О сильной нормальности тихоновских и равномерных постранств

А.А. Чекеев[1], Ч.А. Аблабекова[2]
[1]*Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан*
[2]*Кыргызский государственный университет строительства транспорта архитектуры им. Н. Исанова, Бишкек, Кыргызстан*
e-mail: asyl.ch.top@mail.ru*;* achacha@mail.ru

Аннотация

Введены классы сильно нормальных, равномерно сильно нормальных и функционально равномерно R – паракомпактных пространств. Доказано, что в классе функционально равномерно R – паракомпактных пространств $\mathcal{M}$ – универсальность равносильна равномерной сильной нормальности.

Введение.

В работе введены равномерный аналог сильной нормальности тихоновских и "функциональный" аналог равномерных парокомпактов по Райсу (равномерные R – парокомпакты), которые введены в работах [3] и [7], соответственно. Это: функционально равномерно R – паракомпактные пространства и равномерно сильно нормальные пространства. Для введенных классов равномерных пространства, посредством описания их баз установлены их различные характеристики.

1. Необходимые сведения.

Необходимую информацию о равномерных пространствах можно найти в книгах [1], [2], [10].

Пусть X – тихоновское пространство. Через $\mathcal{U}_X$ – обозначается *универсальная* равномерность пространства X ([1], [2]). Покрытие, состоящее из *конуль- множеств* ([4]), называется *функционально открытым.* Все функционально открытые множества образуют базу топологии тихоновского пространства ([4]).

Предложение 1.1 ([1], [2]). *Универсальная равномерность $\mathcal{U}_X$ тихоновскгое пространства X обладают базой, состоящей из всех локально конечных функционально открытых покрытий.*

Определение 1.2 ([3]). Тихоновское пространство X называется *сильно нормальным,* если универсальная равномерность пространство $\mathcal{U}_X$ состоит из всех открытых покрытий пространства X.

Определение 1.3 ([6]). Равномерное пространство и $(X,\mathcal{U})$ называется $\mathcal{M}$– универсальным, если для всякого равномерно непрерывеного отображения $f:(X,\mathcal{U})\to(M,\rho)$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ в метрическое пространство (M,ρ) отображение $f:(X,\mathcal{U})\to(M,\mathcal{U}_M)$ остается равномерно непрерывеным, где $\mathcal{U}_M$– универсальная равномерность метрическое пространство (M,ρ).

Определение 1.4 ([7]).Покрытие α равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ называется *равномерно локально конечным*, если существует равномерное покрытие $\beta\in\mathcal{U}$, каждый элемент которого пересекается лишь конечным числом элементов покрытий α.

Определение 1.5 ([7]). Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ называется *равномерно* R *– паракомпактным*, если в любое открытое покрытие можно вписать равномерно локально конечное открытое покрытие.

Определение 1.6 ([8], [9]). Подмножество $O \subset X$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ называется *равномерно открытым*, если существует такое равномерно непрерывеное отображения $f : (X,\mathcal{U}) \to (M,\rho)$ равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ в метрическое пространство (M,ρ), что $O = f^{-1}(V)$ для некоторого открытого множества $V \subset M$.

Предложение 1.2 ([8], [9]). *Подмножество* $O \subset X$ *равномерного пространства* $(X,\mathcal{U})$ *равномерно открыто тогда и только тогда, когда* $O = f^{-1}((0,1])$*для некоторой равномерно непрерывеной функции* $f : (X,\mathcal{U}) \to I = [0,1]$.

2. Основные результаты.

Следующие предложения устанавливают характеристику сильно нормальных пространств посредством базы универсальной равномерности.

Предложение 1.1 . *Тихоновское пространство* X *сильно нормально тогда и только тогда, когда универсальная равномерность* $\mathcal{U}_X$ *обладает базой из всех функционально открытых покрытий.*

Доказательство. Пусть X сильно нормально и α – произвольное открытое покрытие X. Поскольку все функционально открытые множества образуют базу тихоновской топологии пространство X, для каждого $A \in \alpha$ найдется семейство β_A функционально открытых множеств такое, что $A = \cup\beta_A$. Тогда семейство $\beta = \{\beta_A : A \in \alpha\}$– функционально открытое покрытие, вписанное в покрытие α.

