О существовании u – ультрафильтров и их свойствах

А.А. Чекеев, М.А. Абдраимова
Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан
e-mail: asyl.ch.top@mail.ru*;* maxabat1105@mail.ru

Аннотация

В этой статье рассматриваются u – ультрафильтры, состоящие из равномерно открытых конуль - множеств. Устанавливаются различные свойства u – ультрафильтров.

Введение

В фундаментальной работе П.С. Александрова [8] при помощи вполне регулярных концов построено Стоун – Чеховское бикомпактное расширение тихоновского пространства. В данной работе доказывается существование u – ультрафильтров, которые являются равномерным аналогом вполне регулярных концов Александрова

1. Необходимые сведения.

Ниже мы воспроизведем нужные нам в дальнейшем свойства равномерно открытых (равномерно конуль) и равномерно замкнутых (равномерно нуль) множеств, введенных М.Г. Хараламбусом ([4-6]).

Каждое равномерное пространство обозначим как uX([1]), где u - равномерность на тихоновском пространстве X, заданная при помощи равномерных покрытий. Через $C^*(uX)$ обозначается множество всех равномерно непрерывных ограниченных функций на равномерном пространстве uX. Для метрического пространства (M, d) через u_d обозначается метрическая равномерность пространства M.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 ([4-6]). Подмножество $F \subset X$ равномерного пространства uX называется *равномерно замкнутым*, если существует такое равномерно непрерывное отображение $f : uX \to u_dM$, что $F = f^{-1}(N)$, где $N \subset M$ замкнутое подмножество равномерного пространства u_dM.

Дополнение до *равномерно замкнутого множества* называется *равномерно открытым.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 ([4-6]). Подмножество $F \subset X$ равномерного пространства uX называется *равномерно нуль – множеством*, если $F = f^{-1}(0)$ для некоторой функции $f \in C^*(uX)$.

Дополнение до равномерно *нуль - множества* называется равномерно *конуль - множеством.* Другими словами подмножество $U \subset X$ равномерного пространства uX является равномерно *конуль – множеством*, если $U = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ для некоторой функции $f \in C^*(uX)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 ([4-6]). *Подмножество $F \subset X$ ($U \subset X$) равномерно замкнуто (равномерно открыто) тогда и только тогда, когда оно является равномерно нуль (конуль) – множеством.*

Через $\mathfrak{Z}(uX)$ $(\mathcal{L}(uX))$ обозначим семейство всех равномерно нуль (конуль) - множеств.

ТЕОРЕМА 1.4 ([4 - 6]). *Для равномерного пространства uX семейство $\mathfrak{Z}(uX)$ $(\mathcal{L}(uX))$ всех равномерно нуль (конуль) – множеств образует базу замкнутых (открытых) множеств.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 ([4-6]). Функция $f : uX \to I = [0; 1]$ называется *C_u^*-функцией,* если $f^{-1}(U)$ является равномерно конуль – множеством для любого открытого множества $U \subset I$, или, что эквивалентно, $f^{-1}(F)$ является равномерно нуль – множеством для любого замкнутого множества $F \subset I$, т.е. $f^{-1}(F) \in \mathfrak{Z}(uX)$ и $f^{-1}(U) \in \mathcal{L}(uX)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.6 ([4]). *Семейство $\mathfrak{Z}(uX)\,(\mathcal{L}(uX))$ замкнуто относительно конечных (счетных) объединений и счетных (конечных) пересечений.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.7 ([4], Лемма 3). *Пусть $F_1, F_2 \in \mathfrak{Z}(uX)$ и $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Тогда существует такая C_u^*- функция $f : uX \to I$, что $F_1 = f^{-1}(0)$ и $F_2 = f^{-1}(1)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $F_1, F_2 \in \mathfrak{Z}(uX)$, что существуют такие равномерно непрерывные функции $g_i : uX \to I$, что $F_1 = g_1^{-1}(0)$ и $F_2 = g_2^{-1}(0)$. По условию $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, следовательно $g_1 + g_2 > 0$. Положим $f = g_1/(g_1 + g_2)$, $f(x) = g_1(x)/(g_1(x) + g_2(x))$. Тогда имеем функцию $f : uX \to I$, которая, в общем случае, не является равномерно непрерывной. Имеем $F_1 = f^{-1}(0)$ и $F_2 = f^{-1}(1)$ и для любых $0 < a,\ b < 1$ имеем:

$$f^{-1}([0; a)) = \cup \left\{ g_1^{-1}([0, pa/(1-a))) \cap g_2^{-1}((p; 1]) : p \in \mathbb{Q}_p \right\},$$
$$f^{-1}((b, 1]) = \cup \left\{ g_1^{-1}((pb/(1-b), 1]) \cap g_2^{-1}([0, p)) : p \in \mathbb{Q}_p \right\},$$

