Всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами

Б.Е. Кангужин, А.С. Аипенова, А.А. Жамалбекова
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
e-mail: kanbalta.@mail.ru, a.aipenova@mail.ru

Аннотация

В работе дано полное описание всюду разрешимых краевых задач для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами на отрезке. Для наглядности все результаты иллюстрируются на неоднородных дифференциальных уравнениях четвертого порядка с переменными коэффициентами на отрезке.

1 Введение

Известно [1], что для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами всюду разрешимой задачей является задача Коши, то есть для всюду разрешимости краевые условия выбираются специальным образом. В данной работе предлагается еще один способ постановки всюду разрешимых краевых задач для неоднородных дифференциальных уравнений четвертого порядка с переменными коэффициентами. Для наглядности все результаты иллюстрируются на неоднородных дифференциальных уравнениях четвертого порядка с переменными коэффициентами на отрезке. В настоящей статье описаны всевозможные всюду разрешимые краевые задачи для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами на отрезке. Метод работы идейно близок к методам работ [2, 3, 4].

2 Вспомогательные утверждения и доказательства теорем

Теорема 1. В пространстве $L_2[0,1]$ решение задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами вида

$$y^{''''}(x)+p_1(x)y^{'''}(x)+p_2(x)y^{''}(x)+p_3(x)y^{'}(x)+p_4(x)y(x)=f(x), 0\le x\le 1, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$y(0)=0, y^{'}(0)=0, y^{''}(0)=0, y^{'''}(0)=0, \tag{2}$$

задается формулой

$$y(x)=\int_0^x k(x,t)f(t)dt, \tag{3}$$

где

$$k(x,t)=\frac{1}{\Delta(t)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y_4(x)\\ y_1^{''}(t) & y_2^{''}(t) & y_3^{''}(t) & y_4^{''}(t)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) & y_3^{'}(t) & y_4^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & y_4(t)\end{vmatrix}, \tag{4}$$

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} y_1^{'''}(t) & y_2^{'''}(t) & y_3^{'''}(t) & y_4^{'''}(t)\\ y_1^{''}(t) & y_2^{''}(t) & y_3^{''}(t) & y_4^{''}(t)\\ y_1^{'}(t) & y_2^{'}(t) & y_3^{'}(t) & y_4^{'}(t)\\ y_1(t) & y_2(t) & y_3(t) & y_4(t)\end{vmatrix}. \tag{5}$$

Здесь $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_3(x)$, $y_4(x)$ - решения однородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами.

Доказательства теоремы 1 приведены в работе [1].

Пусть $h(x)$ - произвольная четырежды дифференцируемая на отрезке $[0,\ 1]$ функция, примем $h^{''''}(x) \in L_2[0,1]$. Введем новую функцию по формуле:

$$I(x) = \int_0^x k(x,t)\left[h^{''''}(t) + p_1(t)h^{'''}(t) + p_2(t)h^{''}(t) + p_3(t)h^{'}(t) + p_4(t)h(t)\right]dt \qquad (6)$$

Какими свойствами обладает $I(x)$ функция? Вычислим значение функции $I(x)$ в точке $x = 0$.

$$I(0) = \int_0^0 k(0,t)\left[h^{''''}(t) + p_1(t)h^{'''}(t) + p_2(t)h^{''}(t) + p_3(t)h^{'}(t) + p_4(t)h(t)\right]dt = 0 \qquad (7)$$

Теперь найдем производную первого порядка функции $I(x)$ и найдем ее значение в точке $x = 0$.

$$I^{'}(x) = \int_0^x k_x^{'}(x,t)\left[h^{''''}(t) + p_1(t)h^{'''}(t) + p_2(t)h^{''}(t) + p_3(t)h^{'}(t) + p_4(t)h(t)\right]dt +$$

$$+k(x,x)\left[h^{''''}(x) + p_1(x)h^{'''}(x) + p_2(x)h^{''}(x) + p_3(x)h^{'}(x) + p_4(x)h(x)\right],$$

