Уравнения геодезических метрики Карно-Каратеодори на трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$

А.Д. Мажитова
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы
e-mail: Akmaral.Mazhitova@kaznu.kz

Аннотация

В этой работе мы продолжаем решать субриманову задачу на второй трехмерной разрешимой группе Ли $SOLV^+$ согласно классификационной теореме Аграчева-Барилари [1]. Построение Гамильтоновой системы и дифференциальные уравнения для геодезических было сделано в предыдущей работе. Теперь мы проинтегрируем эти уравнения, что возможно только с помощью привлечения эллиптических функций. Случай геометрии $SOLV^-$ мы рассмотрели в работах [7], [8].

Для трехмерной группы Ли $SOLV^+$ представленную матрицами вида

$$\begin{pmatrix} \cos z & \sin z & x \\ -\sin z & \cos z & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

алгебра Ли которой построена на базисных векторах

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

с коммутационными отношениями

$$[a_1, a_2] = 0; \quad [a_1, a_3] = -a_2; \quad [a_2, a_3] = a_1,$$

и левоинвариантной метрикой

$$< a_i, a_j >= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

мы построили функцию Гамильтона

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{4}(1 + \sin 2z)p_x^2 + \frac{1}{2}(\cos 2z)p_x p_y + \frac{1}{4}(1 - \sin 2z)p_y^2 + \frac{1}{2}p_z^2. \tag{4}$$

Из известных равенств, выполняющихся для функции Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z},$$

$$\dot{p_x} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p_y} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{p_z} = -\frac{\partial H}{\partial z},$$

где точка означает производную по t, выпишем уравнения Гамильтона для (4)

$$\begin{aligned}
&\dot{x} = \frac{1}{2}(1+\sin 2z)p_x + \frac{1}{2}(\cos 2z)p_y \\
&\dot{y} = \frac{1}{2}(\cos 2z)p_x + \frac{1}{2}(1-\sin 2z)p_y \\
&\dot{z} = p_z \\
&\dot{p_x} = 0 \\
&\dot{p_y} = 0 \\
&\dot{p_z} = -\frac{1}{2}(\cos 2z)p_x^2 + (\sin 2z)p_x p_y + \frac{1}{2}(\cos 2z)p_y^2.
\end{aligned} \tag{5}$$

Система (5) имеет три первых интеграла:

$$I_1 = H, \quad I_2 = p_x, \quad I_3 = p_y,$$

значит наша система дифференциальных уравнений (5) полностью интегрируема. Не теряя общности, будем считать, что все геодезические берут начало в единице группы, то есть справедливы следующие начальные условия для системы (5):

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0. \tag{6}$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$H = \frac{1}{2}, \quad \frac{p_x}{\sqrt{2}} = a, \quad \frac{p_y}{\sqrt{2}} = b.$$

Подставим это все в гамильтониан (4) и получим

$$1 = \frac{1}{2}(1+\sin 2z)p_x^2 + (\cos 2z)p_x p_y + \frac{1}{2}(1-\sin 2z)p_y^2 + p_z^2, \tag{7}$$

значит,

$$p_z^2 = 1 - a^2(1+\sin 2z) - 2ab\cos 2z - b^2(1-\sin 2z),$$

$$p_z^2 = 1 - a^2 - b^2 - 2ab\cos 2z + (b^2 - a^2)\sin 2z.$$

Обозначим $A = 1 - a^2 - b^2, B = -2ab, C = b^2 - a^2$, тогда из третьего уравнения системы (5) найдем равенство для нахождения переменной t, подставив полученное выше выражение для p_z

$$t = \int \frac{dz}{\sqrt{A + B\cos 2z + C\sin 2z}}. \tag{8}$$

сделаем замену переменных $\varphi = 2z$, тогда (8) перепишется в виде

$$t = \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{A + B\cos\varphi + C\sin\varphi}}. \tag{9}$$

Этот интеграл с помощью замены $\varphi = 2\psi + \alpha, \ \tan\alpha = \dfrac{C}{B}, \ p = \sqrt{B^2 + C^2}$ приводится к эллиптическому интегралу в нормальной тригонометрической форме

$$t = \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\sqrt{A + B\cos\varphi + C\sin\varphi}} = \frac{1}{2}\cdot 2\int \frac{d\psi}{\sqrt{A - p + 2p\cos^2\psi}} =$$
$$= \int \frac{d\psi}{\sqrt{A + p - 2p\sin^2\psi}}.$$

Так как $A + p = 1, \ \ p = a^2 + b^2$, получим

$$t = \int \frac{d\psi}{\sqrt{1 - 2(a^2 + b^2)\sin^2\psi}}.$$

Сделав еще одну замену $v = \sin\psi$, получим интеграл Якоби

$$t = \int_0^{\mathrm{sn} t} \frac{dv}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - k^2v^2)}},$$

где $k^2 = 2(a^2 + b^2)$.

