Исследование разностных схем метода крупных частиц применительно к задачам инерционной фильтрации

Б.Ч. Чечейбаев
Кыргызская Республика, г. Бишкек, КНУ им. Ж. Баласагына

Аннотация

Рассматривается численная модель метода крупных частиц для расчета инерционных фильтрационных течений в пористой среде при использовании современной модели С.А. Христиановича. Нелинейные свойства разностных схем метода крупных частиц исследуются с помощью метода дифференциальных приближений.

Одним из мощных методов современного вычислительно эксперимента является метод крупных частиц Давыдова [1, 2 и др.], с помощью которого успешно решаются сложные задачи механики сплошных и сыпучих сред. Традиционным уравнением подземной гидромеханики, характеризующим процесс фильтрации жидкости, является линейный закон А.Дарси и его обобщения для турбулентного режима. Как показала практика, совпадением данных опыта и численных расчетов, где в качестве динамического уравнения принимался закон А.Дарси, наблюдались только при медленных изменениях давления во времени. Фундаментальные исследования в области нефтегазовой подземной гидромеханики выполнены академиком С.А. Христиановичем. Предложенная им модель фильтрации обобщает закон А.Дарси на случай учета сил инерции, больших градиентов пластового давления во времени, больших градиентов пористости [3 и др.]. Математическая модель фильтрации однородной жидкости в пласте при использовании модели С.А.Христиановича в пласте с переменной эффективной толщиной $h(x, y)$ состоит из уравнения неразрывности, уравнения движения С.А.Христиановича и баротропных уравнений состояния для жидкости и пористой среды:

$$h\frac{d\rho m}{dt} + div(\rho m W h) = 0, \quad \rho\frac{dW}{dt} + \varepsilon^2(\nabla P) + \beta P\nabla lnm) + \frac{\mu m}{\lambda}W = 0, \tag{1}$$

$\rho = \rho(P), m = m(P)$. где $W = (u, \vartheta)$ - вектор гидродинамической скорости жидкости, ρ- плотность, P- пластовое давление, m - пористость, β - безразмерная постоянная, величина которой зависит от физических параметров пористой среды. Величины ε^2, λ в уравнении С.А. Христиановича связаны с коэффициентом проницаемости в модели А. Дарси следующим образом:

$$k = \lambda \cdot \varepsilon^2 \tag{2}$$

Следуя работе [4], приведем алгоритм метода Давыдова для моделирования фильтрационного течения жидкости в пласте при использовании модельного уравнения С.А. Христиановича. Алгоритм метода Давыдова для расщепления системы (1) состоит из трех этапов.

1. Эйлеров этап.

На этом этапе для каждой расчетной ячейки (i, j) пренебрегаем всеми эффектами, связанными с ее перемещениями (отсутствует поток массы через границы ячейки). Тогда из уравнения неразрывности убирается конвективный член, а жидкость предполагается заторможенной. Исходная система уравнений сводится, таким образом, к единственному соотношению-уравнению Христиановича. Второе уравнение системы (2) для пространственно-двумерного случая фильтрации имеет следующий вид:

$$\rho\frac{du}{dt} + \varepsilon^2(\frac{dP}{dx} + \beta\frac{dm}{dx}) + \frac{\mu m}{\lambda}u = 0, \quad \rho\frac{d\vartheta}{dt} + \varepsilon^2(\frac{dP}{dy} + \beta\frac{dm}{dy}) + \frac{\mu m}{\lambda}\vartheta = 0 \tag{3}$$