где $\mathbb{Q}_p \subset I$ множество всех рациональных чисел интервала $[0; 1]$. Согласно предложению 1.6., $f^{-1}([0; a))$ и $f^{-1}((b, 1])$ - равномерно конуль – множества, т.е. $f^{-1}([0, a)) \in \mathcal{L}(uX)$ и $f^{-1}((b, 1]) \in \mathcal{L}(uX)$. Любое открытое множество $U \subset I$ интервала I является счетным объединением конечных пересечений множеств вида $[0, a)$ и $(b, 1]$, поэтому $f^{-1}(U)$ открыто в X и следовательно f- является u- функцией.

2. Основные результаты

Напомним определения *u-отделимости, u-вложенности, u-окрестности, u-системы* ([7]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 ([7]). Подмножества $A, B \subseteq X$ равномерного пространства uX называется *u-отделенными*, если существует такая C_u^*-функция $f : uX \to I = [0, 1]$, что $f(A) = 0$ и $f(B) = 1$. Если A u-отделено от $X \backslash B$, тогда B называется *u-окрестностью* A.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 ([7]). Пусть $A, B \subseteq X$ подмножества. Множество A называется *u-вложенным* в множество B, если A u-отделено от $X \backslash B$, т.е. существует такая C_u^*-функция $f : uX \to I$, что $f(A) = 0$ и $f(X \backslash B) = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.3 ([7]). Семейство ξ подмножеств равномерного пространства uX называется *u-системой,* если для любого $K \in \xi$ существует $B \in \xi$ такое, что B u-вложено в K, другими словами каждое $K \in \xi$ является u-окрестностью некоторого $B \in \xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.4. Центрированная система открытых множеств, являющаяся u-системой, называется *u-центрированной* системой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. Предфильтр (фильтр), который является u - системой называется *u - предфильтром (фильтром).*

ТЕОРЕМА 2.6. *Пусть η - u - центрированная система и θ - семейство всевозможных конечных пересечений элементов η. Тогда θ - u - центрированная система.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению θ - центрированная система. Покажем, что θ является u - системой.

Пусть $U_1, U_2, ..., U_n$ элементы η, тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i$ элемент θ, т.е. $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \theta$. Для каждого $U_i \in \eta$, $i = 1, 2, ..., n$ найдется $V_i \in \eta$, $i = 1, 2, ..., n$ такое, что V_i u - вложено в U_i для каждого $i = 1, 2, ..., n$, поэтому существуют такие C_u^* - функции $f_i : uX \to I$, что $f_i(V_i) = \{0\}$, $f_i(X \backslash U_i) = \{1\}$, $i = 1, 2, ..., n$. Тогда имеем $Z_{i1}^0 = f_i^{-1}(0) \supset V_i, Z_{i2}^1 = f_i^{-1}(1) \supset X \backslash U_i, i = 1, 2, ..., n$, $Z_{i1}^0 \bigcap Z_{i2}^1 = \emptyset$ и $Z_{i1}^0 \in \mathfrak{Z}(uX), Z_{i2}^1 \in \mathfrak{Z}(uX), i = 1, 2, ..., n$. Следовательно, существуют такие функции $g_{i1} \in C^*(uX), g_{i2} \in C^*(uX)$, что $g_{i1}^{-1}(0) = Z_{i1}^0$, $g_{i2}^{-1}(0) = Z_{i2}^1$, $i = 1, 2, ..., n$. Так как $Z_{i1}^0 \bigcap Z_{i2}^1 = \emptyset$, $i = 1, 2, ..., n$, когда $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} Z_{i1}^0\right) \bigcap \left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} Z_{i2}^1\right) = \emptyset$ ([4]). Тогда, согласно связям кольцевых свойств кольца $C^*(uX)$ и равномерно нуль – множеств, имеем для функции $f = g_{1z} + g_{2z} + ... + g_{n1} \in C^*(uX)$, $g^{-1}(0) = (g_{1z} + g_{2z} + ... + g_{n1})^{-1}(0) = \bigcap\limits_{i-1}^{n} Z_{i1}^0$ и для функции $f = g_{1z} \cdot g_{2z} \cdot ... \cdot g_{nz} \in C^*(uX)$, $f^{-1}(0) = (g_{1z} \cdot g_{2z} \cdot ... \cdot g_{nz})^{-1}(0) = \mathop{\cup}\limits_{i-1}^{n} Z_{iz}^1$ и, следовательно, $\mathop{\cap}\limits_{i=1}^{n} Z_{i1}^0 \in \mathfrak{Z}(uX)$, $\mathop{\cup}\limits_{i=1}^{n} Z_{i2}^1 \in \mathfrak{Z}(uX)$. Тогда существует такая C_u^* - функция $F : uX \to I$, что $F\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} Z_{i1}^0\right) = \{0\}$ и $F\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} Z_{i2}^1\right) = \{1\}$. Далее имеем, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} Z_{i1}^0$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} (X \backslash U_i) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} Z_{i2}^1$, следовательно $F\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i\right) = \{0\}$, $F\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X \backslash U_i\right) = \{0\}$. Ясно, что $F\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} X \backslash U_i\right) = F\left(X \backslash \bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i\right) = \{0\}$, следовательно, $\bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$ u - вложено в $\bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$. Это доказывает то, что семейство θ - является u - системой. Итак, семейство θ - u - центрированные семейство.