Пусть $\mathcal{B}'$– семейство всех функционально открытых покрытий сильно нормального пространство X. Тогда $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{U}_X$. Для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{B}'$ покрытие $\alpha \wedge \beta = \{A \cap B : A \in \beta, B \in \beta\}$ – функционально открыто, следовательно $\alpha \wedge \beta \in \mathcal{B}'$.

Пусть $\mathcal{B}$ база равномерности $\mathcal{U}_X$, состоящее из всех локально конечных функционально открытых покрытий. Тогда $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Пусть $\alpha \in \mathcal{B}'$ произвольно, тогда существует локально конечное функционально открытое покрытие $\beta \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$, звездно вписанное в α. Итак, $\mathcal{B}'$ образует базу универсальной равномерности $\mathcal{U}_X$сильно нормального пространства X.

Обратно, пусть универсальная равномерность $\mathcal{U}_X$ обладает базой $\mathcal{B}'$, состоящей из всех функционально открытых покрытий и $\mathcal{U}$ множество всех открытых покрытий пространства X. Пусть $\alpha \in \mathcal{U}$ произвольное открытое покрытие. Тогда, как мы показали выше, существует $\beta \in \mathcal{B}'$, вписанное в α, т.е. $\alpha \in \mathcal{U}_X$. Итак, $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}_X$. С другой стороны универсальная равномерность $\mathcal{U}_X$ обладает базой $\mathcal{B}$, состоящей из всех локально конечных функционально открытых покрытий (предложение 1.1), следовательно $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$. Тогда $\mathcal{U}_X \subseteq \mathcal{U}$. Итак $\mathcal{U}_X \subseteq \mathcal{U}$ и $\mathcal{U}_X$– состоит из всех открытых покрытий, следовательно X– сильно нормально.

Класс сильно нормальных пространств достаточно широк, т. к. всякий парокомпакт X, наделенный равномерностью $\mathcal{U}_X$, является сильно нормальным пространством [7], но простые примеры показывают существование сильно нормальных пространств, не являющихся парокомпактными ([5], задачи 6. Д.).

Следующее определение являются "функциональным" аналогом равномерных R – паракомпактов.

Определение 1.2. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ называется *функционально равномерно R – паракомпактным.*, если в любое равномерно открытое покрытие можно вписать равномерно локально конечное равномерно открытое покрытие.

Предложение 1.3 . *Тихоновское пространство X сильно нормально тогда и только тогда, когда равномерное пространство $(X,\mathcal{U}_X)$ функционально равномерно R – паракомпактно.*

Доказательство. Пусть X сильно нормально и α– функционально открытое покрытие. Так как $\alpha \in \mathcal{U}_X$, то существует локально конечное функционально открытое покрытие β, вписанное в α. У каждой точки $x \in X$ существует открытая окрестность V_x, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытия β. Тогда открытое покрытие $\{V_x : x \in X\}$ есть элемент $\mathcal{U}_X$, следовательно, β с равномерно локально конечно. Это означает, что равномерное пространство $(X,\mathcal{U}_X)$– функционально равномерно R – паракомпактно.

Обратно, если $(X,\mathcal{U}_X)$ функционально равномерно R– паракомпактно, тогда, как было показано в доказательстве предложения 1.1., универсальная равномерностью $\mathcal{U}_X$ обладает базой из всех функционально открытых покрытий, т. е. $\mathcal{U}_X$– состоит из всех открытых покрытий X, следовательно, X– сильно нормально.

Теорема 1.4 *Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ функционально равномерно R– паракомпактно тогда и только тогда, когда, для любого равномерно открытого покрытия α покрытие $\alpha^{\angle} = \{\cup\alpha' : \alpha' \subset \alpha$ и α' – конечно$\}$ есть равномерное покрытие, т.е. $\alpha^{\angle} \in \mathcal{U}$.*

Доказательство. Пусть равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ функционально равномерно R - паракомпактно и α– произвольное равномерно открытое покрытие. Тогда существует равномерно локально конечное равномерно открытое покрытие β, вписанное в α. Пусть $\gamma \in \mathcal{U}$такое равномерное покрытие, что каждый элемент γ пересекается лишь конечным числом элементов в β. Тогда γ вписано в $\beta^{\angle}$ и, тем более, вписано в $\alpha^{\angle}$, следовательно $\alpha^{\angle} \in \mathcal{U}$.