Аппроксимируя (3) в момент времени t^n , получим следующие разностные соотношения для ячейки (i,j) :

$$\tilde{u}^n_{i,j} = u^n_{i,j} - \Delta t \cdot (u^n_{i,j}\frac{u^n_{i+\frac{1}{2},j} - u^n_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \vartheta^n_{i,j}\frac{u^n_{i,j+\frac{1}{2}} - u^n_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}) -$$
$$-\frac{\Delta t}{\rho^n_{i,j}}[\varepsilon^2(P^n_{i,j}\frac{u^n_{i+\frac{1}{2},j} - P^n_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \beta(\frac{P}{m})^n_{i,j}\frac{m^n_{i,j+\frac{1}{2}} - m^n_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta x}) + (\frac{\mu m}{\lambda})^n_{i,j}u^n_{i,j}],$$
$$\tilde{\vartheta}^n_{i,j} = \vartheta^n_{i,j} - \Delta t \cdot (u^n_{i,j}\frac{\vartheta^n_{i+\frac{1}{2},j} - \vartheta^n_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta x} + \vartheta^n_{i,j}\frac{\vartheta^n_{i,j+\frac{1}{2}} - \vartheta^n_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}) - \tag{4}$$
$$-\frac{\Delta t}{\rho^n_{i,j}}[\varepsilon^2(P^n_{i,j}\frac{u^n_{i+\frac{1}{2},j} - P^n_{i-\frac{1}{2},j}}{\Delta y} + \beta(\frac{P}{m})^n_{i,j}\frac{m^n_{i,j+\frac{1}{2}} - m^n_{i,j-\frac{1}{2}}}{\Delta y}) + (\frac{\mu m}{\lambda})^n_{i,j}u^n_{i,j}].$$

где величины с дробными индексами относятся к границам ячейки и равны полусуммам значений в смежных ячейках, например для горизонтальной составляющей скорости имеем

$$u^n_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{u^n_{i,j} + u^n_{i+1,j}}{2}.$$

Таким образом, на первом этапе, в предположении заторможенности поля плотности, по известному на слое $t = t^n$ распределению гидродинамических величин вычисляются промежуточные значения $\tilde{u}, \tilde{\vartheta}$ для центров крупных частиц (эйлеровых ячеек).

2. Лагранжев этап.

На данном этапе вычисляются эффекты переноса, учитывающие обмен между ячейками при их перестройке на прежнюю эйлерову сетку. Здесь находятся потоки массы ΔM^n через границы эйлеровых ячеек за время Δt . При этом предполагается, что вся масса жидкости переносится только за счет нормальной к границе ячейки составляющей скорости. Уравнение неразрывности системы (1) в разностной форме можно записать следующим образом (в предположении, что поток жидкости через ячейку (i,j) направлен слева направо и снизу вверх):

$$(mh\rho)^{n+1}_{i,j}\Delta x\Delta y = (mh\rho)^n_{i,j}\Delta x\Delta y + \Delta M^n_{i-\frac{1}{2},J} - \Delta M^n_{i+\frac{1}{2},j} + 4\Delta M^n_{i,j-\frac{1}{2}} - \Delta M^n_{i,j+\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

Формулы для нахождения потока масс ΔM^n имеют, например, для правой границы $(i+\frac{1}{2},j)$ ячейки (i,j) следующий вид:

$$\Delta M^n_{i+\frac{1}{2},j} = <\rho^n_{i+\frac{1}{2},j}>< \tilde{u}^n_{i+\frac{1}{2},j}>< m^n_{i+\frac{1}{2},j}>< h^n_{i+\frac{1}{2},j}> \Delta y\Delta t \tag{6}$$

Знак $<>$ означает значения физических величин на границе ячейки. Выбор этих величин имеет важное значение, так как сильно влияет на устойчивость и точность вычислений.

3. Заключительный этап.

На данном этапе происходит перераспределение массы жидкости по эйлеровым ячейкам и определяются поля давления и плотности в новый момент времени. Используя разностный аналог уравнения неразрывности (1), получаем значение плотности для нового временного слоя $t = t^{n+1}$:

$$\rho^{n+1}_{i,j} = \rho^n_{i,j} + \frac{\Delta M^n_{i-\frac{1}{2},j} - \Delta M^n_{i+\frac{1}{2},j} + \Delta M^n_{i,j-\frac{1}{2}} - \Delta M^n_{i,j+\frac{1}{2}}}{\Delta x\Delta y(mh)^n_{i,j}} \tag{7}$$

Баротропное уравнение состояния $\rho = \rho(P)$ позволяет вычислить новое значение давления в ячейке: $P^{n+1}_{i,j} = P(\rho^{n+1}_{i,j})$, где $P = P(\rho)$ - функция, обратная к $\rho = \rho(P)$. В конце заключительного этапа вычислений полагаем $u^n_{i,j} = \tilde{u}^n_{i,j}, \vartheta^n_{i,j} = \tilde{\vartheta}^n_{i,j}$.

