

О максимальных центрированных системах равномерно – нуль множеств

А.А. Чекеев, Г.О. Намазова

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан
e-mail: asyl.ch.top@mail.ru; guliza_n@mail.ru

Аннотация

В данной статье рассматривается специальный класс максимальных центрированных систем, состоящий из равномерно замкнутых нуль - множеств, так называемые z_u – ультра-фильтры. Изучаются свойства z_u – ультрафильтров и их связь с множеством максимальных идеалов кольца $C^*(uX)$.

В данной работе демонстрируется процедура построения максимальных центрированных систем, состоящих из равномерно замкнутых (нуль – множеств) [3-5], которые существуют в силу принципа максимальности Куратовского – Цорна [2]. Множество $C^*(uX)$ всех равномерно непрерывных ограниченных функций равномерного пространства uX ([1], [5], [8]) относительно поточечного сложения и поточечного умножения образует коммутативное кольцо с единицей, где роль единицы играет тождественно равная $1 \in \mathbb{R}$ функция, т.е. $f(x) \equiv 1$ для любых $x \in X$ и кольцевые операции определяются как: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ и $(fg)(x) = f(x)g(x)$ для любого $f, g \in C^*(uX)$ и $x \in X$.

Множество $f^{-1}(0) \subseteq X$, где $f \in C^*(uX)$ называется *равномерно нуль – множеством* и обозначается как $Z(f) = f^{-1}(0) = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Символ Z можно трактовать, как отображение кольца $C^*(uX)$ на множество всех равномерно нуль – множеств равномерного пространства uX . Итак, $Z : C^*(uX) \rightarrow \mathfrak{Z}(uX)$ и $Z(f) \in \mathfrak{Z}(uX)$ для любого $f \in C^*(uX)$.

Ясно, что $Z(f) = Z(|f|) = Z(f^n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $Z(0) = X$, где $0(x) \equiv 0$ для любого $x \in X$ и $Z(1) = \emptyset$. Также имеем $Z(fg) = Z(f) \cup Z(g)$ и $Z(f^2 + g^2) = Z(|f| + |g|) = Z(f) \cap Z(g)$.

Дополнения до равномерно нуль – множеств называются *равномерно конуль – множествами* и, если U - равномерно конуль – множество, тогда $X \setminus U \in \mathfrak{Z}(uX)$, т.е. существует такая функция $f \in C^*(uX)$, что $f(X \setminus U) = 0$ или $f^{-1} = (U) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Множество всех равномерно конуль – множеств равномерного пространства uX будет обозначаться через $\mathcal{L}(uX)$.

Остановимся на связях между алгебраическими свойствами кольца $C^*(uX)$ и тополого – равномерными свойствами равномерного пространства uX .

Напомним, что *идеалом* кольца $C^*(uX)$ называется собственное подкольцо I кольца $C^*(uX)$ обладающее свойством: если $f \in I$ и $g \in C^*(uX)$ произвольно, тогда $gf \in I$.

Пересечение каждого семейства идеалов является снова идеалом и из принципа максимальности Хаусдорфа выводится тот факт, что всякий идеал содержится в некотором *максимальном*, по включению, идеале.

Идеал I кольца $C^*(uX)$ называется *простым*, если из $f \cdot g \in I$ следует, что либо $f \in I$, либо $g \in I$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 ([Г.Ж.]). *Всякий максимальный идеал является простым.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Непустое подсемейство $\xi \subset \mathfrak{Z}(uX)$ называется *z_u -центрированным* на uX , если $\cap \eta \neq \emptyset$ для любого конечного подсемейства $\eta \subset \xi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Непустое подсемейство $\mathcal{P} \subset \mathfrak{Z}(uX)$ называется z_u -предфильтром, если выполнены условия:

1⁰ $\emptyset \in \mathcal{P}$; 2⁰. если $Z_1, Z_2 \in \mathcal{P}$, тогда существует $Z_3 \in \mathcal{P}$ такое, что $Z_3 \subset Z_1 \cap Z_2$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Непустое подсемейство $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{Z}(uX)$ называется z_u -фильтром на uX , если выполнены условия:

