О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения

Н.С. Иманбаев
Шымкентский институт Международного казахско-турецкого ун-тета им. Х.А. Ясави
e-mail: imanbaevnur@mail.ru

Аннотация

В работе рассматривается спектральная задача для оператора кратного дифференцирования с интегральным возмущением в одном из периодических краевых условиях. Построен характеристический определитель спектральной задачи. Показано, что свойство базисности систем корневых функций задачи может меняться при каком угодно малом изменении ядра интегрального возмущения.

Хорошо известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортонормированный базис пространства L_2. Во многих работах исследовался вопрос о сохранении свойств базисности при некотором (слабом в определенном смысле) возмущении исходного оператора. Например, для случая самосопряженного исходного оператора аналогичный вопрос исследовался в [1 - 3], а для несамосопряженного - в [4]. В настоящей работе рассматривается, близкая к исследованиям [3], спектральная задача:

$$l(u) \equiv -u''(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$U_1(u) \equiv u'(0) - u'(1) = 0, \tag{2}$$

$$U_2(u) \equiv u(0) - u(1) = \int_0^1 \overline{p(x)} u(x) dx, \quad p(x) \in L_1(0,1). \tag{3}$$

Если $p(x) \equiv 0$, то задача (1) - (3) является самосопряженной, а система ее собственных функций - обычной тригонометрической системой и образует ортонормированный базис в $L_2(0,1)$. В [3] исследованы вопросы устойчивости базисных свойств периодической задачи для уравнения (1), при возмущении краевого условия (2).

Вопрос о базисности корневых функций оператора с более общими интегральными краевыми условиями положительно решен в [5], где доказана базисность Рисса со скобками при условии регулярности по Биркгофу [6, с.66-67] краевых условий невозмущенной задачи; а при дополнительном предположении усиленной регулярности - базисность Рисса. В нашем случае невозмущенные краевые условия (2), (3) являются регулярными, но не усиленно регулярными краевыми условиями. Поэтому для него не применимы результаты [5], а требуется дополнительное исследование. Из работы [5] следует, что система собственных и присоединенных функций задачи (1) - (3) полна и минимальна в $L_2(0,1)$. В настоящей работе мы построим характеристический определитель спектральной задачи (1)-(3) На основании полученной формулы делаются выводы о неустойчивости свойств базисности Рисса системы собственных функций задачи при интегральном возмущении краевого условия. Одной из особенностей рассматриваемой задачи является то, что сопряженной к (1)-(3), является спектральная задача для нагруженного дифференциального уравнения:

$$l^*(v) = -v''(x) + p(x)v'(0) = \overline{\lambda} v(x), \quad U_1(v) = 0, \quad U_2(v) = 0. \tag{4}$$

Построим сначала характеристический определитель спектральной задачи. Представляя общее решение уравнения (1) по формуле $u(x,\lambda) = C_1 cos\sqrt{\lambda}x + C_2 sin\sqrt{\lambda}x$, и удовлетворяя его краевым условиям (2),(3), получаем линейную систему относительно коэффициентов C_k:

$$\begin{cases} C_1[sin\sqrt{\lambda}] + C_2[1 - cos\sqrt{\lambda}] = 0, \\ C_1\left[1 - cos\sqrt{\lambda} - \int_1^0 \overline{p(x)} cos\sqrt{\lambda}x dx\right] + C_2\left[-sin\sqrt{\lambda} - \int_1^0 \overline{p(x)} sin\sqrt{\lambda}x dx\right] = 0. \end{cases}$$

Ее определитель и будет характеристическим определителем задачи (1)-(3):

$$\triangle_1(\lambda) = \begin{vmatrix} sin\sqrt{\lambda} & 1 - cos\sqrt{\lambda} - \int_1^0 \overline{p(x)} cos\sqrt{\lambda}x dx \\ 1 - cos\sqrt{\lambda} & -sin\sqrt{\lambda} - \int_1^0 \overline{p(x)} sin\sqrt{\lambda}x dx \end{vmatrix} \tag{5}$$

Легко видеть, что характеристический определитель невозмущенной задачи (1)-(3) получается отсюда при $p(x) = 0$. Обозначим его через $\triangle_0(\lambda) = -2(1 - cos\sqrt{\lambda})$. Очевидно, что собственными значениями невозмущенной периодической задачи являются $\lambda_k^0 = (2k\pi)^2$, а собственными функциями $u_{k0}^0 = \sqrt{2}cos(2k\pi)x, \quad u_{k1}^0 = \sqrt{2}sin(2k\pi)x.$