Вычислительный цикл, таким образом, закончен. В дальнейшем вся процедура (эйлеров, лагранжев и заключительный этапы метода Давыдова) повторяется по порядку следования этапов для следующего момента времени $t = t^{n+2}$ и т.д. Одной из актуальных проблем современного численного моделирования является исследование вопросов исследования нелинейных свойств разностных схем (аппроксимации, устойчивости, аппроксимационной вязкости, дисперсии, бивязкости, бидисперсии и т.д.). Для исследования нелинейных разностных схем метода Давыдова успешно применяется мощный аппарат метода дифференциальных приближений, примененный и развитый автором метода численного моделирования Ю.М. Давыдовым. Математический аппарат метода дифференциальных приближений изложен в работе [5 и др.]. Дифференциальное приближение занимает промежуточное положение между исходным дифференциальным уравнением и аппроксимирующей его разностной схемой. Дифференциальное приближение имеет структуру дифференциального уравнения, но его коэффициенты зависят от параметров рассматриваемой схемы. Таким образом, нулевое дифференциальное приближение сохраняет информацию об исходных уравнениях, а последующие члены разложения более высоких дифференциальных приближений зависят от свойств разностной схемы. Дифференциальная структура приближения облегчает аналитические исследования свойств разностной схемы (особенно вопросов устойчивости, образования диссипативного механизма и дисперсии). Вычисление дифференциальных приближений разностных схем требует проведения сложных, громоздких математических выкладок [5]. Поэтому в целях автоматизации вычислений на ЭВМ в данной работе была использована система аналитических вычислений Reduce-3. Для вычисления на ЭВМ дифференциальных приближений разностных схем будем рассматривать выражения для потока масс через границы ячеек

$$\Delta M^n_{i-\frac{1}{2},j}, \Delta M^n_{i+\frac{1}{2},j}, \Delta M^n_{i,j-\frac{1}{2}}, \Delta M^n_{i,j+\frac{1}{2}},$$

которые определяются следующим образом:

$$\Delta M^n_{i+\frac{1}{2},j} =< \rho^n_{i+\frac{1}{2},j} >< \tilde{u}^n_{i+\frac{1}{2},j} >< m^n_{i+\frac{1}{2},j} >< h^n_{i+\frac{1}{2},j} > \Delta y \Delta t, \tag{8}$$

$$\Delta M^n_{i-\frac{1}{2},j} =< \rho^n_{i-\frac{1}{2},j} >< \tilde{u}^n_{i-\frac{1}{2},j} >< m^n_{i-\frac{1}{2},j} >< h^n_{i-\frac{1}{2},j} > \Delta y \Delta t, \tag{9}$$

$$\Delta M^n_{i,j-\frac{1}{2}} =< \rho^n_{i,j-\frac{1}{2}} >< \tilde{\vartheta}^n_{i,j-\frac{1}{2}} >< m^n_{i,j-\frac{1}{2}} >< h^n_{i,j-\frac{1}{2}} > \Delta x \Delta t, \tag{10}$$

$$\Delta M^n_{i,j+\frac{1}{2}} =< \rho^n_{i,j+\frac{1}{2}} >< \tilde{\vartheta}^n_{i,j+\frac{1}{2}} >< m^n_{i,j+\frac{1}{2}} >< h^n_{i,j+\frac{1}{2}} > \Delta x \Delta t, \tag{11}$$

