theta_1 - 2\theta_2, \theta_1 - \theta_2, 3\theta_2)$, то $\theta AB = -0,75\theta_1 = 0$. Следовательно, $\theta_1 = 0$. Тогда вектор $\theta = (0, \theta_2, -3\theta_2)$ удовлетворяет условиям $\theta B = 0$, $\theta AB = 0$.

Вычислим $\theta A^2 = (0, -1, -3)\theta_2, \theta A^2 B = 1,5\theta_2 \neq 0$.

Таким образом при $\theta_2 = 1$, имеем: $\theta = (0; 1; -3)$, $\theta A = (-2; -1; 3)$, $\theta A^2 = (0; -1; -3)$, $\theta A^2 B = 1,5 \neq 0$.

3) Матрица

$$R = \|\theta^*, A^*\theta^*, A^{*2}\theta^*\| = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 3 & -3 \end{pmatrix}, |R| = -12 \neq 0.$$

Следовательно, ранг матрицы $R$ равен $n = 3$. Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли $\Delta(A) = 0$. Тогда $A^3 = -1,04A^2 - A - 0,98I_3$. Отсюда следует, что $a_0 = -0,98$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1,04$.

Тогда уравнение движения (4) имеет вид

$$\dot{y}_1 = y_2,\ \dot{y}_2 = y_3,\ \dot{y}_3 = -0,98y_1 - y_2 - 1,04y_3 + \kappa\varphi(\sigma), \tag{35}$$

где $\kappa = 1,5$. Вектор - строку $S$ представим в виде $S = \beta_0\theta + \beta_1\theta A + \beta_2\theta A^2$. Отсюда находим $\beta_0 = \frac{1}{3}$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -\frac{2}{3}$. Так как $y_1 = \theta x$, $y_2 = \theta Ax$, $y_3 = \theta A^2 x$, то

$$\sigma = Sx = \beta_0\theta x + \beta_1\theta Ax + \beta_2\theta A^2 x = \frac{1}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_3. \tag{36}$$

Исследуем абсолютную устойчивость положения равновесия системы (35), (36) с нелинейностью $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$.

4) Вычислим несобственные интегралы $I_1$, $I_2$, $I_3$ с целью найти величины $M_0$, $M_1$, $M_2$, $M_3$, $\Gamma_0$, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$, $N_0$, $N_1$, $N_2$, $N_3$.

Вычислим $I_1$. Произведение $\varphi(\sigma(t))\tau\dot{(\sigma)}(t) = \tau\left(\frac{2}{3}\omega + \frac{1,96}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 + \frac{2,08}{3}y_3\right)\left(\frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}\omega\right)$, где $\omega = \dot{y}_3$. Можно показать, что

$$I_1 = \frac{\tau}{9}\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[-4\omega^2(t) + 2y_2^2(t) + 2y_3^2(t)\right] dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right] dt, \tag{37}$$

где $F_1(t) = \frac{\tau}{9}\left[0,98y_1^2(t) + 3y_2^2(t) - 2,08y_3^2(t) - 3,92y_1(t)y_3(t) + 2y_2(t)y_3(t)\right], t \in I$.

Заметим, что

а) $\omega y_1 {=} \dot{y}_3 y_1 {=} \frac{d}{dt}(y_1y_3) {-} \dot{y}_1 y_3 {=} \frac{d}{dt}(y_1y_3) {-} y_2\dot{y}_2 {=} \frac{d}{dt}\left[y_1y_3 {-} \frac{1}{2}y_2^2\right]$ ; $\int\limits_0^T \omega y_1 dt {=} \int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}\left(y_1y_3 {-} \frac{1}{2}y_2^2\right)\right]$ ;

б) $\omega y_2 = \dot{y}_3 y_2 = \frac{d}{dt}(y_2y_3) - \dot{y}_2 y_3 = \frac{d}{dt}(y_2y_3) - y_3^2$; $\int\limits_0^T \omega y_2 dt = \int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}(y_2y_3)\right] dt - \int\limits_0^T y_3^2 dt$;

в) $\omega y_3 = \dot{y}_3 y_3$, $\int\limits_0^T \omega y_3 dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \left(\frac{d}{dt}y_3^2\right) dt$;

г) $y_1y_2 = \dot{y}_1 y_1$, $\int\limits_0^T y_1y_2 dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \left(\frac{d}{dt}y_1^2\right) dt$;

д) $y_1y_3 = y_1\dot{y}_2 = \frac{d}{dt}(y_1y_2) - \dot{y}_1 y_2 = \frac{d}{dt}(y_1y_2) - y_2^2$; $\int\limits_0^T y_1y_3 dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \left(\frac{d}{dt}y_1y_2\right) dt - \int\limits_0^T y_1^2 dt$;