так как $k(x,x) = 0$, то получим следующую формулу:

$$I^{'}(x) = \int_0^x k_x^{'}(x,t)\left[h^{''''}(t) + p_1(t)h^{'''}(t) + p_2(t)h^{''}(t) + p_3(t)h^{'}(t) + p_4(t)h(t)\right]dt \qquad (8)$$

$$I^{'}(0) = \int_0^0 k_x^{'}(0,t)\left[h^{''''}(t) + p_1(t)h^{'''}(t) + p_2(t)h^{''}(t) + p_3(t)h^{'}(t) + p_4(t)h(t)\right]dt = 0 \qquad (9)$$

Найдем производную второго порядка функции $I(x)$:

$$I^{''}(x) = \int_0^x k_x^{''}(x,t)\left[h^{''''}(t) + p_1(t)h^{'''}(t) + p_2(t)h^{''}(t) + p_3(t)h^{'}(t) + p_4(t)h(t)\right]dt +$$

$$+k_x^{'}(x,x)\left[h^{''''}(x) + p_1(t)h^{'''}(x) + p_2(t)h^{''}(x) + p_3(t)h^{'}(x) + p_4(t)h(x)\right],$$

так как $k_x^{'}(x,x) = 0$, отсюда следует:

$$I^{''}(x) = \int_0^x k_x^{''}(x,t)\left[h^{''''}(t) + p_1(t)h^{'''}(t) + p_2(t)h^{''}(t) + p_3(t)h^{'}(t) + p_4(t)h(t)\right]dt \qquad (10)$$

$$I^{''}(0) = \int_0^0 k_x^{''}(0,t)\left[h^{''''}(t) + p_1(t)h^{'''}(t) + p_2(t)h^{''}(t) + p_3(t)h^{'}(t) + p_4(t)h(t)\right]dt = 0 \qquad (11)$$

Найдем производную третьего порядка функции $I(x)$:

$$I^{'''}(x) = \int_0^x k_x^{'''}(x,t)\left[h^{''''}(t) + p_1(t)h^{'''}(t) + p_2(t)h^{''}(t) + p_3(t)h^{'}(t) + p_4(t)h(t)\right]dt +$$

$$+k_x^{''}(x,x)\left[h^{''''}(x) + p_1(x)h^{'''}(x) + p_2(x)h^{''}(x) + p_3(x)h^{'}(x) + p_4(x)h(x)\right],$$

так как $k_x^{''}(x,x)=0$, то получим следующую формулу:

$$I^{'''}(x)=\int_0^x k_x^{'''}(x,t)\left[h^{''''}(t)+p_1(t)h^{'''}(t)+p_2(t)h^{''}(t)+p_3(t)h^{'}(t)+p_4(t)h(t)\right]dt \qquad (12)$$

$$I^{'''}(0)=\int_0^0 k_x^{'''}(0,t)\left[h^{''''}(t)+p_1(t)h^{'''}(t)+p_2(t)h^{''}(t)+p_3(t)h^{'}(t)+p_4(t)h(t)\right]dt=0 \quad (13)$$

Найдем производную четвертого порядка функции $I(x)$:

$$I^{''''}(x)=\int_0^x k_x^{''''}(x,t)\left[h^{''''}(t)+p_1(t)h^{'''}(t)+p_2(t)h^{''}(t)+p_3(t)h^{'}(t)+p_4(t)h(t)\right]dt+$$

$$+k_x^{'''}(x,x)\left[h^{''''}(x)+p_1(x)h^{'''}(x)+p_2(x)h^{''}(x)+p_3(x)h^{'}(x)+p_4(x)h(x)\right],$$