Будем использовать формулы аппроксимации для промежуточных значений скоростей $\tilde{u}^n_{i,j}$, $\tilde{\vartheta}^n_{i,j}$. Определяем поток массы $M^n_{i-\frac{1}{2},j}$. Рассмотрим произведение $< \rho^n_{i-\frac{1}{2},j} >< \tilde{u}^n_{i-\frac{1}{2},j} >$ на левой границе ячейки (i,j). Подставляя соответствующие выражения, получаем:

$$\begin{aligned}
&< \rho^n_{i-\frac{1}{2},J} >< \tilde{u}^n_{i-\frac{1}{2},j} >= \frac{1}{2}\rho^n_{i-1}\left\{u^n_{i-1,j} + u^n_{i,j} - \Delta t(u^n_{i-1,j}\frac{u^n_{i,j}-u^n_{i-2,j}}{2\Delta x} + \right.\\
&\left. +u^n_{i,j}\frac{u^n_{i+1,j}-u^n_{i-1,j}}{2\Delta x} + \vartheta^n_{i-1,j}\frac{\vartheta^n_{i-1,j+1}-\vartheta^n_{i-1,j-1}}{2\Delta y} + \vartheta^n_{i,j}\frac{\vartheta^n_{i,l+1}-\vartheta^n_{i-1,j}}{2\Delta y})\right\} - \\
&-\frac{1}{2}\Delta t\left[\varepsilon^2(\frac{P^n_{i,j}-P^n_{i-2,j}}{2\Delta x} + \frac{P^n_{i+1,j}-P^n_{i-1,j}}{2\Delta x} + \beta((\frac{P}{m})^n_{i-1,j}\frac{m^n_{i,j}-m^n_{i-2,j}}{2\Delta x} + \right.\\
&\left. +(\frac{P}{m})^n_{i,j}\frac{m^n_{i+1,j}-m^n_{i-1,j}}{2\Delta x} + (\frac{\mu m}{\lambda})^n_{i-1,j}u^n_{i-1,j} + (\frac{\mu m}{\lambda})^n_{i,j}u^n_{i,j}\right]) + \frac{1}{2}\Delta t \Delta x *
\end{aligned} \tag{12}$$

$$
*\left[\varepsilon^2(\frac{P^n_{i+1,j}-P^n_{i-1,j}}{2\Delta x}+\frac{1}{\beta}((\frac{P}{m})^n_{i,j}\frac{m^n_{i+1,j}-m^n_{i-1,j}}{2\Delta x})+(\frac{\mu m}{\lambda})^n_{i,j}u^n_{i,j}\right]
$$

Здесь

$$
\frac{\rho_{i-1}}{\rho}=\frac{\rho-\rho_x\Delta x+O(\Delta x^2)}{\rho}=1-\frac{\rho_x}{\rho}\Delta x+O(\Delta x^2).
$$

Разностные формулы для произведения пористости среды на эффективную толщину пласта для потока жидкости, втекающей в ячейку (i,j) через границу $(i-\frac{1}{2},j)$ в момент времени , определяется следующим выражением:

$$
<m^n_{i-\frac{1}{2},j}><h^n_{i-\frac{1}{2},j}>=\frac{1}{4}(m^n_{i-1,j}+m^n_i)(h^n_{i-1,j}+h^n_{i,j}) \tag{13}
$$

Отсюда, если учесть выражения (12) и (13), то согласно (9) можно определить поток массы жидкости, втекающей в ячейку (i,j) . Аналогичным образом, рассмотрим поток массы жидкости, вытекающей из ячейки (i,j) через границу $(i+\frac{1}{2},j)$ в момент времени t^n . Произведение плотности на промежуточное значение скорости жидкости, вытекающей из ячейки (i,j), имеет следующий вид:

$$
\begin{gathered}
<\rho^n_{i+\frac{1}{2},J}><\tilde{u}^n_{i+\frac{1}{2},j}>=\tfrac{1}{2}\rho^n_{i,j1}\left\{u^n_{i+1,j}+u^n_{i,j}-\Delta t(u^n_{i+1,j}\tfrac{u^n_{i+2,j}-u^n_{i,j}}{2\Delta x}+\right.\\
\left.\vartheta^n_{i+1,j}\tfrac{\vartheta^n_{i+1,j+1}-\vartheta^n_{i+1,j-1}}{2\Delta y}+u^n_{i,j}\tfrac{u^n_{i+1,j}-u^n_{i+1,j}}{2\Delta x}+\vartheta^n_{i,j}\tfrac{\vartheta^n_{i,j+1}-\vartheta^n_{i,j-1}}{2\Delta y})\right\}-\tfrac{1}{2}\Delta t\varepsilon^2(\tfrac{P^n_{i+1,j}-P^n_{i-1,j}}{2\Delta x}+\\
\left.+\tfrac{P^n_{i+2,j}-P^n_{i,j}}{2\Delta x}+\beta((\tfrac{P}{m})^n_{i,j}\tfrac{m^n_{i+1,j}-m^n_{i-1,j}}{2\Delta x}+(\tfrac{P}{m})^n_{i+1,j}\tfrac{m^n_{i+2,j}-m^n_{i,j}}{2\Delta x}))+(\tfrac{\mu m}{\lambda})^n_{i,j}u^n_{i+1,j}\right]+\\
+\tfrac{1}{2}\Delta t\Delta x\tfrac{\rho_x}{\rho}*\left[\varepsilon^2(\tfrac{P^n_{i+2,j}-P^n_{i,j}}{2\Delta x}+\beta(\tfrac{P}{m})^n_{i+1,j}\tfrac{m^n_{i+2,j}-m^n_{i,j}}{2\Delta x})+(\tfrac{\mu m}{\lambda})^n_{i+1,j}u^n_{i+1,j}\right].
\end{gathered} \tag{14}
$$

Здесь

$$
\frac{\rho^n_{i,j}}{\rho^n_{i+1,j}}=\frac{\rho}{\rho+\rho_x\Delta x+O(\Delta x^2)}=1-\frac{\rho_x}{\rho}\Delta x+O(\Delta x^2), \tag{15}
$$

$$
<m^n_{i+\frac{1}{2},j}><h^n_{i+\frac{1}{2},j}>=\frac{1}{4}(m^n_{i,j}+m^n_{i+1,j})(h^n_{i,j}+h^n_{i+1,j}).
$$

Принимая во внимание разностные выражения (14) и (15), на основе формулы для вычисления потока жидкости (8) можем определить $\Delta M^n_{i+\frac{1}{2},j}$. Теперь рассмотрим поток жидкости через ячейку (i,j), направленный снизу вверх. Рассмотрим поток массы жидкости $\Delta M^n_{i,j-\frac{1}{2}}$, втекающей в ячейку (i,j) через границу $(i,j-\frac{1}{2})$. По аналогии с рассмотренными выше случаями имеем:

$$
\begin{gathered}
<\rho^n_{i,j-\frac{1}{2}}><\tilde{\vartheta}^n_{i,j-\frac{1}{2}}>=\tfrac{1}{2}\rho^n_{i,j-1}\left\{\vartheta^n_{i,j}+\vartheta^n_{i,j-1}-\Delta t(u^n_{i,j}\tfrac{\vartheta^n_{i+1,j}-\vartheta^n_{i-1,j}}{2\Delta x}+\vartheta^n_{i,j}\tfrac{\vartheta^n_{i,j+1}-\vartheta^n_{i,j-1}}{2\Delta y}+\right.\\
\left.+u^n_{i,j-1}\tfrac{\vartheta^n_{i+1,j-1}-\vartheta^n_{i+1,j-1}}{2\Delta x}+\vartheta^n_{i,j-1}\tfrac{\vartheta^n_{i,j}-\vartheta^n_{i,j-2}}{2\Delta y})\right\}-\tfrac{1}{2}\Delta t\left[\varepsilon^2(\tfrac{P^n_{i,j}-P^n_{i,j-2}}{2\Delta y}+\tfrac{P^n_{i,j+1}-P^n_{i,j-1}}{2\Delta y}+\right.\\
\left.+\beta((\tfrac{P}{m})^n_{i,j-1}\tfrac{m^n_{i,j}-m^n_{i,j-2}}{2\Delta y}+(\tfrac{P}{m})^n_{i,j}\tfrac{m^n_{i,j+1}-m^n_{i,j-1}}{2\Delta y}+(\tfrac{\mu m}{\lambda})^n_{i,j-1}\vartheta^n_{i,j-1}+(\tfrac{\mu m}{\lambda})^n_{i,j}\vartheta^n_{i,j}\right]+\tfrac{\rho_y}{2\rho}\Delta t\Delta y*
\end{gathered}
$$