Функцию $p(x)$ представим в виде ряда Фурье по тригонометрической системе:

$$p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[a_k cos(2k\pi)x + b_k sin(2k\pi)x]. \tag{6}$$

Используя (6), найдем более удобное представление определителя $\triangle_1(\lambda)$. Для этого сначала вычислим входящие в (5) интегралы. Несложные вычисления показывают, что

$$\int_1^0 \overline{p(x)} cos\sqrt{\lambda}x dx = \overline{a_0}\frac{sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\overline{a_k}\sqrt{\lambda}sin\sqrt{\lambda} + \overline{b_k}2k\pi(cos\sqrt{\lambda} - 1)]}{\lambda - (2k\pi)^2},$$

$$\int_1^0 \overline{p(x)} sin\sqrt{\lambda}x dx = \overline{a_0}\frac{1 - cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[\overline{a_k}\sqrt{\lambda}(1 - cos\sqrt{\lambda}) + \overline{b_k}2k\pi sin\sqrt{\lambda}]}{\lambda - (2k\pi)^2}.$$

Откуда стандартными преобразованиями определитель (5) приводится к виду:

$$\triangle_1(\lambda) = \triangle_0(\lambda)A(\lambda), \quad A(\lambda) = \left[1 + \sum_{k=1}^{\infty}\overline{b_k}\frac{2k\pi}{\lambda - (2k\pi)^2}\right]. \tag{7}$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 1. *Характеристический определитель задачи (1)-(3) с возмущенными краевыми условиями представим в виде (7), где $\triangle_0(\lambda)$ - характеристический определитель невозмущенной задачи, а b_k - коэффициенты разложения (6) функции $p(x)$ в тригонометрический ряд Фурье.*

В представлении (7) функция $A(\lambda)$ имеет полюса в точках $\lambda = \lambda_k^0$ первого порядка. Однако в этих же точках функция $\triangle_0(\lambda)$ имеет нули второго порядка. Поэтому функция $\triangle_1(\lambda)$, представленная по формуле (7) является целой аналитической функцией переменного λ.

Более просто характеристический определитель (7) выглядит в случае, когда $p(x)$ представляется в виде конечной суммы в (6). То есть, когда существует такой номер N, что $a_k = b_k = 0$ для всех $k > N$. В этом случае формула (7) принимает вид

$$\triangle_1(\lambda) = \triangle_0(\lambda) \left[1 + \sum_{k=1}^{N} \overline{b_k} \frac{2k\pi}{\lambda - (2k\pi)^2} \right] \tag{8}$$

Из этого частного случая формулы (7) несложно обосновать следующее

Следствие 1. *Для любых наперед заданных чисел - комплексного $\widehat{\lambda}$ и натурального $\widehat{m}$ всегда существует такая функция $p(x)$, что $\widehat{\lambda}$ будет являться собственным значением задачи (1)-(3) кратности $\widehat{m}$.*

Из анализа формулы (8) также легко видеть, что $\triangle_1(\lambda_k^0) = 0$ для всех $k > N$. То есть все собственные значения $\lambda_k^0, k > N$ невозмущенной периодической задачи являются собственными значениями возмущенной задачи (1)-(3). Также не трудно убедиться, что сохраняется и кратность собственных значений $\lambda_k^0, k > N$.

Более того, из условия ортогональности тригонометрической системы следует, что в этом случае $\int_1^0 \overline{p(x)} u_{kj}^0(x)dx = 0, j = \overline{0,1}, k > N$. Поэтому собственные функции $u_{kj}^0(x)$ периодической задачи при $k > N$ удовлетворяют краевым условиям (2),(3) и, следовательно, являются собственными функциями задачи (1)-(3). Значит в этом случае системы собственных функций задачи (1)-(3) и система собственных функций периодической задачи (образующая ортонормированный базис) отличаются друг от друга лишь по конечному числу первых членов. Следовательно, система собственных функций задачи (1)-(3) также образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Очевидно, что множество функций $p(x)$, представимых в виде конечного ряда (6), является плотным в $L_1(0,1)$. Таким образом, доказана

Теорема 2. *Множество функций $p(x) \in L_1(0,1)$ таких, что система собственных функций задачи (1)-(3) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_1(0,1)$.*

Покажем теперь, что свойство базисности системы собственных функций задачи (1)-(3) является неустойчивым при сколь угодно малом интегральном возмущении краевого условия (3).