е) $y_2y_3 = \dot{y}_2 y_2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}y_2^2$, $\int\limits_0^T y_2y_3 dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^T \left(\frac{d}{dt}y_2^2\right) dt$;

Вычислим $I_2$. Используя соотношения а) - е) можно найти значение

$$I_2 = \frac{\tau_1}{9}\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \Big[-4\mu_0^{-1}\omega^2(t) + (-3,8416\mu_0^{-1} + 1,96)y_1^2(t) + (4,1536\mu_0^{-1} + \\ +1,84)y_2^2(t) + (3,6736\mu_0^{-1} - 4,16)y_3^2(t)\Big]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt, \tag{38}$$

где

$$F_2(t) = \frac{\tau_1}{9}\Big[(-3,92\mu_0^{-1} + 1)y_1^2 + (-0,24\mu_0^{-1} - 3)y_2^2 + (-4,16\mu_0^{-1} - 2)y_3^2 + \\ +(-8,1536\mu_0^{-1} - 1,84)y_1y_2 + (-7,84\mu_0^{-1} + 2)y_1y_3 + (-8\mu_0^{-1})y_2y_3\Big].$$

Вычислим $I_3$. Аналогичным путем вычислим значение

$$I_3 = \frac{\tau}{9}\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\gamma_0^2\omega^2(t) + \gamma_1^2 y_1^2(t) + (\gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3)y_2^2(t) + (\gamma_3^2 - 2\gamma_0\gamma_2)y_3^2(t)\right] + \\ + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt, \tag{39}$$

где

$$F_3(t) = 2\gamma_0\gamma_1 y_1(t)y_3(t) + 2\gamma_0\gamma_2 y_2(t)y_3(t) + (-\gamma_0\gamma_1 + \gamma_2\gamma_3)y_2^2(t) + \gamma_0\gamma_3 y_3^2 + \gamma_1\gamma_2 y_1^2(t), t \in I.$$

Из (37), (38), (39) следуют:
$N_0 = -\frac{4\tau}{9}$, $N_1 = 0$, $N_2 = \frac{2\tau}{9}$, $N_3 = \frac{2\tau}{9,}$ $M_0 = -\frac{4\mu_0^{-1}\tau_1}{9}$, $M_1 = \frac{\tau_1(-3,8416\mu_0^{-1}+1,96)}{9}$,
$M_2 = \frac{\tau_1(4,1536\mu_0^{-1}+1,84)}{9}$, $M_3 = \frac{\tau_1(3,6736\mu_0^{-1}-4,16)}{9}$, $\Gamma_0 = \gamma_0^2$, $\Gamma_1 = \gamma_1^2$,
$\Gamma_2 = \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3$, $\Gamma_3 = \gamma_3^2 - 2\gamma_0\gamma_2$.
Теперь условие 4) теоремы 7 запишутся так:

$$M_0 + \Gamma_0 = N_0 : -\frac{4\mu_0^{-1}\tau_1}{9} + \gamma_0^2 = -\frac{4\tau}{9}; \tag{40}$$

$$M_1 + \Gamma_1 = N_1 : \frac{\tau_1(-3,8416\mu_0^{-1} + 1,96)}{9} + \gamma_1^2 = 0; \tag{41}$$

$$M_2 + \Gamma_2 = N_2 : \frac{\tau_1(4,1536\mu_0^{-1} + 1,84)}{9} + \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3 = \frac{2\tau}{9}; \tag{42}$$

$$M_3 + \Gamma_3 = N_3 : \frac{\tau_1(3,6736\mu_0^{-1} - 4,16)}{9} + \gamma_3^2 - 2\gamma_0\gamma_2 = \frac{2\tau}{9}. \tag{43}$$

Из (40) имеем

$$\mu_0 = \frac{\tau_1}{\tau + 2,25\gamma_0^2}. \tag{44}$$

Из (41) следует, что

$$\tau_1 = 1,96(\tau + 2,25\gamma_0^2) - \frac{9}{1,96}\gamma_1^2. \tag{45}$$

Как следует из формулы (42), величина

$$\tau_1 = -3,03125\gamma_0^2 - 1,5625\gamma_2^2 + 3,125\gamma_1\gamma_3 + \frac{16,56}{11,2896}\gamma_1^2. \tag{46}$$

Из (43) с учетом (44) - (46), получим

$$95625\gamma_0^2 + \frac{108,3456}{11,2896}\gamma_1^2 + 10,125\gamma_2^2 + 9\gamma_3^2 - 20,25\gamma_1\gamma_3 - 18\gamma_0\gamma_2 = 0. \tag{47}$$

Из (47) при $\gamma_0 = \gamma_2 = 0$ имеем $\gamma_3 = 1,571428571428572\gamma_1$. Тогда величины $\tau_1 = 7,908163265306123\gamma_1^2$, $\tau = 6,37755102040816\gamma_1^2$.