$$
*\left[\varepsilon^2(\frac{P^n_{i,j+1}-P^n_{i,j-1}}{2\Delta y}+\beta(\frac{P}{m})^n_{i,j}\frac{m^n_{i,j+1}-m^n_{i,j-1}}{2\Delta y})+(\frac{\mu m}{\lambda})^n\vartheta^n_{i,j}\right], \tag{16}
$$

где

$$< \rho^n_{i,j-\frac{1}{2}} >= \rho^n_{i,j-1}. \quad < m^n_{i,j-\frac{1}{2}} >< h^n_{i,j-\frac{1}{2}} >= \frac{1}{4}(m^n_{i,j} + m^n_{i,j-1})(h^n_{i,j} + h^n_{i,j-1}) \tag{17}$$

Подставляя формулы (15), (17) в (10), можно вычислить поток массы жидкости, идущей снизу вверх и втекающей в ячейку (i,j) через границу $(i,j-\frac{1}{2})$. В случае потока, вытекающего из рассматриваемой ячейки (i,j) через границу $(i,j+\frac{1}{2})$, имеем следующее:

$$\begin{gathered} < \rho^n_{i,j+\frac{1}{2}} >< \tilde{\vartheta}^n_{i,j+\frac{1}{2}} >= \tfrac{1}{2}\rho^n_{i,j}\left\{\vartheta^n_{i,j+1} + \vartheta^n_{i,j} - \Delta t(u^n_{i,j+1}\tfrac{\vartheta^n_{i+1,j+1}-\vartheta^n_{i-1,j+1}}{2\Delta x} + u^n_{i,j}\tfrac{\vartheta^n_{i+1,j}-\vartheta^n_{i-1,j}}{2\Delta x} + \right. \\ \left. + \vartheta^n_{i,j+1}\tfrac{\vartheta^n_{i,j+2}-\vartheta^n_{i,j}}{2\Delta y} + \vartheta^n_{i,j}\tfrac{\vartheta^n_{i,j+1}-\vartheta^n_{i,j-1}}{2\Delta y})\right\} - \tfrac{1}{2}\Delta t\left[\varepsilon^2(\tfrac{P^n_{i,j+1}-P^n_{i,j}}{2\Delta y} + \tfrac{P^n_{i,j+1}-P^n_{i,j-1}}{2\Delta y} + \right. \\ \left. +\beta((\tfrac{P}{m})^n_{i,j+1}\tfrac{m^n_{i,j+2}-m^n_{i,j}}{2\Delta y} + (\tfrac{P}{m})^n_{i,j}\tfrac{m^n_{i,j+1}-m^n_{i,j-1}}{2\Delta y})) + (\tfrac{\mu m}{\lambda})^n_{i,j+1}\vartheta^n_{i,j+1} + (\tfrac{\mu m}{\lambda})^n_{i,j}\vartheta^n_{i,j}\right] + \\ +\tfrac{1}{2}\Delta t\Delta y\rho_y\left[\varepsilon^2(\tfrac{P^n_{i,j+2}-P^n_{i,j}}{2\Delta y} + \beta(\tfrac{P}{m})^n_{i,j+1}\tfrac{m^n_{i,j+2}-m^n_{i,j}}{2\Delta y}) + (\tfrac{\mu m}{\lambda})^n_{i,j+1}\vartheta^n_{i,j+1}\right] \end{gathered} \tag{18}$$

где

$$< \rho^n_{i,j+\frac{1}{2}} >= \rho^n_{i,j} \quad < m^n_{i,j+\frac{1}{2}} >< h^n_{i,j+\frac{1}{2}} >= \frac{1}{4}(m^n_{i,j} + m^n_{i,j+1})(h^n_{i,j} + h^n_{i,j+1}) \tag{19}$$