так как $k_x^{'''}(x,x)=1$, то получим следующую формулу:

$$I^{''''}(x)=\int_0^x k_x^{''''}(x,t)\left[h^{''''}(t)+p_1(t)h^{'''}(t)+p_2(t)h^{''}(t)+p_3(t)h^{'}(t)+p_4(t)h(t)\right]dt+$$

$$+\left[h^{''''}(x)+p_1(x)h^{'''}(x)+p_2(x)h^{''}(x)+p_3(x)h^{'}(x)+p_4(x)h(x)\right] \qquad (14)$$

Если взять линейную комбинацию (6), (8), (10), (12), (14) в виде $I^{''''}(x)+p_1(x)I^{'''}(x)+p_2(x)I^{''}(x)+p_3(x)I^{'}(x)+p_4(x)I(x)$, то получим

$$I^{''''}(x)+p_1(x)I^{'''}(x)+p_2(x)I^{''}(x)+p_3(x)I^{'}(x)+p_4I(x)=$$

$$=\int_0^x\left[k_x^{''''}(x,t)+p_1(x)k_x^{'''}(x,t)+p_2(x)k_x^{''}(x,t)+p_3(x)k_x^{'}(x,t)+p_4(x)k(x,t)\right]*$$

$$*\left[h^{''''}(t)+p_1(t)h^{'''}(t)+p_2(t)h^{''}(t)+p_3(t)h^{'}(t)+p_4(t)h(t)\right]dt+$$

$$+h^{''''}(x)+p_1(x)h^{'''}(x)+p_2(x)h^{''}(x)+p_3(x)h^{'}(x)+p_4(x)h(x),$$

то есть

$$I^{''''}(x)+p_1(x)I^{'''}(x)+p_2(x)I^{''}(x)+p_3(x)I^{'}(x)+p_4(x)I(x)=$$

$$=h^{''''}(x)+p_1(x)h^{'''}(x)+p_2(x)h^{''}(x)+p_3(x)h^{'}(x)+p_4(x)h(x). \qquad (15)$$

Здесь учтено, что при $0\le t<x<1$, $k_x^{''''}(x,t)+p_1(x)k_x^{'''}(x,t)+p_2(x)\,k_x^{''}(x,t)+p_3(x)\,k_x^{'}(x,t)+p_4(x)\,k(x,t)=0$.

Таким образом мы показали, что значение самой функции $I(x)$ и производной первого, второго,третьего порядка в точке $x=0$ равно нулю и существует производная четвертого порядка, причем выполняется соотношение (15).

С другой стороны если вспомнить формулу Лагранжа, то $I(x)$ функцию можно переписать в виде:

$$I(x)=\int_0^x k(x,t)\left[h^{''''}(t)+p_1(t)h^{'''}(t)+p_2(t)h^{''}(t)+p_3(t)h^{'}(t)+p_4(t)h(t)\right]dt=$$

$$=\int_0^x h(t)\left[k_t^{''''}(x,t)-(p_1(t)k(x,t))_t^{'''}+(p_2(t)k(x,t))_t^{''}-(p_3(t)k(x,t))_t^{'}+p_4(t)k(x,t)\right]dt-$$

$$-h(x)+k_t^{'''}(x,0)h(0)-k_t^{''}(x,0)[h^{'}(0)+p_1^{''}(0)h(0)]+k_t^{'}(x,0)[h^{''}(0)+p_1^{'}(0)h^{'}(0)+$$
$$+p_2^{'}(0)h(0)]-k(x,0)[h^{'''}(0)+p_1(0)h^{''}(0)+p_2(0)h^{'}(0)+p_3(0)h(0)]. \qquad (16)$$