Значение $\mu_0$ определим из соотношения (44)

$$\mu_0 = \frac{\tau_1}{\tau} = 1,24.$$

Такие же значение $\mu_0 = 1,24$ дает известные критерии абсолютной устойчивости. В отличия от разрешающих уравнений А.И. Лурье и частного критерия В.М. Попова, предлагаемый критерии отличается от простоты проверки.

II. Покажем, что применение теоремы 8 дает необходимое и достаточное условие абсолютной устойчивости для системы (33), (34). Проверка условия 1) - 3) теоремы 8 приведены выше.

Вычислим $I_4$. Так как

$$\psi(\sigma(t))\dot{\sigma}(t) = (\alpha_0\omega + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3)(-\frac{2}{3}\omega + \frac{1}{3}y_2) = -\frac{2}{3}\alpha_0\omega^2(t) +$$

$$+\frac{\alpha_2}{3}y_2^2(t) + \frac{1}{3}(-\alpha_0 + 2\alpha_2 + \alpha_3)y_3^2(t) + \frac{d}{dt}F_4(t),$$

где $P_0 = -\frac{2}{3}\alpha_0$, $P_1 = 0$, $P_2 = \frac{\alpha_2}{3}$, $P_3 = \frac{1}{3}(-\alpha_0 + 2\alpha_2 + \alpha_3)$, $F_4(t) = \frac{\alpha_1}{6}y_1^2(t) + \frac{2\alpha_1 + \alpha_3}{6}y_2^2(t) - -\frac{\alpha_3}{3}y_3^2(t) - \frac{2\alpha_1}{3}y_1(t)y_3(t) - \frac{2\alpha_2}{3}y_2(t)y_3(t) + \frac{\alpha_0}{3}y_2(t)y_3(t), t \in I$.

Равенства (27) запишутся в виде:

$$-\frac{4\tau_1\mu_0^{-1}}{9} + \gamma_0^2 = -\frac{4\tau}{9} + P_0, \tag{48}$$

$$-\frac{-3,8416\tau_1\mu_0^{-1}+1,96\tau_1}{9}+\gamma_1^2=0, \tag{49}$$

$$\frac{4,1536\tau_1\mu_0^{-1}}{9}+\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3=\frac{2\tau}{9}+P_2, \tag{50}$$

$$\frac{3,6736\tau_1\mu_0^{-1}-4,16\tau_1}{9}+\gamma_3^2-2\gamma_0\gamma_2=\frac{2\tau}{9}+P_3. \tag{51}$$

Для простоты выкладки, выберем $P_0=\dfrac{\overline{P}_0}{9}$, $P_2=\dfrac{\overline{P}_2}{9}$, $P_3=\dfrac{\overline{P}_3}{9}$, где $\overline{P}_0=-6\alpha_0$, $\overline{P}_2=3\alpha_2$, $\overline{P}_3=3(-\alpha_0+2\alpha_2+\alpha_3)$.

Из (48), имеем

$$\tau_1\mu_0^{-1}=\tau+2,25\gamma_0^2-0,25\overline{P}_0,\quad \mu_0=\frac{\tau_1}{\tau+2,25\gamma_0^2-0,25\overline{P}_0}. \tag{52}$$

Из (49) следует, что

$$\tau_1=1,96(\tau+2,25\gamma_0^2-0,25\overline{P}_0)-\frac{9}{1,96}\gamma_1^2. \tag{53}$$

Из равенства (50) получим

$$\tau=-3,03125\gamma_0^2+\frac{16,56}{11,2896}\gamma_1^2-1,5625\gamma_2^2+3,125\gamma_1\gamma_3+\frac{1,94\overline{P}_0+\overline{P}_2}{5,76}. \tag{54}$$

Из (51) с учетом (52) - (53) имеем

$$9,5625\gamma_0^2+\frac{108,3456}{11,2896}\gamma_1^2+10,125\gamma_2^2+9\gamma_3^2-20,25\gamma_1\gamma_3+\left(-\frac{6,12P_0}{5,76}-P_3-\frac{6,48P_2}{5,76}\right)=0. \tag{55}$$

