Применение спектрального метода контрольного объема к моделированию турбулентного течения на неструктурированных сетках

Е.С. Моисеева, А.С. Моисеева
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: kvt@kaznu.kz

Аннотация

В данной статье рассматривается применение спектрального метода контрольного объема к моделированию сверхзвукового турбулентного течения многокомпонентной газовой смеси в плоском канале. Приводится решение для значений функций формы в случае линейного полинома.

В настоящее время уделяется значительное внимание исследованию течения сверхзвуковых турбулентных струй в спутном потоке. Исследованию таких течений посвящено большое число практических и теоретических работ, например [1]-[3]. Основными трудностями, возникающими при численном моделировании таких типов течений, являются взаимодействия скачков уплотнения, волн Маха с пограничным слоем, а также наличие зон отрыва. В связи с этим достаточно трудно описать вышеуказанные процессы на основе единого численного алгоритма без привлечения различных упрощающих предположений. Во многих задачах для исследования таких типов течений применялись парабализованные уравнения Навье-Стокса, которые занимают промежуточное положение между полными уравнениями Навье-Стокса и уравнениями пограничного слоя. Однако, они не дают возможность изучать эти процессы. Следовательно, появляется необходимость привлечения полных уравнений Навье-Стокса.

При численном решении исходных уравнений использование схем повышенного порядка аппроксимации приводит к введению искусственной вязкости, которая может существенно влиять на точность получаемого решения. Существуют схемы без использования искусственной вязкости, такие как монотонные схемы, TVD схемы. Однако их существенным недостатком является то, что в окрестности локальных экстремумов решения порядок точности этих схем понижается до первого. Таким образом, необходима разработка схемы, обеспечивающей описание скачков уплотнения, вихрей и других разрывов газодинамических параметров и не допускающей понижения точности решения на разрывах до первого.

Целью данной работы является численное моделирование вдува плоской сверхзвуковой струи водорода в спутный сверхзвуковой поток воздуха при наличии стенки. Для удобства вычисления рассматривается вдув струи только с нижней стенки. Схема течения показана на Рис.1

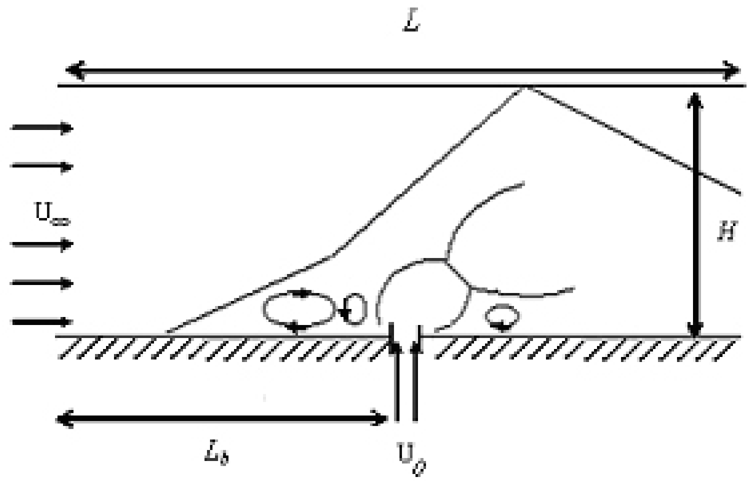

Рис. 1: Схема течения. L – длина канала, H – высота канала, L_b – расстояние от входа потока до щели, U_∞ – скорость потока, U_0 – скорость струи

Исходной является система двумерных осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса для многокомпонентного газа, записанная в декартовой системе координат в консервативной форме:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial (E - E_v)}{\partial x} + \frac{\partial (F - F_v)}{\partial y} = 0 \qquad (1)$$

где

$$U = (\rho, \rho u, \rho v, E_t, \rho Y_k)^T,$$

$$E = (\rho u, \rho u^2 + p, \rho uv, (E_t + p)u, \rho u Y_k)^T, F = (\rho v, \rho uv, \rho v^2 + p, (E_t + p)v, \rho v Y_k)^T,$$

$$E_v = (0, \tau_{xx}, \tau_{xy}, u\tau_{xx} + u\tau_{xy} - q_x, J_{kx})^T, F_v = (0, \tau_{yx}, \tau_{yy}, v\tau_{yx} + v\tau_{yy} - q_v, J_{ky})^T;$$

$$p = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M_\infty^2}(\sum_{k=1}^{N} \frac{Y_k}{W_k}), E_t = \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^{N} Y_k h_k - p + \frac{1}{2}\rho(u^2 + v^2),$$

$$\sum_{k=1}^{N} Y_k = 1, h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^{T} c_{pk} dT, c_{pk} = C_{pk}/W, W = (\sum_{k=1}^{N} \frac{Y_k}{W_k})^{-1}$$