где $\begin{matrix} y_1(0)=1 & y_1^{'}(0)=0 & y_1^{''}(0)=0 & y_1^{'''}(0)=0 \\ y_2(0)=0 & y_2^{'}(0)=1 & y_2^{''}(0)=0 & y_2^{'''}(0)=0 \\ y_3(0)=0 & y_3^{'}(0)=0 & y_3^{''}(0)=1 & y_3^{'''}(0)=0 \\ y_4(0)=0 & y_4^{'}(0)=0 & y_4^{''}(0)=0 & y_4^{'''}(0)=1 \end{matrix}$ начальные значения фундаментальной системы решений $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)$. То есть (16) формула примет следующий вид:

$$I(x)=h(x)-k_t^{'''}(x,0)h(0)+k_t^{''}(x,0)[h^{'}(0)+p_1^{''}(0)h(0)]-$$
$$-k_t^{'}(x,0)[h^{''}(0)+p_1^{'}(0)h^{'}(0)+p_2^{'}(0)h(0)]+$$
$$+k(x,0)[h^{'''}(0)+p_1(0)h^{''}(0)+p_2(0)h^{'}(0)+p_3(0)h(0)=$$
$$=h(x)-h(0)y_1(x)-h^{'}(0)y_2(x)-h^{''}(0)y_3(x)-h^{'''}(0)y_4(x). \qquad (17)$$

Удобно вести обозначение $M(x)=h(x)-I(x)$. Найдем производную первого и второго, третьего, четвертого порядка функции $M(x)$.

$$M^{'}(x)=h^{'}(x)-I^{'}(x),$$
$$M^{''}(x)=h^{''}(x)-I^{''}(x).$$
$$M^{'''}(x)=h^{'''}(x)-I^{'''}(x).$$
$$M^{''''}(x)=h^{''''}(x)-I^{''''}(x).$$

Если взять линейную комбинацию $M^{''''}(x)+p_1(x)M^{'''}(x)+p_2(x)M^{''}(x)+p_3(x)M^{'}(x)+p_4(x)M(x)$, то в результате для любой гладкой функции $h(x)$ получим соотношение

$$M^{''''}(x)+p_1(x)M^{'''}(x)+p_2(x)M^{''}(x)+p_3(x)M^{'}(x)+p_4(x)M(x)=$$
$$=h^{''''}(x)-I^{''''}(x)+p_1(x)h^{'''}(x)-p_1(x)I^{'''}(x)+p_2(x)h^{''}(x)-p_2(x)I^{''}(x)+p_3(x)h^{'}(x)-$$
$$-p_3(x)I^{'}(x)+p_4(x)h(x)-p_4(x)I(x)=0,$$

или

$$M^{''''}(x)+p_1(x)M^{'''}(x)+p_2(x)M^{''}(x)+p_3(x)M^{'}(x)+p_4(x)M(x)=0. \qquad (18)$$

Теперь используем граничные условия (7), (9), (11), (13) тогда для произвольной гладкой функции $h(x)$ имеем граничные соотношения

$$h(x)|_{x=0}-M(x)|_{x=0}=0,$$
$$h^{'}(x)|_{x=0}-M^{'}(x)|_{x=0}=0,$$
$$h^{''}(x)|_{x=0}-M^{''}(x)|_{x=0}=0,$$
$$h^{'''}(x)|_{x=0}-M^{'''}(x)|_{x=0}=0.$$

В силу произвольности $h(x)$ при $t\in[0,1]$ убеждаемся в справедливости следующего свойства функции $k(x,t)$:

$$k(x,t)|_{x=0,\,t=0}=0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}k(x,t)|_{x=0,\,t=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}k(x,t)|_{x=0,\,t=0} = 0.$$

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}k(x,t)|_{x=0,\,t=0} = -1. \tag{19}$$

Поэтому сформулируем необходимые для дальнейшего результаты в виде отдельного утверждение.

Теорема 2. *Функция $k(x,t)$ задачи Коши для неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка с переменными коэффициентами на отрезке обладает свойствами:*
1) $k(P,Q) = k(Q,P), \forall Q,P \in [0,1]$,
2) $k(P,Q) \leq 0, \forall Q,P \in [0,1]$,
3) $k_x^{''''}(Q,P) + p_1(Q)k_x^{'''}(Q,P) + p_2(Q)k^{''}(Q,P) + p_3(Q)k^{'}(Q,P) + p_4(Q)k(Q,P) = 0$, $\forall Q,P \in [0,1]$,
4) при $P = Q$, $k(P,Q) = 0$
5) при $P = Q = 0$ справедливо соотношение (19).

