# К вопросу о термоупругой деформации тела, погруженного в трехмерное риманово пространство

Н.П. Азанов
*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы*
*e-mail: azanovnp@zmail.ru*

**Аннотация**

В статье рассматриваются условия совместности Бельтрами – Митчелла для тензора напряжений при термоупругой деформации тела, погруженного в трехмерное субпроективное риманово пространство особого типа.

Обсуждается возможность их использования как условий существования полных интегралов для дифференциальных уравнений Пфаффа особого вида.

В работе рассматривается изотропное тело, погруженное в трехмерное субпроективное риманово пространство особого типа, метрика которого может быть приведена [1] к виду:

$$ds^2 = 2dx_1dx_2 + e\varphi(x_1)dx_3^2, \tag{1}$$

где $\varphi$ – произвольная функция от $x_1$, $e = \pm 1$. Тело подвергается бесконечно малой деформации

$$\overline{x}_i = x_i + u_i(x_1, x_2, x_3)\tau.$$

Здесь $u_i(x_1, x_2, x_3)$ - компоненты вектора деформации, $\tau$ - бесконечно малый параметр.

Тензор

$$2\gamma_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i,$$

символ $\nabla$ обозначает ковариантное дифференцирование, бесконечно малой термоупругой деформации состоит из термической деформации $\gamma_{ij}^{(1)}$ и упругой деформации $\gamma_{ij}^{(2)}$:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{(1)} + \gamma_{ij}^{(2)}.$$

При термическом расширении изотропное тело деформируется таким образом, что компоненты деформации $\gamma_{ij}^{(1)}$ определяются выражением

$$\gamma_{ij}^{(1)} = \alpha t g_{ij},$$

где $t$ – обозначает отклонение температуры тела от состояния, когда деформация и напряжение равны нулю, $\alpha$ – коэффициент линейного расширения тела, а $g_{ij}$ - компоненты метрического тензора (1) субпроективного риманова пространства особого типа.

Компоненты упругой деформации $\gamma_{ij}^{(2)}$ определяются соотношением [3]

$$\gamma_{ij}^{(2)} = \frac{1}{E}\left\{(1+\kappa)E_{ij} + \kappa\theta g_{ij}\right\}, \tag{2}$$

где $E_{ij}$ - компоненты тензора напряжений, $\theta = g^{ij}E_{ij}$, $E$ - модуль Юнга и $\kappa$ - коэффициент Пуассона.

Для определения компонент $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$ вектора деформации получаем систему дифференциальных уравнений

$$\nabla_i u_j + \nabla_j u_i = \frac{2}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{ij} + \kappa\theta g_{ij}\right\} + 2\alpha t g_{ij}. \tag{3}$$

При переходе к частным производным эта система приобретает вид:

$$\begin{cases} \partial_1 u_1(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{11}(x_1,x_2,x_3)\right\}; \\[2ex] \partial_1 u_2(x_1,x_2,x_3) + \partial_2 u_1(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{2}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{12}(x_1,x_2,x_3) + \kappa\theta(x_1,x_2,x_3)\right\} + 2\alpha t; \\[2ex] \partial_1 u_3(x_1,x_2,x_3) + \partial_3 u_1(x_1,x_2,x_3) + \dfrac{\varphi'(x_1)}{\varphi(x_1)}u_3(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{2}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right\}; \\[2ex] \partial_2 u_2(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{22}(x_1,x_2,x_3)\right\}; \\[2ex] \partial_2 u_3(x_1,x_2,x_3) + \partial_3 u_2(x_1,x_2,x_3) = \dfrac{2}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{23}(x_1,x_2,x_3)\right\}; \\[2ex] \partial_3 u_3(x_1,x_2,x_3) + \dfrac{1}{2}e\varphi'(x_1)u_2(x_1,x_2,x_3) = \\[2ex] = \dfrac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\,E_{33}(x_1,x_2,x_3) + \kappa\theta(x_1,x_2,x_3)e\varphi(x_1)\right\} + \alpha te\varphi(x_1). \end{cases} \tag{4}$$