Исходная система уравнений (1) записана в безразмерной форме в общепринятых обозначениях. Здесь u, v - компоненты скорости, ρ - плотность, E_t - полная энергия, Y_k - массовая концентрация k-ой компоненты, h - удельная энтальпия k-ой компоненты,

$\gamma = c_p/c_v$ - отношение удельных теплоемкостей, где c_p, c_v - теплоемкости при постоянном давлении и объеме, M_∞ – число Маха потока. Коэффициент динамической вязкости представляется в виде суммы μ_Λ - молекулярной вязкости и μ_t - турбулентной вязкости: $\mu = \mu_\Lambda + \mu_t$. Молярные удельные теплоемкости c_{pk} - полином 4-ой степени относительно температуры, где значение эмпирических констант взяты из таблицы JANAF [4], W - молярный вес смеси всех газов, $\tau_{xx}, \tau_{xy} = \tau_{yx}, \tau_{yy}$, - тензоры турбулентных напряжений (определяются согласно модели Болдуина-Ломакса) и q_x, q_y , J_{kx} , J_{ky} - тепловые и диффузионные потоки. В качестве определяющих параметров приняты параметры на срезе сопла (u_0, ρ_0, T_0), а характерный размер – радиус сопла r. Давление и полная энергия отнесены к значению $\rho_0 u_0^2$.

Начальные и граничные условия задаются согласно [5]

Для того чтобы учесть сложную конфигурацию расчетной области, а также повысить точность расчетов, мы применяем неструктурированную сетку [6]. В отличие от обычного метода конечных объемов, в спектральном методе контрольных объемов мы получаем информацию о потоках не из соседних ячеек, а из внутренних подъячеек (subcells).

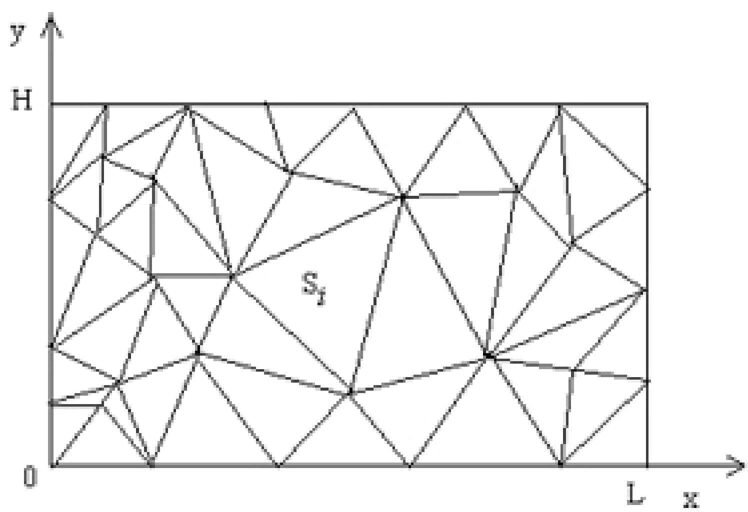

Рис. 2: Дискретизация области

Предварительно разобьем рассматриваемую область Ω на S_i подобласти $(i = 0, ..., I-1)$ – спектральные объемы, причем S_i – непересекающиеся треугольные ячейки (Рис.2),

$$\Omega = U_{i=0}^{I-1} S_i,$$

где I – число ячеек сетки. Далее каждую S_i подобласть, в свою очередь, разделим на N C_{ij} $(i = 0, ..., I-1; j = 0, ..., N-1)$ подобластей – контрольные объемы (для пред-

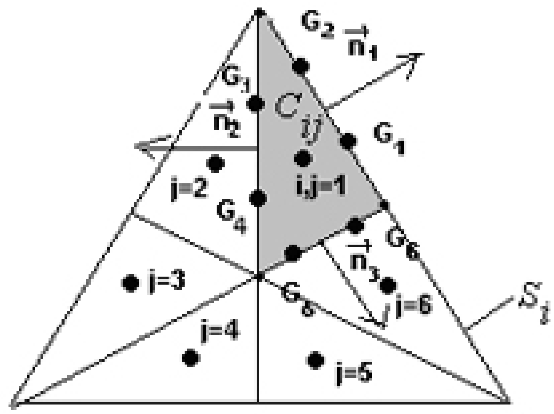

Рис. 3: Спектральный объем для квадратичного полинома

ставления решения с помощью полинома степени m нам необходимо $N = \frac{(m+1)(m+2)}{2}$ узловых значений функции u),

$$S = U_{j=0}^{N-1} C_{ij}, (i = 0, ..., I-1)$$

Например, для построения решения с помощью полинома 2 степени можно использовать разбиение, показанное на Рис. 3.