1⁰. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$;

2⁰. если $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{F}$ тогда $Z_1 \cap Z_2 \in \mathfrak{F}$;

3⁰. если $Z \in \mathcal{F}$, $Z' \in \mathfrak{Z}(uX)$ и $Z \subset Z'$, тогда $Z' \in \mathfrak{F}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Если \mathcal{P} - z_u -предфильтр на uX , тогда $\mathfrak{F} = \{Z \in \mathfrak{Z}(uX) \text{ существует } V \in \mathcal{P}, \text{ для которого } V \subset Z\}$ является z_u -фильтром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1⁰. $\emptyset \in \mathfrak{F}$ из определения 3. Пусть $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{F}$, тогда существует $V_1, V_2 \in \mathcal{P}$ такие, что $V_1 \subset Z_1$ и $V_2 \subset Z_2$. В силу 2⁰ определения 3 найдется $V_3 \in \mathcal{P}$ такое, что $V_3 \subset V_1 \cap V_2$, тогда $V_3 \subset Z_1 \cap Z_2$ и, следовательно, $Z_1 \cap Z_2 \in \mathfrak{F}$. Условие 3⁰ определения 4. вытекает из самого определения семейства \mathfrak{F} .

СЛЕДСТВИЕ 5.1. Всякая z_u -центрированная система множеств содержит в некотором z_u -фильтре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если ξ - z_u -центрированная система, тогда семейство \mathcal{P} состоящее из всевозможных конечных пересечений элементов ξ является z_u -предфильтром. Это следует из того, что если $Z_1, Z_2, \dots, Z_n \in \xi$ и $Z_1 \cap Z_2 \cap \dots \cap Z_n = Z \neq \emptyset$, то $Z \in \mathfrak{Z}(uX)$ ([3-5]). Следовательно, \mathcal{P} является подсемейством $\mathfrak{Z}(uX)$ и обладает всеми свойствами определения 3. Тогда \mathcal{P} содержится в некотором z_u -фильтре \mathfrak{F} (предложение 5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Пусть ξ - z_u -предфильтр на uX и $Z' \in \mathfrak{Z}(uX)$ такое, что $Z' \cap Z \neq \emptyset$ для любого $Z \in \xi$. Тогда семейство $\xi' = \xi \cup \{Z'\}$ является z_u -центрированным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\eta \cup \{Z'\} \subset \xi'$ произвольное конечное подсемейство, где $\eta \subset \xi$. Так как ξ - z_u -предфильтр, существует $V \in \xi$ такое, что $V \subset \cap \eta$. По условию $V \cap Z' \neq \emptyset$. Тогда $\cap(\eta \cup \{Z'\}) \neq \emptyset$. Это означает, что ξ' -является z_u -центрированным семейством.

Через $\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$ обозначим множество всех z_u -центрированных семейств на uX . $\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$ естественным образом упорядочивается отношением « \ll ». Полагаем для $\xi_1, \xi_2 \in \mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$, $\xi_1 \ll \xi_2$ тогда и только тогда, когда $\xi_1 \subset \xi_2$. Максимальные элементы упорядоченного множества называются *максимальными z_u -центрированными системами*.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Всякая максимальная z_u -центрированная система является z_u -фильтром.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО вытекает из предложений 5 и 8 и свойства максимальности.

ТЕОРЕМА 8. Если I идеал в $C^*(uX)$, тогда семейство $\mathbf{Z}(I) = \{\mathbf{Z}(f) : f \in I\}$ является z_u -фильтром на uX . Обратно, если F является z_u -фильтром на uX , тогда семейство $\mathbf{Z}^{-1}(\mathfrak{F}) = \{f : \mathbf{Z}(f) \in \mathfrak{F}\}$ является идеалом в $C^*(uX)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1⁰. $1 \notin I$, следовательно $\emptyset \notin \mathbf{Z}(I)$. 2⁰. Пусть $Z_1, Z_2 \in \mathbf{Z}(I)$ и $f_1, f_2 \in I$ таковы, что $Z_1 = \mathbf{Z}(f_1)$ и $Z_2 = \mathbf{Z}(f_2)$. Поскольку I идеал, $f_1^2 + f_2^2 \in I$. Следовательно, $Z_1 \cap Z_2 = \mathbf{Z}(f_1^2 + f_2^2) \in \mathbf{Z}(I)$.