Условия совместности [2] системы (4)

$$\nabla_s\nabla_i\gamma_{jk} + \nabla_j\nabla_k\gamma_{si} - \nabla_s\nabla_k\gamma_{ji} - \nabla_j\nabla_i\gamma_{sk} - R^{m}_{sji.}\gamma_{mk} - R^{m}_{sjk.}\gamma_{im} = g_{pk}DR^{p}_{sji.}$$

сводятся к шести ненулевым дифференциальным уравнениям второго порядка

$$(1+\kappa)\left[\partial_{11}E_{22}(x_1,x_2,x_3) + \partial_{22}E_{11}(x_1,x_2,x_3) - 2\partial_{12}E_{12}(x_1,x_2,x_3)\right] - 2\kappa\partial_{12}\theta(x_1,x_2,x_3) = 0; \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\left[\partial_{11}E_{23}(x_1,x_2,x_3) + \partial_{23}E_{11}(x_1,x_2,x_3) - \partial_{13}E_{12}(x_1,x_2,x_3) - \right.\right. \\ \left.\left. -\partial_{12}E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right] - \kappa\partial_{13}\theta(x_1,x_2,x_3)\right\} - \partial_{12}\left\{\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}u_3(x_1,x_2,x_3)\right\} = 0; \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\left[\partial_{11}E_{33}(x_1,x_2,x_3) + \partial_{33}E_{11}(x_1,x_2,x_3) - 2\partial_{13}E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right] + \right. \\ \left. +\kappa e\partial_{11}\left[\theta(x_1,x_2,x_3)\varphi(x_1)\right]\right\} - \frac{e}{2}\partial_{11}\left\{\varphi'(x_1)u_2(x_1,x_2,x_3)\right\} - \partial_{13}\left\{\frac{\varphi'(x_1)}{\varphi(x_1)}u_3(x_1,x_2,x_3)\right\} + \\ +\alpha te\varphi''(x_1) = 0; \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} \frac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\left[\partial_{12}E_{23}(x_1,x_2,x_3) + \partial_{23}E_{12}(x_1,x_2,x_3) - \partial_{13}E_{22}(x_1,x_2,x_3) - \right.\right. \\ \left.\left. -\ \partial_{22}E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right] + \kappa\partial_{23}\theta(x_1,x_2,x_3)\right\} - \frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}\partial_{22}u_3(x_1,x_2,x_3) = 0; \end{gathered} \tag{8}$$

$$\frac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\left[\partial_{12}E_{33}(x_1,x_2,x_3)+\partial_{33}E_{12}(x_1,x_2,x_3)-\partial_{13}E_{23}(x_1,x_2,x_3)-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\partial_{23}E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right]+\kappa\left[e\partial_{12}\left(\varphi(x_1)\theta(x_1,x_2,x_3)\right)+\partial_{33}\theta(x_1,x_2,x_3)\right]\right\}- \tag{9}$$
$$-\frac{e}{2}\partial_{12}\left\{\varphi'(x_1)u_2(x_1,x_2,x_3)\right\}-\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}\partial_{23}u_3(x_1,x_2,x_3)=0;$$

$$\frac{1}{E}\left\{(1+\kappa)\left[\partial_{22}E_{33}(x_1,x_2,x_3)+\partial_{33}E_{22}(x_1,x_2,x_3)-2\partial_{23}E_{23}(x_1,x_2,x_3)\right]+\right.$$
$$\left.+\kappa e\varphi(x_1)\partial_{22}\theta(x_1,x_2,x_3)\right\}-\frac{e\varphi'(x_1)}{2}\partial_{22}u_2(x_1,x_2,x_3)=0. \tag{10}$$

Уравнения (5) - (10) являются аналогами уравнений Бельтрами - Митчелла [2] для термоупругой деформации тела, погруженного в трехмерное субпроективное риманово пространство особого типа (1).