Обратно, пусть $\gamma^{\angle} \in \mathcal{U}$ для любого равномерно открытого покрытия γ. Пусть $\alpha \in \mathcal{U}$ сильно звездно вписано в $\gamma^{\angle}$. Тогда (1.4.5 [10]) существует равномерная псевдометрика $\rho : X \times X \to \mathbb{R}^+ = [0,+\infty)$ такая что $\rho(x,y) < 1$ тогда и только тогда, когда $y \in \alpha(x)$, для всех $x, y \in X$. Это означает, что $\langle\Gamma\rangle_{\tau_\rho} \neq \emptyset$ для любого $\Gamma \in \gamma^{\angle}$ и покрытие $\left\langle\gamma^{\angle}\right\rangle = \{\langle\Gamma\rangle_{\tau_\rho} : \Gamma \in \gamma^{\angle}\}$– открытое покрытие псевдометрического пространства (X,ρ). В силу теоремы Стоуна ([11]), в покрытиие $\left\langle\gamma^{\angle}\right\rangle$ можно вписать открытое локально конечное покрытие β псевдометрического пространства (X,ρ). Так как псевдоравномерность $\mathcal{U}_\rho$, порожденная псевдометрикой ρ, содержится в равномерности $\mathcal{U}$, то $\left\langle\gamma^{\angle}\right\rangle$ и β является равномерно открытыми покрытиями равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$ ([8], ([9]). Для каждого $B \in \beta$ положим $\xi_B = \{B \cap \Gamma_B^i : i = 1,2,\ldots,n(B)\}$, где $B \subset \left\langle\bigcup_{i=1}^{n(B)} \Gamma_B^i\right\rangle_{\tau_\rho}$ и $\bigcup_{i=1}^{n(B)} \Gamma_B^i \in \gamma^{\angle}$. Пусть $\xi = \{\xi_B : B \in \beta\}$. Тогда ξ – является локально конечным равномерно открытым покрытием равномерного пространства $(X,\mathcal{U})$, вписанным в покрытие γ. Это легко следует из построения покрытия ξ. В силу локальной конечности покрытия β, у каждой точки $x \in X$ существует равномерно открытая окрестность V_x, пересекающаяся лишь с конечным числом элементов покрытияβ. По условию теоремы для равномерно открытого покрытия $\eta =\{V_x : x \in X\}$, выполнено $\eta^{\angle} \in \mathcal{U}$. Ясно, что каждый элемент покрытия $\eta^{\angle}$ пересекается лишь с конечным числом элементов покрытия ξ, следовательно ξ является равномерно локально конечным равномерно открытым покрытием, вписанным в равномерно открытое покрытие γ.

Определение 1.5. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$ называется *равномерно сильно нормальным, если* равномерность $\mathcal{U}$ обладает базой, состоящей из всех равномерно открытых покрытий.

Лемма 1.6. *Всякое равномерно сильно нормальное равномерное пространство $\mathcal{M}$– универсально.*

Доказательство. Пусть $(X,\mathcal{U})$ равномерно сильно нормальное пространство и $f : (X, M) \to (M,\mathcal{U}_\rho)$– равномерно непрерывное отображение $(X,\mathcal{U})$ в метрическое равномерное пространство $(X,\mathcal{U}_\rho)$, где $\mathcal{U}_\rho$ – равномерность, порожденная метрикой ρ. Пусть $\mathcal{U}_M$– универсальная равномерность метрического пространства (M, ρ). В силу парокомпактности (X, τ_ρ)(теорема Стоуна [11]), где τ_ρ– топология, порожденная метрикой ρ, универсальная равномерность $\mathcal{U}_M$ состоит из всех открытых покрытий пространства (X, τ_ρ) [7]. Пусть $\alpha \in \mathcal{U}_M$– произвольное открытое покрытие. Тогда $f^{-1}(A)$– равномерно открыто в X для любого $A \in \alpha$ и покрытие $\{f^{-1}(A) : A \in \alpha\} \in \mathcal{U}$ равномерно. Это означает, что отображение $f : (X,\mathcal{U}) \to (M,\mathcal{U}_M)$ – равномерно непрерывно, следовательно, $(X,\mathcal{U})$ - $\mathcal{M}$– универсальное равномерное пространство.