3⁰. Пусть $Z \in \mathbf{Z}(I)$, $Z' \in \mathfrak{Z}(uX)$ и $Z \subset Z'$. Пусть $f \in I$, $f' \in C^*(uX)$ таковы, что $Z = \mathbf{Z}(f)$ и $Z' = \mathbf{Z}(f')$. Поскольку I идеал в $C^*(uX)$, $ff' \in I$. Тогда $Z' = Z \cup Z' = \mathbf{Z}(f) \cup \mathbf{Z}(f') = \mathbf{Z}(ff') \in \mathbf{Z}(I)$. Обратно, пусть $J = \mathbf{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$. Т.к. $\emptyset \notin \mathfrak{F}$, получаем $1 \notin J$.

Пусть $f, g \in J$ и $h \in C^*(uX)$. Тогда $\mathbf{Z}(f - g) \supseteq \mathbf{Z}(f) \cap \mathbf{Z}(g) \in \mathfrak{F}$ и $\mathbf{Z}(hf) \in \mathfrak{F}$. По условиям 2⁰, 3⁰ определения z_u -фильтра, имеем, $f - g \in J$ и $hf \in J$ и J идеал в $C^*(uX)$.

Максимальный z_u -фильтр называется z_u -ультрафильтром. Таким образом, z_u -ультрафильтр максимальное подсемейство $\mathfrak{Z}(uX)$ со свойством центрированности. Это следует из принципа максимальности Хаусдорфа или Куратовского – Цорна ([1]).

ТЕОРЕМА 9. Каждое z_u -центрированное семейство в $\mathfrak{Z}(uX)$ содержится в некотором z_u -ультрафильтре.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что упорядоченное множество $\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$ индуктивно, т.е. что для любой цепи $\mathcal{A} \subset (\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX)), <)$ существует $\tilde{\xi} \in \mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$, являющееся мажорантой для \mathcal{A} . Положим $\tilde{\xi} = \cup \{\xi : \xi \in \mathcal{A}\}$, тогда $\tilde{\xi} \subset \mathfrak{Z}(uX)$. Покажем, что $\tilde{\xi}$ – снова z_u -центрированная система равномерно нуль-множеств. Пусть Z_1, \dots, Z_k произвольная конечная подсистема $\tilde{\xi}$. Тогда существует $\xi_1, \dots, \xi_k \in \mathcal{A}$ такие, что $Z_i \in \xi_i$, $i = 1, 2, 3, \dots, k$. По условию \mathcal{A} цепь в $(\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX)), <)$, следовательно, существует такая перестановка i_1, \dots, i_k чисел $1, \dots, k$, что $\xi_{i_1} < \dots < \xi_{i_k}$ и, что равносильно $\xi_{i_1} \subset \dots \subset \xi_{i_k}$. Следовательно, $Z_i \in \xi_{i_k}$ для всех $i = 1, \dots, k$. Поскольку $\xi_{i_k} - z_u$ -центрировано, $\cap \{Z_i : i = 1, \dots, k\} \neq \emptyset$. Итак, $\tilde{\xi} - z_u$ -центрированное семейство, $\tilde{\xi} \in \mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$ и $\xi \subset \tilde{\xi}$ для любого $\xi \in \mathcal{A}$. Это равносильно тому, что $\xi < \tilde{\xi}$ для любого $\xi \in \mathcal{A}$. Итак, $\tilde{\xi}$ мажоранта гнезда \mathcal{A} . Тогда на основании принципа максимальности Куратовского – Цорна ([1]), следует, что в упорядоченном множестве $(\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX)), <)$ существует максимальный элемент ξ^* . Покажем максимальность ξ^* . Пусть $Z \in (\mathfrak{Z}(uX)) \setminus \xi^*$. Положим $\xi' = \xi^* \cup \{Z\}$. Тогда $\xi^* \subset \xi'$ и $\xi^* \neq \xi'$. Если $\xi' - z_u$ -центрированное семейство, тогда $\xi' \in \mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX))$, $\xi^* < \xi'$ и $\xi^* \neq \xi'$. Это противоречит максимальности ξ^* в $(\mathcal{Y}(\mathfrak{Z}(uX)), <)$. Итак, ξ' – не z_u -центрированное семейство. Это означает, что ξ^* – максимальное z_u -центрированное семейство.