Уравнения (5), (7) и (8) можно интерпретировать как необходимые и достаточные условия того, что дифференциальное уравнение

$$\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1E_{12}(x_1,x_2,x_3)-\partial_2E_{11}(x_1,x_2,x_3)\right)+\frac{\kappa}{E}\partial_1\theta(x_1,x_2,x_3)\right]dx_1+$$
$$+\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1E_{22}(x_1,x_2,x_3)-\partial_2E_{12}(x_1,x_2,x_3)\right)-\frac{\kappa}{E}\partial_2\theta(x_1,x_2,x_3)\right]dx_2+ \tag{11}$$
$$+\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1E_{23}(x_1,x_2,x_3)-\partial_2E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right)-\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}\partial_2u_3(x_1,x_2,x_3)\right]dx_3=0$$

имеет полный интеграл

$$\omega_1(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_0^{x_1}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1E_{12}(\lambda,x_2,x_3)-\partial_2E_{11}(\lambda,x_2,x_3)\right)+\frac{\kappa}{E}\partial_1\theta(\lambda,x_2,x_3)\right]d\lambda+$$
$$+\int\limits_0^{x_2}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1E_{22}(0,\mu,x_3)-\partial_2E_{12}(0,\mu,x_3)\right)-\frac{\kappa}{E}\partial_2\theta(0,\mu,x_3)\right]d\mu+ \tag{12}$$
$$+\int\limits_0^{x_3}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1E_{23}(0,0,\nu)-\partial_2E_{13}(0,0,\nu)\right)-\frac{\varphi'(0)}{2\varphi(0)}\partial_2u_3(0,0,\nu)\right]d\nu+\omega_1(0,0,0),$$

где $\omega_1(0,0,0)$ - некоторая константа. Причем

$$\partial_3\omega_1(x_1,x_2,x_3)=\frac{1+\kappa}{E}\left\{\partial_1E_{23}-\partial_2E_{13}\right\}(x_1,x_2,x_3)-\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}\partial_2u_3(x_1,x_2,x_3).$$

Уравнения (8), (9) и (10) можно интерпретировать как необходимые и достаточные условия того, что дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_2 E_{13}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{12}(x_1,x_2,x_3)\right)-\frac{\kappa}{E}\partial_3\theta(x_1,x_2,x_3)+\right.\\&\left.+\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}\partial_2 u_3(x_1,x_2,x_3)\right]dx_1+\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_2 E_{23}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{22}(x_1,x_2,x_3)\right)\right]dx_2+\\&+\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_2 E_{33}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{23}(x_1,x_2,x_3)\right)+\frac{e\kappa}{E}\varphi(x_1)\partial_2\theta(x_1,x_2,x_3)-\right.\\&\left.-\frac{e\varphi'(x_1)}{2}\partial_2 u_2(x_1,x_2,x_3)\right]dx_3=0\end{aligned}\tag{13}$$

имеет полный интеграл

$$\begin{aligned}&\omega_2(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_0^{x_1}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_2 E_{13}(\lambda,x_2,x_3)-\partial_3 E_{12}(\lambda,x_2,x_3)\right)-\frac{\kappa}{E}\partial_3\theta(\lambda,x_2,x_3)+\right.\\&\left.+\frac{\varphi'(\lambda)}{2\varphi(\lambda)}\partial_2 u_3(\lambda,x_2,x_3)\right]d\lambda+\int\limits_0^{x_2}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_2 E_{23}(0,\mu,x_3)-\partial_3 E_{22}(0,\mu,x_3)\right)\right]d\mu+\\&+\int\limits_0^{x_3}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_2 E_{33}(0,0,\nu)-\partial_3 E_{23}(0,0,\nu)\right)+\frac{e\kappa}{E}\varphi(0)\partial_2\theta(0,0,\nu)-\right.\\&\left.-\frac{e\varphi'(0)}{2}\partial_2 u_2(0,0,\nu)\right]d\nu+\omega_2(0,0,0),\end{aligned}\tag{14}$$

где $\omega_2(0,0,0)$ - некоторая константа. Причем

$$\partial_1\omega_2(x_1,x_2,x_3)=\frac{1+\kappa}{E}\left\{\partial_2 E_{13}-\partial_3 E_{12}\right\}(x_1,x_2,x_3)+\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}\partial_2 u_3(x_1,x_2,x_3)-\frac{\kappa}{E}\partial_3\theta(x_1,x_2,x_3).$$