Теперь образуем новую функцию по формуле:

$$W(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt + h(x) - I(x). \tag{20}$$

где $h(x)$ - произвольная достаточно гладкая функция. $I(x)$ - определяется по формуле (6).

3 Основные результаты

Теорема 3. *Функция $W(x)$, введенная по формулам (20), является решением следующей задачи:*

$$W^{''''}(x) + p_1(x)W^{'''}(x) + p_2(x)W^{''}(x) + p_3(x)W^{'}(x) + p_4(x)W(x) = f(x), 0 \leq x \leq 1, \tag{21}$$

$$W(x)|_{x=0} = h(x)|_{x=0}, \tag{22}$$

$$W^{'}(x)|_{x=0} = h^{'}(x)|_{x=0},$$

$$W^{''}(x)|_{x=0} = h^{''}(x)|_{x=0},$$

$$W^{'''}(x)|_{x=0} = h^{'''}(x)|_{x=0},$$

где $h(x)$– произвольная достаточно гладкая функция.

Причем решение краевой задачи (21), (22) единственно, то есть решение зависит только от граничных значений $h(x)\big|_{x=0}$, $h^{'}(x)\big|_{x=0}$, $h^{''}(x)\big|_{x=0}$, $h^{'''}(x)\big|_{x=0}$ но не зависит от $h(x)$, $h^{'}(x)$, $h^{''}(x)$, $h^{'''}(x)$ когда $0 < x < 1$.

Доказательство. Заметим, что из соотношения (17) представление (20) можно переписать в виде

$$W(x) = \int_0^x k(x,t)f(t)dt + h(0)y_1(x) + h^{'}(0)y_2(x) + h^{''}(0)y_3(x) + h^{'''}(0)y_4(x). \tag{23}$$

Проверим какими свойствами обладает $W(x)$ функция. Вычислим значение функции $W(x)$ в точке $x=0$.

$$W(0)=\int_0^0 k(0,t)f(t)dt+h(0)y_1(0)+h^{'}(0)y_2(0)+h^{''}(0)y_3(0)+h^{'''}(0)y_4(0)=h(0). \quad (24)$$

Найдем производную $W^{'}(x)$, $W^{''}(x)$, $W^{'''}(x)$, $W^{''''}(x)$ и найдем значение $W^{'}(x)|_{x=0}$, $W^{''}(x)|_{x=0}$, $W^{'''}(x)|_{x=0}$.

$$W^{'}(x)=\int_0^x k_x^{'}(x,t)f(t)dt+k(x,x)f(x)+h(0)y_1^{'}(x)+h^{'}(0)y_2^{'}(x)+h^{''}(0)y_3^{'}(x)+$$

$$+h^{'''}(0)y_4^{'}(x), \quad (25)$$

$$W^{'}(0)=\int_0^0 k_x^{'}(0,t)f(t)dt+h(0)y_1^{'}(0)+h^{'}(0)y_2^{'}(0)+h^{''}(0)y_3^{'}(0)+h^{'''}(0)y_4^{'}(0)=h^{'}(0). \quad (26)$$

$$W^{''}(x)=\int_0^x k_x^{''}(x,t)f(t)dt+k_x^{'}(x,x)f(x)+h(0)y_1^{''}(x)+h^{'}(0)y_2^{''}(x)+h^{''}(0)y_3^{''}(x)+$$

$$+h^{'''}(0)y_4^{''}(x), \quad (27)$$

$$W^{''}(0)=\int_0^0 k_x^{''}(0,t)f(t)dt+h(0)y_1^{''}(0)+h^{'}(0)y_2^{''}(0)+h^{''}(0)y_3^{''}(0)+h^{'''}(0)y_4^{''}(0)=h^{''}(0), \quad (28)$$