ТЕОРЕМА 10. (а) Если M максимальный идеал в $C^*(uX)$, тогда $\mathbf{Z}(M)$ является z_u -ультрафильтром в uX .

(б) Если $\mathfrak{F} - z_u$ -ультрафильтр на uX , тогда $\mathbf{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$ является максимальным идеалом в $C^*(uX)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (а). Пусть M максимальный идеал в $C^*(uX)$, тогда в силу теоремы 2, $\mathbf{Z}(M)$ является z_u -фильтром. Пусть $\mathfrak{F} - z_u$ -фильтр и $\mathbf{Z}(M) \subseteq \mathfrak{F}$, тогда $\mathbf{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$ идеал в $C^*(uX)$ и $\mathbf{Z}^{-1}(\mathfrak{F}) \supset M$, но M максимальный идеал, поэтому $\mathbf{Z}^{-1}(\mathfrak{F}) = M$ и $\mathfrak{F} = \mathbf{Z}(M)$.

Пункт (б) доказывается аналогично.

СЛЕДСТВИЕ 10.1. Отображение $\mathbf{Z} : C^*(uX) \rightarrow \mathfrak{Z}(uX)$ осуществляет биекцию между множеством всех максимальных идеалов кольца $C^*(uX)$ и множеством всех z_u -ультрафильтров на uX .

СЛЕДСТВИЕ 10.2. Если $\mathfrak{F} - z_u$ -ультрафильтр и $Z_1 \cup Z_2 \in \mathfrak{F}$, тогда $Z_1 \in \mathfrak{F}$, либо $Z_2 \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. $\mathbf{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$ является максимальным идеалом в $C^*(uX)$ и $\mathbf{Z}(fg) \supseteq \mathbf{Z}(f) \cup \mathbf{Z}(g) \in \mathfrak{F}$ для которых $f, g \in C^*(uX)$ и $fg \in \mathbf{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$. В силу предложения

1, $\mathbf{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$ простой идеал, следовательно либо $f \in \mathbf{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$, либо $g \in \mathbf{Z}^{-1}(\mathfrak{F})$. Тогда $Z_1 = \mathbf{Z}(f) \in \mathfrak{F}$ либо $Z_2 = \mathbf{Z}(g) \in \mathfrak{F}$

ТЕОРЕМА 11. (а). Пусть M максимальный идеал в $C^*(uX)$, если $\mathbf{Z}(f) \cap \mathbf{Z}(g) \neq \emptyset$ для любого $g \in M$, тогда $f \in M$ и $\mathbf{Z}(f) \in \mathbf{Z}(M)$.

(б). Пусть \mathfrak{F} z_u -ультрафильтр на uX , если $Z \in \mathfrak{Z}(uX)$ и $Z \cap F \neq \emptyset$ для любого $F \in \mathfrak{F}$, тогда $Z \in \mathfrak{F}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы 4 следует, что (а) эквивалентно (б). Если выполнен пункт (б), тогда $\mathfrak{F} \cup \{Z\}$ центрированное семейство в $\mathfrak{Z}(uX)$, а т.к. \mathfrak{F} z_u -ультрафильтр, тогда $\mathfrak{F} \cup \{Z\} \subseteq \mathfrak{F}$ и $Z \in \mathfrak{F}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. Идеал I в $C^*(uX)$ называется z_u -идеалом, если из того что $\mathbf{Z}(f) \in \mathbf{Z}(I)$ следует, что $f \in I$ или, это равносильно тому, что $I = \mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{Z}(I))$.