СЛЕДСТВИЕ 2.6.1. *Если η - u - центрированная система и θ - семейство всевозможных конечных пересечений из η, тогда $\xi = \eta \cup \theta$ является u - предфильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что для любых $U \in \eta$ $V \in \theta$ всегда $U \bigcap V \neq \emptyset$, а так как η и θ являются u - центрированными системами найдутся $U' \in \eta$ и $V' \in \theta$ такие, что U' u - вложено в U, U' u - вложено в V. Тогда как и в доказательство теоремы 2.6, нетрудно показать, что $U' \bigcap V'$ u - вложено в $U \bigcap V$. Итак, семейство ξ является u - системой.

Пусть U_1, U_2 из ξ произвольны. Тогда найдутся V_1, V_2 из ξ u - вложенные в U_1 и U_2, соответственно. Ясно, что $U_3 = V_1 \bigcap V_2$ u - вложено в $U_1 \bigcap U_2$ и $U_3 \in \xi$ т.е. $U_3 \subset U_1 \bigcap U_2$. Итак, семейство ξ - u - предфильтр.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.7. *Всякий фильтр порожденный u - предфильтром является u- фильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть η - u - предфильтр и $\xi = \{K \subset X$: существует $N \in \eta$ и $N \subset K\}$. Ясно, что ξ – фильтр. Покажем, что ξ - u - семейство. Пусть $K \in \xi$ произвольно $N \in \eta$ такое, что $N \subset K$. Семейство η - u предфильтр, поэтому найдется такое $U \in \eta$, что U - u - вложено в K, т.е. существует C_u^* - функции $f : uX \to I$ такая, что $f(U) = \{0\}, f(X \backslash N) = \{1\}$. Следовательно, $f(X \backslash K) = \{1\}$ т.к. $X \backslash K \subset X \backslash N$. Итак, $f(U) = \{0\}, f(X \backslash K) = \{1\}$, т.е. U - u - вложено в K и K является u - окрестностью U.

Это означает, что фильтр ξ является u - системой. Итак, ξ - u - фильтр.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.8. Всякая u - центрированная система не являющаяся подсистемой никакой отличной от нее u - центрированной системы называется *максимальной u - центрированной системой.*

ТЕОРЕМА 2.9. *Всякая максимальная u - центрированная система является u - фильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть η - максимальная u - центрированная система и θ - всевозможные конечные пересечения элементов η. Тогда в силу теоремы 2.6 и максимальность η следует, что $\eta = \theta$. А в силу следствия 2.6.1 следует, что $\xi = \eta \cup \theta = \eta$ является u - предфильтром. Теперь из предложения 2.7 и максимальность η следует, что η - u - фильтр.

Эта теорема дает нам право дать другое эквивалентное определение максимальной u - центрированной системы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.10. Максимальная u - центрированная система называется *u - ультрафильтром.*

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.11. *Если ξ - u - ультрафильтр и открытое множество U является u - окрестности некоторого элемента из ξ, тогда $U \in \xi$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть открытое множество U является u - окрестностью некоторого элемента u – ультрафильтра ξ. Тогда $U \bigcap K \neq \emptyset$ для любого $K \in \xi$. Семейство $\xi' = \xi \bigcup \{U\}$ является u – центрированной системой, но ξ - u - ультрафильтр, следовательно $\xi' = \xi$. Отсюда следует, что $U \in \xi$.

Из принципа максимальности Куратовского – Цорна ([3]), вытекает следующее.