Учитывая разностные соотношения (18) и (19), согласно (11) можно вычислить дифференциальные приближения для потока массы $\Delta M^n_{i,j+\frac{1}{2}}$. Таким образом, для вычисления потока массы жидкости через границы эйлеровых ячеек установлены соотношения $\Delta M^n_{i-\frac{1}{2},j}$, $\Delta M^n_{i+\frac{1}{2},j}$, $\Delta M^n_{i,j-\frac{1}{2}}$, $\Delta M^n_{i,j+\frac{1}{2}}$. Для вычисления дифференциальных приближений разностных схем необходимо разложить в ряд Тейлора по сеточным параметрам $\Delta x, \Delta y, \Delta t$ гидродинамические величины P, ρ, u, ϑ и параметры пласта $m(x,y,t), h(x,y)$. Алгоритм символьного вычислительного процесса при использовании мощной системы аналитических вычислений Reduce-3 выглядит следующим образом:

1) вначале указывается порядок дифференциального приближения с помощью оператора присваивания.

2) описываются процедуры, позволяющие разложить функции в ряд Тейлора по сеточным параметрам $\Delta x, \Delta y, \Delta t$; здесь используются операторы цикла конструкции FOR ... DO, FOR ... PRODUCT, FOR ... SUM и т.д.

3) в теле программы осуществляется обращение к процедурам и производится разложение необходимых функций в ряд Тейлора.

4) вычисляются дифференциальные приближения потоков массы $\Delta M^n_{i-\frac{1}{2},j}$, $\Delta M^n_{i+\frac{1}{2},j}$, $\Delta M^n_{i,j-\frac{1}{2}}$, $\Delta M^n_{i,j+\frac{1}{2}}$. Приведем гиперболическую форму первого дифференциального приближения разностных схем метода Давыдова для течений жидкости в горизонтальном пласте в рамках модели фильтрации С.А. Христиановича.

$$\begin{aligned} & h\tfrac{\partial\rho m}{\partial t} + div(\rho mhw) = \tfrac{1}{2}(mu\rho_x)_x h\Delta x + \tfrac{1}{2}h\Delta y(m\vartheta\rho_y)_y + \tfrac{1}{2}\Delta x(mu\rho_x h)_x + \tfrac{\Delta y}{2}(m\vartheta\rho_y h)_y + \\ & +\beta\varepsilon^2\Delta t(Phm_x)_x + \beta\varepsilon^2\Delta t(Phm_y)_y + \varepsilon^2\Delta t(P_x hm)_x + \varepsilon^2\Delta t(P_y hm)_y + \\ & +\Delta t(h\rho muu_x)_x + \Delta t(h\rho m\vartheta\vartheta_y)_y + \tfrac{\mu}{\lambda}\Delta t(m^2hu)_x + \tfrac{\mu}{\lambda}\Delta t(m^2h\vartheta)_y + \\ & +\Delta t(\rho u_y hm\vartheta) + \Delta t(\rho um\vartheta_x h)_y - \tfrac{1}{2}\Delta t\Delta x\beta\varepsilon^2\tfrac{\rho_x}{\rho}(Phm_x)_x - \tfrac{\varepsilon^2}{2}\Delta t\Delta x\tfrac{\rho_x}{\rho}(P_X hm)_X - \\ & +\tfrac{1}{2}\Delta t\Delta x\beta\varepsilon^2\tfrac{\rho_Y}{\rho}(Phm_Y)_Y - \tfrac{1}{2}\Delta t\Delta y\tfrac{\rho_y}{\rho}(P_y hm)_y - \tfrac{1}{2}\Delta t\Delta x\tfrac{\mu}{\lambda}\tfrac{\rho_x}{\rho}(hum^2)_x - \tfrac{1}{2}\Delta t\Delta y\tfrac{\rho_y}{\rho}(hm^2\vartheta)_y. \end{aligned}$$