Из (53)- (54) получим

$$\overline{P}_0=4\tau+9\gamma_0^2+\frac{9}{0,9604}\gamma_1^2+\frac{1}{0,49}\tau_1, \tag{56}$$

$$\overline{P}_2=-2\tau+\frac{18,317376}{1,882384}\gamma_1^2+9\gamma_2^2-18\gamma_1\gamma_3+\frac{1,94}{0,49}\tau_1, \tag{57}$$

$$\overline{P}_3=-2\tau+\frac{182,8980228096}{21,2513624064}\gamma_1^2+9\gamma_3^2-18\gamma_0\gamma_2-\frac{1,12}{0,49}\tau_1, \tag{58}$$

$$\mu_0=\frac{\tau_1}{\frac{2,25}{0,9604}\gamma_1^2+\frac{0,25}{0,49}\tau_1}. \tag{59}$$

Из (58)-(59) получим

$$\alpha_0=-\frac{2}{3}\tau-\frac{3}{2}\gamma_0^2+\frac{9}{5,7624}\gamma_1^2+\frac{1}{2,94}\tau_1, \tag{60}$$

$$\alpha_2=-\frac{2}{3}\tau-\frac{18,317376}{1,882384}\gamma_1^2+3\gamma_2^2-6\gamma_1\gamma_3+\frac{1,94}{1,47}\tau_1, \tag{61}$$

$$\alpha_3=-\frac{3}{2}\tau-\frac{728,97545400358}{360,0290211521454}\gamma_1^2-6\gamma_2^2+12\gamma_1\gamma_3-\frac{9}{2,94}\tau_1, \tag{62}$$

где $\alpha_1$ — произвольное число, величина $\mu_0$ определяется по формуле (59). Из (59)-(62) определим предельные значения $\mu_0$, $\alpha_0$, $\alpha_2$, $\alpha_3$ при $\gamma_0{=}\gamma_1{=}\gamma_2{=}\gamma_3{=}0{:}\mu_0{=}\dfrac{0,49}{0,25}{=}1,96$, $\alpha_0 = -\dfrac{2}{3}\tau + \dfrac{1}{2,94}\tau_1$, $\alpha_2 = -\dfrac{2}{3}\tau + \dfrac{1,94}{1,47}\tau_1$, $\alpha_3 = -\dfrac{3}{2}\tau - \dfrac{9}{2,94}\tau_1$, где $\tau$, $\tau_1$ — произвольные числа. Система (32), (33) абсолютно устойчива при предельном значении $\mu_0 = 1,96$. Следовательно, применение теоремы 8 к исследованию абсолютной устойчивости системы (32), (33)позволяет получить необходимое и достаточное условие абсолютной устойчивости.

В частности, при выборе $\psi(\sigma) = \alpha\dot{\sigma} + \beta\sigma + \gamma\varphi(\sigma)$, имеем

$$\psi(\sigma) = \alpha_0\omega + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3, \ \ \omega = \omega(t), \ \ y_i = y_i(t), = \overline{1,3}.$$

где $\alpha_0 = \dfrac{-2\alpha + 2\gamma}{3}$, $\alpha_1 = \dfrac{\beta + 1,96\gamma}{3}$, $\alpha_2 = \dfrac{\alpha + 2\gamma}{3}$, $\alpha_3 = \dfrac{-2\beta + 2,08\gamma}{3}$.

В этом случае, величины

$$\overline{P}_0 = 4\alpha - 4\gamma, \ \ \overline{P}_2 = \alpha + 2\gamma, \ \ \overline{P}_3 = 2\alpha - 2\beta + 4,08\gamma.$$

Тогда

$$\alpha = \frac{\overline{P}_0 + 2\overline{P}_2}{6}, \ \ \beta = \frac{3,92\overline{P}_0 + 32,32\overline{P}_2 - 12\overline{P}_3}{2}, \ \ \gamma = \frac{-\overline{P}_0 + 4\overline{P}_2}{12}.$$

Подставляя значения $\overline{P}_0, \overline{P}_2, \overline{P}_3$ из формул (56) (60) можно найти значения $\alpha, \beta, \gamma$. Для предельного случая, когда $\gamma_0 = \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 0$, $\mu_0 = 1,96$ значения $\alpha = \dfrac{1,44\tau_1}{1,47}$, $\beta = -1,04\tau + \dfrac{3,0092}{0,49}\tau_1$, $\gamma = -\tau + \dfrac{2,19\tau_1}{1,47}$.