Уравнения (6), (7) и (9) можно интерпретировать как необходимые и достаточные условия того, что дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{13}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{11}(x_1,x_2,x_3)\right)+\partial_1\left\{\frac{\varphi'(x_1)}{2\varphi(x_1)}u_3(x_1,x_2,x_3)\right\}\right]dx_1+\\&\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{23}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{12}(x_1,x_2,x_3)\right)-\frac{\kappa}{E}\partial_3\theta(x_1,x_2,x_3)\right]dx_2+\\&+\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{33}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{13}(x_1,x_2,x_3)\right)+\frac{e\kappa}{E}\partial_1\left\{\varphi(x_1)\theta(x_1,x_2,x_3)\right\}-\right.\\&\left.-\frac{e}{2}\partial_1\left\{\varphi'(x_1)u_2(x_1,x_2,x_3)\right\}-\partial_3\left(\frac{\varphi'(x_3)}{2\varphi(x_1)}u_3(x_1,x_2,x_3)\right)\right]dx_3=0\end{aligned}\tag{15}$$

имеет полный интеграл

$$
\begin{aligned}
&\omega_3(x_1,x_2,x_3)=\int\limits_0^{x_1}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{13}(\lambda,x_2,x_3)-\partial_3 E_{11}(\lambda,x_2,x_3)\right)+\right.\\
&\left.+\partial_1\left\{\frac{\varphi'(\lambda)}{2\varphi(\lambda)}u_3(\lambda,x_2,x_3)\right\}\right]d\lambda+\int\limits_0^{x_2}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{23}(0,\mu,x_3)-\partial_3 E_{12}(0,\mu,x_3)\right)-\right.\\
&\left.-\frac{\kappa}{E}\partial_3\theta(0,\mu,x_3)\right]d\mu+\int\limits_0^{x_3}\left[\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{33}(0,0,\nu)-\partial_3 E_{13}(0,0,\nu)\right)+\right.\\
&\left.+\frac{e\kappa}{E}\partial_1\left\{\varphi(0)\theta(0,0,\nu)\right\}-\frac{e}{2}\partial_1\left\{\varphi'(0)u_2(0,0,\nu)\right\}-\partial_3\left(\frac{\varphi'(0)}{2\varphi(0)}u_3(0,0,\nu)\right)\right]d\nu+\\
&+\omega_3(0,0,0),
\end{aligned}
\tag{16}
$$

где $\omega_3(0,0,0)$ - некоторая константа. Причем

$$\partial_2\omega_3(x_1,x_2,x_3)=\frac{1+\kappa}{E}\left(\partial_1 E_{23}(x_1,x_2,x_3)-\partial_3 E_{12}(x_1,x_2,x_3)\right)-\frac{\kappa}{E}\partial_3\theta(x_1,x_2,x_3).$$

Таким образом, условия интегрируемости (5) - (10) в случае метрики (1) могут быть интерпретированы как условия существования полных интегралов (12), (14) и (16) для дифференциальных уравнений (11), (13) и (15).

Заметим, что частные производные полных интегралов связаны соотношением

$$\partial_1\omega_2(x_1,x_2,x_3)-\partial_2\omega_3(x_1,x_2,x_3)+\partial_3\omega_1(x_1,x_2,x_3)=0.$$

## Список литературы


[1] *Кручкович Г.И.*, О пространствах В.Ф. Кагана. // в. кн. В.Ф. Каган. Субпроективные пространства. - М.: ФМЛ, 1961. - С. 163 - 198.

[2] *Азанов Н.П.*, Уравнения совместности Сен-Венана и Бельтрами-Митчелла в римановом пространстве. // Труды геометрического семинара. Вып. 19., Казань, 1989. - С. 9 - 13.

[3] *Азанов Н.П.*, Бесконечно малая термоупругая деформация тела, погруженного в риманово пространство. // Вестник КазНУ. Сер. мат., мех., инф. 2010. №2(65). - С. 3 - 10.