Лемма 1.7. *Всякое функционально равномерно R– паракомпактное $\mathcal{M}$– универсальное равномерное пространство является равномерно сильно нормальным.*

Доказательство. Пусть α– произвольное равномерно открытое покрытие функционально равномерно R – паракомпактного $\mathcal{M}$– универсального пространства $(X,\mathcal{U})$. Тогда существует равномерно локально конечное равномерно открытое покрытие β, вписанное в α. Покрытие β имеет вид $\beta = \{f_s^{-1}((0; 1]) : s \in S\}$, где $f_s : (X,\mathcal{U}) \to I = [0; 1]$ – равномерно непрерывная функция для любого $s \in S$. В силу равномерно локальной конечности покрытия β определена функция $f(x) = \sum_{s \in S} f_s(x)$, для любых $x \in X$, т. к. существует равномерное покрытие $\gamma \in \mathcal{U}$ такое, что для любого $\Gamma \in \gamma$, существует конечное $S_\Gamma = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\} \subset S$ и для всех $x \in \Gamma$ выполнено $f(x) = f_{s_1}(x) + f_{s_2}(x) + \ldots + f_{s_k}(x)$ и $f(x) = 0$для всех $s \in S \backslash S_\Gamma$. В силу того, что покрытие γ равномерно, то функция $f : (X,\mathcal{U}) \to (\mathbb{R}, \mathbf{U}_{|*|})$ – равномерно непрерывна, где $\mathcal{U}_{|*|}$ – равномерность, порожденная метрикой $\rho(x, y) = |x - y|$. Равномерное пространство $(X,\mathcal{U})$- $\mathcal{M}$– универсально, следовательно отображение $f : (X,\mathcal{U}) \to (\mathbb{R}, \mathbf{U}_\mathbb{R})$ также равномерно непрерывно, $\mathcal{U}_\mathbb{R}$ – универсальная равномерность числовой прямой $\mathbb{R}$. Тогда покрытие β – равномерно, т. е. $\beta \in \mathcal{U}$, следовательно $\alpha \in \mathcal{U}$.

Теорема 1.8. *Пусть $(X,\mathcal{U})$ функционально $\mathbb{R}$ – паракомпактное равномерное пространство. Тогда следующие условия равносильны:*

1. $(X,\mathcal{U})$ – равномерно сильно нормально

2. $(X,\mathcal{U})$ - $\mathcal{M}$– универсально

Доказательство. $(1 \Rightarrow 2)$. Вытекает из леммы 1.6.

$(2 \Rightarrow 1)$. Вытекает из леммы 1.7.

Список литературы

[1] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир. 1986.

[2] *Irbell J.R.* Uniform spaces. Providence. 1964.

[3] *Shapiro H.L., Smith F.A.* Neighbourhoods of the diagonal and strong normality properties // Proc. Amer. Math. Soc. 71. 1978. P. 329-333.

[4] *Gilman H., Jenison M.* Ring of continuons functions. Princeton. 1960.

[5] *Келли Дж.Л.* Общая топология. – М.: Наука. 1981.

[6] *Hager A.W.* Some nerly fine uniform spaces // Proc. London Math. Soc. 1974. Vol. 28 (3). P. 517-546.

[7] *Rice M.D.* A note on uniform paracompactness // Proc. Amer. Math. Soc. 1977. Vol. 62 (2). P. 359-362.

[8] *Chazalambus M.G.* Uniform Dimension Function. Ph.D. dissertation. Univ. of London. 1971.

[9] *Chatalambus M.G* A new covering chmension function for uniform spaces // J. CityplaceLondon Math. Soc. 1975. Vol. 11 (2). P. 137-143.

[10] *Борубаев А.А., Чекеев А.А.* Равномерные пространства. – Бишкек. 2003.

[11] *Stone A.H.* Paracompactness and product spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. 54. P. 977-982