$$W^{'''}(x)=\int_0^x k_x^{'''}(x,t)f(t)dt+k_x^{''}(x,x)f(x)+h(0)y_1^{'''}(x)+h^{'}(0)y_2^{'''}(x)+h^{''}(0)y_3^{'''}(x)+$$

$$+h^{'''}(0)y_4^{'''}(x), \quad (29)$$

$$W^{'''}(0)=\int_0^0 k_x^{'''}(0,t)f(t)dt+h(0)y_1^{'''}(0)+h^{'}(0)y_2^{'''}(0)+h^{''}(0)y_3^{'''}(0)+$$

$$+h^{'''}(0)y_4^{'''}(0)=h^{'''}(0), \quad (30)$$

$$W^{''''}(x)=\int_0^x k_x^{''''}(x,t)f(t)dt+f(x)+h(0)y_1^{''''}(x)+h^{'}(0)y_2^{''''}+h^{''}(0)y_3^{''''}(x)+h^{'''}(0)y_4^{''''}(x). \quad (31)$$

Если взять линейную комбинацию (23), (25), (27), (29), (31) в виде $W^{''''}(x)+p_1(x)W^{'''}(x)+p_2(x)W^{''}(x)+p_3(x)W^{'}(x)+p_4(x)W(x)$, то получим

$$W^{''''}(x)+p_1(x)W^{'''}(x)+p_2(x)W^{''}(x)+p_3(x)W^{'}(x)+p_4(x)W(x)=$$

$$=\int_0^x \left[k_x^{''''}(x,t)+p_1(x)k_x^{'''}(x,t)+p_2(x)k_x^{''}(x,t)+p_3(x)k_x^{'}(x,t)+p_4(x)k(x,t)\right]f(t)dt+$$

$$+h(0)\left[y_1^{''''}(x)+p_1(x)y_1^{'''}(x)+p_2(x)y_1^{''}(x)+p_3(x)y_1^{'}(x)+p_4(x)y_1(x)\right]+$$

$$+h^{'}(0)\left[y_2^{''''}(x)+p_1(x)y_2^{'''}(x)+p_2(x)y_2^{''}(x)+p_3(x)y_2^{'}(x)+p_4(x)y_2(x)\right]+$$

$$+h^{''}(0)\left[y_3^{''''}(x)+p_1(x)y_3^{'''}(x)+p_2(x)y_3^{''}(x)+p_3(x)y_3^{'}(x)+p_4(x)y_3(x)\right]+$$

$$+h^{'''}(0)\left[y_4^{''''}(x)+p_1(x)y_4^{'''}(x)+p_2(x)y_4^{''}(x)+p_3(x)y_4^{'}(x)+p_4(x)y_4(x)\right]+f(x),$$

$$W^{''''}(x)+p_1(x)W^{'''}(x)+p_2(x)W^{''}(x)+p_3(x)W^{'}(x)+p_4(x)W(x)=f(x). \qquad (32)$$

Из формул (24), (26), (28), (30), (32) вытекает утверждение теоремы 3.

Теперь покажем, как используя теорему 3 можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с переменными коэффициентами на отрезке $[0,1]$.

Для этого достаточно, чтобы функция $h(x)$ непрерывным образом зависела от функции $f(x)$, то есть пусть существует непрерывный в смысле нормы $L_2[0,1]$ оператор K, отображающий $f(x)$ в $h(x)$. Напомним $h(x)$ - гладкая функция. Итак, пусть $h=Kf(x)$. Тогда задача (21), (22) примет вид

$$W^{''''}(x)+p_1(x)W^{'''}(x)+p_2(x)W^{''}(x)+p_3(x)W^{'}(x)+p_4(x)W(x)=f(x), 0\le x\le 1, \qquad (33)$$