Проинтегрируем исходную систему уравнений (1) по контрольному объему C_{ij} и, используя формулу Остроградского-Гаусса [7] для перехода от интеграла по объему к поверхностному интегралу для членов, содержащих потоки, получим

$$\int_{C_{ij}} \frac{\partial u}{\partial t} dV + \sum_{r=1}^{3} \int_{A_r^{ij}} (\vec{H}(\vec{u})\vec{n}_r) dA = 0, \tag{2}$$

где

$$\vec{H} = (E(u) - E_v(u), F(u) - F_v(u)),$$

∂C_{ij}- граница контрольного объема C_{ij}, n – внешняя нормаль к ∂C_{ij}, причем $n = (n_1, n_2, n_3)$, т.к. $\partial C_{ij} = \sum_{r=1}^{3} A_r^{ij}$,где A_{ij} – грань ∂C_{ij} Определим осредненную по величину, как

$$\bar{u}_{ij} = \frac{\int_{C_{ij}} u dV}{V_{ij}}, \tag{3}$$

где V_{ij} – площадь контрольного объема (для двумерного случая).

Для вычисления поверхностного интеграла применим квадратурную формулу Гаусса порядка $k = m + 1$ [8]. На каждой грани A_r^{ij} для этого определим точки квадратурной формулы Гаусса $G_r^{ij}(x_r^{ij}, y_r^{ij})$ $(r = 1, ..., J + 1)$, где

$$J = integer(\frac{k+1}{2})$$

и (x_r^{ij}, y_r^{ij}) – координаты точек квадратурной формулы Гаусса G_r^{ij} (Рис. 3).

Тогда, с учетом (3), запишем (2) следующим образом:

$$\frac{d\bar{u}_{ij}}{dt} + \frac{1}{V_{ij}} \sum_{r=1}^{3} \sum_{r=1}^{2} (\vec{H}(u(x_{rq}^{ij}, y_{rq}^{ij}))\vec{n}_r) = 0, \quad (4)$$

где $\bar{u}_{ij}$ – величины, определенные в центральных точках C_{ij}.

Как видно из (4), $u(x_{rq}^{ij}, y_{rq}^{ij})$ не являются узловыми значениями искомой функции. Для экстраполирования их через узловые значения функции используем многомерный полином $p_i(x, y)$ степени $m \geq k - 1$, который аппроксимирует искомую $u(x, y)$ в S_i с порядком точности k.

Для построения функции $p_i(x, y)$ введем полный базис полиномов $e_l(x, y) \in P$, где $P = span\{e_l(x, y)\}_{l=1}^{N}$. Полином $p_i(x, y)$ в данном базисе представляется в виде

$$p_i = ea_i, \quad (5)$$

где $a_i = [a_{il}, ..., a_{iN}]^T$ – вектор неизвестных коэффициентов полинома.

Таким образом, получим следующее выражение, определяющее связь между неизвестными коэффициентами a_i и средними неизвестными значениями искомой функции $\bar{u}_{ij}$:

$$\frac{1}{V_{ij}} \int_{C_{ij}} (a_{i1}e_1 + ... + a_{iN}e_N)dxdy = \bar{u}_{ij}, j = 1, ..., N \quad (6)$$

Введем матрицу R вида

$$R = \begin{bmatrix} \frac{1}{V_{i1}} \int_{C_{i1}} e_1(x, y)dxdy & \cdots & \frac{1}{V_{i1}} \int_{C_{i1}} e_N(x, y)dxdy \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{V_{iN}} \int_{C_{iN}} e_1(x, y)dxdy & \cdots & \frac{1}{V_{iN}} \int_{C_{iN}} e_N(x, y)dxdy \end{bmatrix}, \quad (7)$$

Пусть $\bar{u}_i = [\bar{u}_{i1}, ..., \bar{u}_{iN}]^T$, тогда выражение (6) с учетом (7) примет вид

$$R_i a_i = \bar{u}_i$$

Таким образом получена система алгебраических уравнений относительно вектора неизвестных a_i, разрешение которой относительно вектора неизвестных коэффициентов приводит к следующему решению

$$a_i = R_i^{-1}\bar{u}_i \quad (8)$$

После подстановки найденного вектора коэффициентов (8) в искомый полином, будем иметь

$$p_i = eR_i^{-1}\bar{u}_i \tag{9}$$

Согласно [8], введем вектор функций формы

$$L_i = eR_i^{-1}, \tag{10}$$

где $L_i = [L_{i1}, ..., L_{iN}]$.