Для всякого идеала J кольца $C^*(uX)$ идеал $I = \mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{Z}(J))$ является наименьшим z_u -идеалом содержащим J . Ясно, что всякий максимальный идеал является z_u -идеалом. Итак, отображение $\mathbf{Z} : C^*(uX) \rightarrow \mathfrak{Z}(uX)$ осуществляет биекцию между множеством всех z_u -идеалов кольца $C^*(uX)$ и множеством всех z_u -фильтров равномерного пространства uX .

Напомним, что идеал I кольца $C^*(uX)$ называется *простым*, если из того, что $fg \in I$ следует или $f \in I$ и $g \in I$.

ТЕОРЕМА 13. Каждый z_u -идеал в $C^*(uX)$ является пересечением некоторого числа простых идеалов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь теоремой 0.18. ([8]). Пусть I есть пересечение простых идеалов. Тогда $I = \{f^n : f \in I, n \in \mathbb{N}\}$. Ясно, что $\mathbf{Z}(f^n) = \mathbf{Z}(f)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$ и $f^n \in I$ влечет $f \in I$, т.е. $I = \mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{Z}(I))$ и I -является z_u -идеалом. Обратно, если I - z_u -идеал, тогда $f^n \in I$ влечет $f \in I$ и I является пересечением некоторого числа простых идеалов.

ТЕОРЕМА 14. Если I является простым z_u -идеалом кольца $C^*(uX)$, тогда $\mathbf{Z}(I)$ является простым z_u -фильтром на uX и, обратно, если Z простой z_u -фильтр на uX , то $\mathbf{Z}^{-1}(Z)$ простой идеал кольца $C^*(uX)$.

ТЕОРЕМА 15. Пусть \mathfrak{F} - простой z_u -фильтр на uX . Тогда \mathfrak{F} имеет точку прикосновения x тогда и только тогда, когда x является предельной точкой для \mathfrak{F} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть x - точка прикосновения простого z_u -фильтра \mathfrak{F} . Пусть V произвольная окрестность точки x являющиеся нуль - множеством, т.е. $V \in \mathfrak{Z}(uX)$ и $x \in \langle V \rangle$. Тогда существует такие $W \in \mathfrak{Z}(uX)$, что $x \in X \setminus W \subset V$. Это следует из того факта, что $\mathfrak{Z}(uX)$ образует базу замкнутых множеств uX . Тогда имеем $W \cup V = X \in \mathfrak{F}$, следовательно $V \in \mathfrak{F}$ т.к. $x \notin W$. Это означает, что \mathfrak{F} сходится к точке x . Обратное утверждение очевидно, т.к. $\bigcap \{\bar{F} : F \in \mathfrak{F}\} = \{x\} \neq \emptyset$.

Список литературы

- [1] Архангельский А.В., Пономарев В.И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. – М.: Наука, 1974.

- [2] *Борубаев А.А.* Равномерные пространства и равномерно непрерывные отображения. – Фрунзе, Илим. 1990.
- [3] *Charalambus M.G.* Uniform Dimension Function. Ph. D. dissertation. Univ. of London. 1971.
- [4] *Charalambus M.G.* A new covering dimension function for uniform spaces. J. London Math, Soc. 211 (1975) P. 137–143.
- [5] *Charalambus M.G.* Further theory and application of covering dimension of uniform spaces. Czech. Math. Journ. 1991. Vol. 41 (116). P. 378–394.
- [6] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986.
- [7] *Gillman L., Jerison M.* Ring of Continuous Functions. New York (1976).
- [8] *Isbell J.R.* Uniform spaces. Providence. (1964).