Таким образом,

$$v = \mathrm{sn}(t, k).$$

Произведем все обратные замены, $v = \sin\psi$, а $\varphi = 2\psi + \alpha = 2z$, тогда, $\psi = z - \frac{\alpha}{2}$, значит

$$\sin\psi = \mathrm{sn}(t, k),$$

имея ввиду, что $\mathrm{sn}(t, k) = \sin(\mathrm{am}(t, k))$

$$z - \frac{\alpha}{2} = \mathrm{am}(t, k),$$

$$z = \mathrm{am}(t, k) + \frac{\alpha}{2} + C_1,$$

где $C_1 - const$ - константа интегрирования. Учитывая начальные условия, а также, что $\mathrm{am}(0, k) = 0$, запишем

$$z(t) = \mathrm{am}(t, k).$$

Теперь выпишем интегралы для $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(1 + 2\mathrm{sn}(t,k)\cdot\mathrm{cn}(t,k)\right) + \frac{b}{\sqrt{2}}\left(\mathrm{cn}^2(t,k) - \mathrm{sn}^2(t,k)\right),$$

$$x(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\left(1 + 2\mathrm{sn}(t,k)\cdot\mathrm{cn}(t,k)\right)dt + \frac{b}{\sqrt{2}}\int\left(1 - 2\mathrm{sn}^2(t,k)\right)dt;$$

и для $y(t)$:

$$y(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}\int\left(1 - 2\mathrm{sn}^2(t,k)\right)dt + \frac{b}{\sqrt{2}}\int\left(1 - 2\mathrm{sn}(t,k)\cdot\mathrm{cn}(t,k)\right)dt.$$

Используя известные формулы:

$$\frac{d\mathrm{dn}u}{du} = -k^2\mathrm{sn}u\cdot\mathrm{cn}u,$$

$$\int\mathrm{sn}^2u\,du = \frac{1}{k^2}\left\{\mathrm{E}(\mathrm{am}u,k) - k'^2u\right\},$$

и учитывая начальные условия, вычислим

$$x(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}bk'^2}{k^2}\right)t$$

$$-\frac{\sqrt{2}a}{k^2}\mathrm{dn}(t,k) - \frac{\sqrt{2}b}{k^2}\mathrm{E}(\mathrm{am}(t,k),k) + \frac{\sqrt{2}a}{k^2};$$

$$y(t) = \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}ak'^2}{k^2} + \frac{b}{\sqrt{2}}\right)t+$$

$$+\frac{\sqrt{2}b}{k^2}\mathrm{dn}(t,k) - \frac{\sqrt{2}a}{k^2}\mathrm{E}(\mathrm{am}(t,k),k) - \frac{\sqrt{2}b}{k^2}.$$

Таким образом общие уравнения для геодезических следующие:

$$\begin{aligned}
&x(t) = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}bk'^2}{k^2}\right)t - \frac{\sqrt{2}a}{k^2}\mathrm{dn}(t,k) - \frac{\sqrt{2}b}{k^2}\mathrm{E}(\mathrm{am}(t,k),k) + \frac{\sqrt{2}a}{k^2},\\
&y(t) = \left(\frac{a+b}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}ak'^2}{k^2}\right)t + \frac{\sqrt{2}b}{k^2}\mathrm{dn}(t,k) - \frac{\sqrt{2}a}{k^2}\mathrm{E}(\mathrm{am}(t,k),k) - \frac{\sqrt{2}b}{k^2},\\
&z(t) = \mathrm{am}(t,k).
\end{aligned}\tag{10}$$

Список литературы

[1] *A.Agrachev, and D. Barilari*, Sub-Riemannian structures on 3D Lie groups, arXiv:1007, 4970.

[2] *А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков*, Геометрическая теория управления, - М.: Физматлит, 2005. - 392 с.

[3] *Е.П. Аксенов*, Специальные функции в небесной механике, - М: Наука, 1986. - 321 с.

[4] *U.Boscain, F.Rossi*, Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces, - Preprint SISSA, 2007. - 24 p.

[5] *O.Calin, D.-Ch.Chang, I.Markina*, SubRiemannian geometry on the sphere S^3. //arxiv.org>math>arXiv:0804.1695, - 2008. - 13 p.

[6] *И.С. Градштейн, И.М.Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, - М.: Физматгиз, 1963. - 1100 с.

[7] *А.Д. Мажитова*, Суб-Риманова задача на трехмерной разрешимой группе Ли, - Вестник КазНУ, серия Математика, механика, информатика, № 2(65), 2010 г., Стр. 11-18.

[8] *А.Д. Мажитова*, Геодезический поток субримановой метрики на трехмерной разрешимой группе Ли SOLV. - Сборник материалов Международной научно-практической конференции "Математическое и компьютерное моделирование экологических процессов и актуальные проблемы современного образования 20 октября 2010 года, Тараз. - Стр.279-283.

[9] *Ю.Л. Сачков*, Управляемость и симметрии инвариантных систем на группах Ли и однородных пространствах.М: Физматлит, 2007.

[10] *I.A.Taimanov*, Integrable geodesic flows of non-holonomic metrics. // J.Dynam. Control Sistem 3(1997), - 129-147 p.