ТЕОРЕМА 2.12. *Всякая u-центрированная система содержится по крайней мере в одном u-ультрафильтре.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\Phi(\mathcal{E})$ - множество всех u - центрированных систем на множестве $\mathcal{E}$ всех открытых множеств равномерного пространства uX. Упорядочим $\Phi(\mathcal{E})$ следующим образом: если $\xi_1 \in \Phi(\mathcal{E})$ и $\xi_2 \in \Phi(\mathcal{E})$, то $\xi_1 < \xi_2$ тогда и только тогда, когда $\xi_1 \subset \xi_2$, т.е. ξ_1 содержится в ξ_2 как множество. Если покажем, что упорядоченное множество $(\Phi(\mathcal{E}), <)$ индуктивно, т.е. что для любой цепи $\mathcal{C} \subset (\Phi(\mathcal{E}), <)$ существует $\tilde{\xi} \in \Phi(\mathcal{E})$, являющиеся мажорантой для C. Тогда из принципа максимальности Куратовского – Цорна ([3]), будет следовать существование в $(\Phi(\mathcal{E}), <)$ максимального элемента ξ^*.

Любая u - центрированная система $\xi \in \mathcal{C}$ является некоторым подмножеством E всех открытых множеств на uX. Положим $\tilde{\xi} = \cup\{\xi : \xi \in \mathcal{C}\}$. Проверим, что $\tilde{\xi}$ - u - центрированная система. Пусть $U_1, U_2, ..., U_k$ - произвольный конечный набор из $\tilde{\xi}$. По определению семейства $\tilde{\xi}$ существуют такие $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k \in \mathcal{C}$ что $U_i \in \xi_i$, $i = 1, 2, ..., k$. Так как $\mathcal{C}$ - цепь в упорядоченном множестве $(\Phi(\mathcal{E}), <)$, то существует перестановка $i_1, i_2, ..., i_k$ чисел $1, 2, ..., k$ такая, что $\xi_{i1} < \xi_{i2} < ... < \xi_{ik}$. Тогда $\xi_{i1} \subset \xi_{i2} \subset ... \subset \xi_{ik}$. Итак, $U_i \in \xi_{ik}$ для всех $i_1, i_2, ..., i_k$. Поскольку ξ_{ik} - u - центрированная система, то $\bigcap\limits_{i=1}^{k} U_i \neq \emptyset$. Пусть теперь $U \in \tilde{\xi}$ - произвольный элемент. Тогда существует индекс j такой, что $1 \leq j \leq k$ и $U \in \xi_i$. Поскольку ξ_j - u - центрированная система, что существует $V \in \xi_j \subset \tilde{\xi}$ u - вложенное в U. Итак, $\tilde{\xi}$ - u - центрированная система. Из определения $\tilde{\tilde{\xi}}$ следует, что $\xi \subset \tilde{\tilde{\xi}}$ для любого $\xi \in \mathcal{C}$ и $\tilde{\tilde{\xi}} \in \Phi(\mathcal{E})$. Последнее означает, что $\xi < \tilde{\tilde{\xi}}$ для любого $\xi \in \mathcal{C}$. Таким образом $\tilde{\tilde{\xi}}$ - мажоранта цепи $\mathcal{C} \subset (\Phi(\mathcal{E}), <)$. На основании принципа Куратовского – Цорна мы заключаем, что в упорядоченном множестве $(\Phi(\mathcal{E}), <)$ существует максимальный элемент ξ^*. Покажем, что ξ^* - является u - ультрафильтром, т.е. максимальная u - центрированная система. Пусть $U \in \mathcal{E}\backslash\xi^*$. Пологая $\xi' = \xi^* \bigcup \{U\}$. Если ξ' - u - центрированная система, то U является u - окрестностью некоторого элемента из ξ^*, следовательно, по предложению 2.11., $U \in \xi^*$, но $U \notin \xi^*$. Тогда семейство ξ' не u- центрировано, т.е. $\xi' \notin \Phi(\mathcal{E})$ и ξ^* - является u - ультрафильтром.