Теорема 3. *Множество функций $p(x) \in L_1(0,1)$ таких, что система собственных функций задачи (1)-(3) не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$, является плотным в $L_1(0,1)$.*

Доказательство. Пусть в разложении (6) коэффициенты $b_k \neq 0$для всех достаточно больших k. Тогда из (7) не трудно видеть, что $\lambda = \lambda_k^0$ является простым собственным значением задачи (1)-(3). Легко проверить, что $u_k^1 = b_k cos(2k\pi)x - a_k sin(2k\pi)x$ являются собственными функциями задачи (1)-(3), соответствующими $\lambda_k^0 = (2k\pi)^2$. При этом собственной функцией сопряженной задачи (4), соответствующей собственному значению λ_k^0, является $v_k^1(x) = c_k cos(2k\pi)x$.

Так как собственные функции сопряженных задач образуют биортогональную систему, то имеем равенство единице скалярного произведения $(u_k^1, v_k^1) = 1$. Отсюда легко получаем $b_k \overline{c_k} = 2$. Поэтому

$$||u_k^1|| \cdot ||v_k^1|| = \sqrt{1 + \left| \frac{a_k}{b_k} \right|^2}. \tag{9}$$

Обозначим через $\sigma_N(x)$ - частичную сумму ряда Фурье (6). Очевидно, что множество функций, представимых в виде бесконечного ряда $\widetilde{p(x)} = \sigma_N(x) + \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} [\widetilde{a_k} cos(2k\pi)x + \widetilde{b_k} sin(2k\pi)x]$, где $\widetilde{a_k} = 2^{-k}$, $\widetilde{b_k} = 2^{-k} \big/ k$, $k > N$, является плотным в $L_1(0,1)$. Но из (9) следует, что при таких функциях $\widetilde{p(x)}$ для соответствующих систем собственных функций прямой и сопряженной задач имеет место $\lim\limits_{k\to\infty} ||u_k^1|| ||v_k^1|| = \infty$.

То есть не выполнено условие равномерной минимальности [7, с. 66] системы и, следовательно, она не образует даже обычного базиса в $L_2(0,1)$. Теорема 3 доказана.

Так как сопряженные операторы одновременно обладают свойством базисности Рисса корневых функций, то отсюда получаем

Следствие 2. *Множество P функций $p(x) \in L_1(0,1)$, для которых система собственных функций задачи (4) для нагруженного дифференциального уравнения образует базис Рисса в $L_2(0,1)$, всюду плотно в $L_1(0,1)$. Множество $L_1(0,1) \backslash P$ также всюду плотно в $L_1(0,1)$.*

Отметим, что в [8] исследованы вопросы устойчивости базисных свойств периодической задачи для нагруженного уравнения с нагрузкой вида $p(x)v(0)$.

Результаты настоящей работы, в отличие от [5], демонстрируют неустойчивость свойств базисности корневых функций задачи при интегральном возмущении краевых условий, являющихся регулярными, но не усиленно регулярными.

В заключение, автор выражает признательность д.ф.-м.н., профессору М.А. Садыбекову за плодотворное обсуждение результатов.

Список литературы

[1] *Маркус А.С.* О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора // Докл. АН СССР. 1962. №3, Т.142. – С. 538 – 341.

[2] *Керимов Н.Б., Мамедов Х.Р.* О базисности Рисса корневых функций некоторых регулярных краевых задач // Матем.заметки. – 1998. – Т.64, Вып.4. – С. 448 – 563.

[3] *Макин А.С.* О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференц. уравнения. – 2006. №4, Т.42. – С. 560 – 562.

[4] *Ильин В.А., Крицков Л.В.* Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. – М.: ВИНИТИ, 2006. – Т.96. – С. 5 – 105.

[5] *Шкаликов А.А.* О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестник МГУ. Математика и механика. – 1982. – №6. – С. 12 – 21.

[6] *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. –М. – 1969.

[7] *под ред. Крейна* Функциональный анализ. –М. – 1972.

[8] *Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А.* Базисные свойства корневых функций нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Доклады НАН РК. 2010. №2. – С. 11 – 13.