Здесь толщина пласта является функцией $h(x,y)$. В случае $h = const$ гиперболическая форма первого дифференциального приближения уравнения неразрывности имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&h\tfrac{\partial\rho m}{\partial t} + hdiv(\rho mw) = \tfrac{\Delta x}{2}(mu\rho_x)_x + \tfrac{\Delta y}{2}(m\vartheta\rho_y)_y + \varepsilon^2\beta\Delta t(Pm_x)_x +\\
&+\varepsilon^2(mP_x)_x\Delta t + \beta\varepsilon^2\Delta t(Pm_y)_y + \varepsilon^2\Delta t(P_y m)_y + \Delta t(uu_x m\rho)_x + \Delta t(\vartheta\vartheta_y m\rho)_y +\\
&+\tfrac{\mu}{\lambda}\Delta t(m^2u)_x + \tfrac{\Delta t}{\lambda}\mu(m^2\vartheta)_y + \Delta t(\vartheta u_y m\rho)_x + \Delta t(u\vartheta_x m\rho)_y - \tfrac{1}{2}\beta\varepsilon^2\Delta t\Delta x\tfrac{\rho_x}{\rho}(m_X P)_X\\
&-\tfrac{1}{2}\Delta t\Delta x\varepsilon^2\tfrac{\rho_x}{\rho}(P_x m)_x - \tfrac{1}{2}\beta\varepsilon^2\Delta t\Delta y\tfrac{\rho_y}{\rho}(m_y P)_y - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2\Delta t\Delta x\tfrac{\rho_y}{\rho}(mP_y)_y - \tfrac{1}{2}\Delta t\Delta x(uu_x m\rho_x)_x -\\
&\tfrac{1}{2}\Delta t\Delta y(\vartheta\vartheta_y m\rho_y)_y - \tfrac{1}{2}\Delta t\Delta x(u_y\vartheta m\rho_x)_x - -\tfrac{1}{2}\Delta t\Delta x(u\vartheta_x m\rho_y)_y - \tfrac{1}{2}\Delta t\Delta y\tfrac{\mu}{\lambda}\tfrac{\rho_y}{\rho}(m^2\vartheta)_y.
\end{aligned}
$$

Далее, используя гиперболическую форму первого дифференциального приближения, можно получить параболическую форму первого дифференциального приближения и найти элементы матриц аппроксимационных вязкости и дисперсии. Составленная и прошедшая тест программа на языке аналитических вычислений Reduce-3 позволяет найти получить дифференциальные приближения метода Давыдова n-го порядка.

Список литературы

[1] *Давыдов Ю.М.* Крупных частиц метод. В кн.: Математический энциклопедический словарь. - М.: Советская энциклопедия, 1988. - С. 303-304.

[2] *Yuri M. Davydov.* Large-Particle Method. - In.: Encyclopaedia of Mathematics, vol. 5. - Dordrecht/Boston/London: Kluwer academic publishers, 1990, p.p. 358-360.

[3] *Христианович С.А.* Избранные работы. Речная гидравлика. Теория фильтрации. Аэродинамика и газовая динамика. Горное дело. Теория пластичности. Энергетика. - М.: Наука - МФТИ, 1998. - 336 с.

[4] *Давыдов Ю.М., Чечейбаев А.Б.* Моделирование фильтрационных течений в пласте методом крупных частиц при различных моделях фильтрации. / В кн.: Математическое моделирование систем и процессов. Сб. научных трудов. - Пермь: Перм. гос. техн. ун-т, 2000. - С. 66-78.

[5] *Давыдов Ю.М., Чечейбаев Б., Котельников В.А. и др.* Исследование актуальных проблем механики и машиностроения. /Под ред. Ю.М. Давыдова, в 5-ти томах. - М.: Национальная Академия прикладных наук РФ, 1995. - 1658 с.

[6] *Чечейбаев А.Б.* Дифференциальные приближения второго порядка разностных схем метода Давыдова для расчета фильтрационных течений. / В кн.: Актуальные проблемы состояния и развития нефтегазового комплекса. -М.: Мин-во общего и профессионального образования РФ, РГУ нефти и газа им. И.М.Губкина 2001. - С. 65.