ТЕОРЕМА 2.13. *Семейство ξ_x-всех окрестностей точки $x \in X$ равномерного пространства uX является u-ультрафильтром.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показано, что для любой открытой окрестности O_x точки $x \in X$ найдется такая окрестность U_x этой же точки, что U_x u-отделена от O_x. В силу тихоновости равномерного пространства uX, существует такая равномерно непрерывная функция $f : uX \to I$, что $f(x) = 0$ и $f(X\backslash O_x) = 1$ ([8]). Тогда функция $g : uX \to I$ определенная как $g(x) = f(x)$, если $f(x) = 1$, $g(x) = 0$, если $f(x) \leq \frac{1}{2}$ и $g(x) = 2\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)$, если $\frac{1}{2} < f(x) < 1$ равномерно непрерывна и окрестность $U_x = \left\{x \in X : f(x) < \frac{1}{2}\right\}$ искомая. Имеем $x \in U_x \subseteq \overline{U_x} = \left\{x \in X : f(x) \leq \frac{1}{2}\right\} \subset O_x$, $g(U_x) = 0$ и $g(X\backslash O_x) = 1$. Так как всякая равномерно непрерывная ограниченная функция является C_u^*-функцией ([4-6]) окрестность U_x u-вложена в O_x.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.14. *Семейство ξ_z всех открытых u - окрестностей множества $Z \subseteq X$ в равномерном пространстве uX является u - системой на uX.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $U \in \xi_z$, т.е. U является произвольной открытой u-окрестностью множества $Z \subseteq X$. Пусть $f : uX \to I$ такая C_u^*-функция, что $f(\mathrm{Z}) = 0$, и $f(X\backslash U) = 1$. Положим $U_1 = f^{-1}\left(\left[0; \frac{1}{3}\right)\right)$ и $U_2 = f^{-1}\left(\left(\frac{2}{3}; 1\right]\right)$. Тогда $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $Z \subset U_1$, $X\backslash U \subset U_2$ и, в силу непрерывности всякой C_n^* - функции имеем $\overline{U_1} = f^{-1}\left(\left[0; \frac{1}{3}\right]\right)$ и $\overline{U_2} = f^{-1}\left(\left[\frac{2}{3}; 1\right]\right)$. Ясно, что $\overline{U_1}, \overline{U_2}\_$ - равномерно замкнуты и $\overline{U_1} \bigcap \overline{U_2}\_ = \emptyset$. Имеем следующее включение $X\backslash U \subset U_2 \subset \overline{U_2} \subset X\backslash\overline{U_1} \subset X\backslash U_1 \subset X\backslash Z$. По предложению 1.6 существует такая C_n^* - функция $\varphi : uX \to I$, что $g\left(\overline{U_2}\right) = \{1\}$ и $g\left(\overline{U_1}\right) = \{0\}$. Тогда тем более $g\left(X\backslash U\right) = \{1\}$ и $g\left(U_1\right) = \{0\}$, следовательно, U является u - окрестностью U_1. Это доказывает то, что ζ_{Z} - является u - системой.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.15. *Пусть $Z \in \mathfrak{Z}\left(uX\right)$ и $Z \neq \emptyset$. Тогда множество ξ_{Z} всех u - окрестностей множества Z непусто, т.е. $\xi_Z \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно такая функция $f : uX \to I$, что $f(x) = 0$ для всех $x \in X$ равномерно непрерывна, и следовательно, является C_u^* - функцией и $f(Z) = 0$, где $Z \in \mathfrak{Z}\left(uX\right)$ и $f(X\backslash X) = f(\emptyset) = 1$, т.е. множество Z u - вложено в X, т.е. $X \in \xi_{\mathrm{Z}}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.16. *Пусть ξ- является u-ультрафильтром на равномерном пространстве uX и $Z \in \mathfrak{Z}\left(uX\right)$-некоторое равномерно нуль-множество. Если $Z \cap K \neq \emptyset$ для любого $K \in \xi$, тогда $\xi_z \subset \xi$, где ξ_z-семейство всех u-окрестностей множества $Z \in X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из предложения 2.15 вытекает, что семейство ξ_z всех u-окрестностей множества $Z \in \mathfrak{Z}\left(uX\right)$ не пусто (предложение 2.15), т.е. $\xi_z \neq \emptyset$. Тогда $\xi_z \cup \xi$

-u- центрированная система открытых множеств, но ξ-u- ультрафильтр, следовательно $\xi_z \cup \xi = \xi$, т.е. $\xi_z \subset \xi$.

Список литературы

[1] *Isbell J.R.* Uniform spaces. Providence. (1964).

[2] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986.

[3] *Архангельский А.В., Пономарев В.И.* Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974.

[4] *Charalambus M.G.* Uniform Dimension Function. Ph. D. dissertation. Univ. of London. 1971.

[5] *Charalambus M.G.* A new covering dimension function for uniform spaces. // J. London Math, Soc. 211 (1975) P. 137–143.

[6] *Charalambus M.G.* Further theory and application of covering dimension of uniform spaces. // Czech. Math. Journ. 1991. Vol. 41 (116). P. 378–394.

[7] *Чекеев А.А., Абдраимова М.А.* О новом подходе к построению бикомпактных расширений равномерных пространств // Изв.НАН КР №1, Бишкек 2010, С. 52–55.

[8] *Александров П.С.* О бикомпактных расширениях топологических пространств // Матем. сб. 5 (1939), С. 403–423.