Тогда (9) запишем с помощью вектора функций формы следующим образом

$$p_i = L_i\bar{u}_i \tag{11}$$

Согласно [8], различные формы спектральных объемов могут приводить к одинаковым выражениям функций формы, если были применены геометрически одинаковые разбиения данных объемов. Таким образом, достаточно вычислить значения функций формы только один раз.

Например, для линейного полинома $J = 1$, т.е. на каждой грани контрольного объема C_{ij} необходимо взять 1 точку, находящуюся посередине грани (Рис. 4).

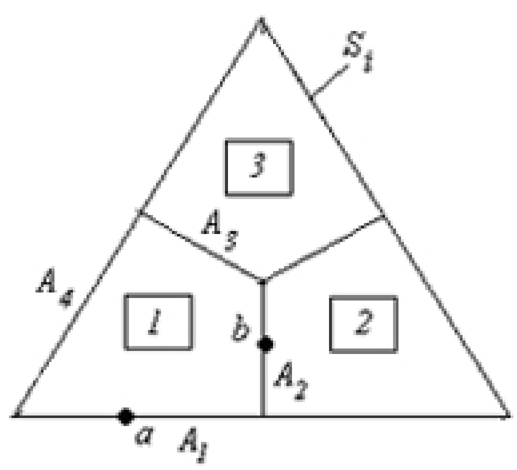

Рис. 4: Дискретизация области

Далее, используя найденный полином, при распаде произвольного разрыва скорости распространения волн вправо и влево от грани спектрального объема определяются в (4) с помощью решения задачи Римана (Рис. 3)

$$\frac{d\bar{u}_{ij}}{dt}+\frac{1}{V_{ij}}\sum_{q=1}^{J}w_{1q}H_{Riem}(p_i(x_{1q},y_{1q}),p_{i1}(x_{1q},y_{1q}),\vec{n}_1)A_1$$
$$+\sum_{q=1}^{J}w_{2q}H(p_i(x_{2q},y_{2q})),\vec{n}_2)A_2+\sum_{q=1}^{J}w_{3q}H(p_i(x_{3q},y_{3q}),\vec{n}_3)A_3, \tag{12}$$

где p_{ir} – полином, построенный в соседнем контрольном объеме $C_{ij,r}$, имеющем общую грань A_r с контрольным объемом C_{ij}; $w_{rq}, r=1,...,3$ - весовые коэффициенты квадратурной формулы Гаусса. Для решения (12) используется схема Рунге-Кутты 3 порядка точности [8].

Значения функций формы вычисляются с помощью программы MatLab, в случае линейного полинома

$$L_a=(4/3,2/15,-7/15)$$
$$L_b=(8/15,8/15,-1/15)$$

Из-за симметричности в данном случае достаточно вычислить значения функций формы в двух точках, a и b. Далее полином строится с использованием осредненных значений искомой функции

$$p(x_a,y_a)=\frac{4}{3}\bar{u}_1+\frac{2}{15}\bar{u}_2-\frac{7}{15}\bar{u}_3$$
$$p(x_b,y_b)=\frac{8}{15}\bar{u}_1+\frac{8}{15}\bar{u}_2-\frac{1}{15}\bar{u}_3$$

Поле температуры вычисляется согласно [5].

Список литературы

[1] *Santiago J.G., Dutton J.C. Crossflow vortices of a jet injected into a supersonic crossflow // AIAA Journal. .- 1996. – Vol. 35, №5. – p.915-917*

[2] *Драммонд Д.Ф., Вайднер Э.Х. Численный метод расчета в канале ПВРД // Аэрокосмическая техника. – 1983. – Т.1, №4. – с.42-49*

[3] *Вайднер Э.Х., Драммонд Д.Ф. Расчетное исследование схемы вдува топлива в канал ПВРДсг с последовательным расположением щелей // Аэрокосмическая техника. – 1983. – Т.1, №5. – с.103-111*

[4] *Kee R.J., Rupley F.M., Miller J.A. CHEMKIN-II: a Fortran chemical kinetic package for the analysis of gas-phase chemical kinetic // SANDIA Report SAND89-8009. – 1989. – c.35*

[5] *Бекетаева А.О. Численное исследование сверхзвукового течения с поперечным вдувом струи // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – 2006*

[6] *Olivier-Goosh C., Van Altena M. A high-order-accurate unstructed mesh finite-volume scheme fro the advection-diffusion equation // Journal of Comp. Phys. 181.- 2002.- p.729-752*

[7] *Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – Москва: Наука, 1968. – 720 с.*

[8] *Wang Z.J., Liu Y. Spectral (finite) volume method for conservation laws on unstructed grids. II. Extension to two-dimensional scalar equation // Journal of Comp. Phys. 179.- 2002.- p.665-697*