**Заключение.** На практике встречающиеся системы автоматического управления, как правило, относятся к системам с ограниченными ресурсами. В таких системах функция $\varphi(\sigma)$ описывает свойства исполнительных приводов с ограниченными характеристиками. Поэтому ограничение, налагаемое на значение функции $\varphi(\sigma)$ в виде $|\varphi(\sigma)| \leq \varphi_*$, $\forall\sigma, \sigma \in R^1$ естественно отражает свойства системы. Примечательно, то, что в таком предположении, решение системы ограничено, более того фазовые переменные являются равномерно непрерывными функциями.

В отличие от известных методов исследования абсолютной устойчивости предлагается априорная оценка несобственных интегралов вдоль решения системы. Неособым преобразованием приведения уравнения движения исходной системы к специальному виду позволяет представить подынтегральную функцию в виде суммы двух слагаемых, где первое слагаемое является квадратичной формой приведенный диагональному виду, а второе слагаемое полным дифференциалом по времени. Такое представление подынтегральной функции, в конечном счете, приводит к легко проверяемым критериям абсолютной устойчивости.

Если предположить существование непрерывной по $\sigma$ функции $\psi(\sigma)$, $\sigma \in R^1$, определяемой по формуле $\psi(\sigma(t)) = \alpha_0\omega(t) + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i y_i(t)$, $t \in I$, то, как показано на примере, можно получить необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости.

Заметим, что поскольку $\sigma{=}\sigma(t)$, $t{\in}I$ ограниченная равномерно непрерывная функция, то естественно предположение в том, что существует обратная функция $t{=}t(\sigma)$. Если $\dot{\sigma}(t){=}\dot{\sigma}(t(\sigma))$, $\sigma{\in}R^1$ — непрерывная функция по $\sigma$, то $\psi(\sigma){=}\dot{\sigma}(t(\sigma))$. Такое предположение имеет место в случае, когда вектор $S$ является собственным вектором матрицы $A$, т.е. $SA{=}\lambda S$. В этом случае $\dot{\sigma}{=}S\dot{x}{=}SAx{+}SB\varphi(\sigma){=}\lambda Sx{+}SB\varphi(\sigma) = = \lambda\sigma{+}SB\varphi(\sigma)$. Следовательно, $\dot{\sigma}(\sigma) = \psi(\sigma) = \lambda\sigma +$

$SB\psi(\sigma,)\ \sigma \in R^1$, причем

$$\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \psi(\sigma)(t)\dot{\sigma}(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} [\lambda\sigma + SB\varphi(\sigma)]d\sigma < \infty,$$

где $\psi(\sigma)$, $\sigma \in R^1$ — непрерывная функция по $\sigma$. По-видимому, непрерывная по $\sigma$ функция $\psi(\sigma)$ существует и для других случаев. В частности, целесообразно выбрать функцию $\psi(\sigma)$ в виде $\psi(\sigma) = \alpha\dot{\sigma} + \beta\sigma + \gamma\varphi(\sigma)$, где $\alpha, \beta, \gamma$ — некоторые числа.

## Список литературы


[1] *Лурье А.Н.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования.// -М.:-Л.: Гостехиздат, 1951, 216 с.

[2] *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем.// - М.: Изд-во АН СССР, 1963, 270 с.

[3] *Якубович В.А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования.// - ДАН СССР, 1962, т.143, №6, с.131-136.

[4] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия.
- М.: Наука, 1978, 400 с.

[5] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах. – Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1969, №5, с.38-48.

[6] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости системы управления снесколькими нелинейными элементами. – АН СССР, Автоматика и телемеханика, 1970, №12, с.83-94.

[7] *Айсагалиев С.А.* К теории абсолютной устойчивость релгулируемых систем. // – Дифференциальные уравнения, Минск-Москва, 1994, т.30, №5, с.748-757.

[8] *Айсагалиев С.А.* К теории управляемости регулируемых и фазовых систем. АН СССР, Автоматика и телемеханика, 1987, №5, с.3-10.

[9] *Айсагалиев С.А.* Обобщенные теоремы об абсолютной устойчивости регулируемых систем. – Доклады НАН РК, 1992, №2, с.4-9.

[10] *Айсагалиев С.А., Злобина Е.Б.* Общая теория об абсолютной устойчивости регулируемых систем. – Вестник НАН РК, 1999, №3, с.5-10.

[11] *Айсагалиев С.А.* Теория регулируемых систем. - Алматы: Қазақ университетi, 2000. -234 с.

[12] *Айсагалиев С.А., Букша В.А.* Расширение фазового пространства в теории абослютной устойчивости. – Вестник КазНУ, сер. математика, механика и информатика, 2006, №3(50). - с.8499.