$$W(x)|_{x=0}-K(W^{''''}+p_1W^{'''}+p_2W^{''}+p_3W^{'}+p_4W)(x)|_{x=0}=0, \qquad (34)$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0}-\frac{d}{dx}K(W^{''''}+p_1W^{'''}+p_2W^{''}+p_3W^{'}+p_4W(x))|_{x=0}=0.$$

$$\frac{d^2}{dx^2}W(x)|_{x=0}-\frac{d^2}{dx^2}K(W^{''''}+p_1W^{'''}+p_2W^{''}+p_3W^{'}+p_4W(x))(x)|_{x=0}=0.$$

$$\frac{d^3}{dx^3}W(x)|_{x=0}-\frac{d^3}{dx^3}K(W^{''''}+p_1W^{'''}+p_2W^{''}+p_3W^{'}+p_4W(x))(x)|_{x=0}=0.$$

Условия (34) накладываемые на функцию $W(x)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (33) при любой правой части $f(x)$ имело единственное решение. Таким образом, задача (33), (34) представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми "краевыми"условиями вида (34). Итак, справедливо

Теорема 4. *Для любого непрерывного в смысле $L_2[0,1]$оператора K отображающего пространство $\{f\}\in L_2[0,\,1]$ во множество гладких функции $\{h\}\in W_2^4[0,\,1]$ задача (33), (34) имеет единственное устойчивое в смысле $L_2[0,1]$ решение при всех правых частях $f(x)$ из $L_2[0,1]$.*

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 5. *Если уравнение (33) при всех правых частях $f(x)$ из $L_2[0,1]$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое в смысле $L_2[0,1]$ решение, то найдется непрерывный в смысле $L_2[0,1]$ оператор K, отображающий пространство $\{f\}\in L_2[0,1]$ в множество гладких функции $\{h\}\in W_2^4[0,1]$, такой что дополнительное условие эквивалентно условию вида (34) с оператором K.*

Доказательство. Пусть уравнение (33) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $f(x)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $W(x,f)$. Для удобства введем новую функцию $u_0(x,f)=\int_0^x k(x,t)f(t)dt$. Рассмотрим разность $\upsilon(x)=W(x,f)-u_0(x,f)$. Функция $\upsilon(x)$ удовлетворяет условию $\upsilon^{''''}+p_1\upsilon^{'''}+p_2\upsilon^{''}+p_3\upsilon^{'}+p_4\upsilon=0$. Таким образом, для любого f единственным образом находим υ, то есть существует линейный оператор $\upsilon=Kf(x)$. С другой стороны, введем новую функцию $\omega(x,f)=u_0(x,f)+\upsilon(0,f)y_1(x)+\upsilon^{'}(0,f)y_2(x)+$ $+\,\upsilon^{''}(0,f)y_3(x)+\upsilon^{'''}(0,f)y_4(x)$. Последняя формула аналогична формуле (23). В данном случае роль $h(x)$ играет функция $\upsilon(x)$. Следовательно, выше приведенные рассуждения из теоремы 3 показывают, что

$$\omega^{''''}(x)+p_1(x)\omega^{'''}(x)+p_2(x)\omega^{''}(x)+p_3(x)\omega^{'}(x)+p_4(x)\omega(x)=f(x), \qquad (35)$$

$$\begin{aligned} \omega(x)|_{x=0} &= \upsilon(x,f)|_{x=0}, \\ \frac{d}{dx}\omega(x)|_{x=0} &= \frac{d}{dx}\upsilon(x,f)|_{x=0}, \\ \frac{d^2}{dx^2}\omega(x)|_{x=0} &= \frac{d^2}{dx^2}\upsilon(x,f)|_{x=0}, \\ \frac{d^3}{dx^3}\omega(x)|_{x=0} &= \frac{d^3}{dx^3}\upsilon(x,f)|_{x=0}, \end{aligned} \tag{36}$$

где $\upsilon(x) = Kf(x)$ или $\upsilon(x) = K(\omega'''' + p_1\omega''' + p_2\omega'' + p_3\omega' + p_4\omega)(x)$. С другой стороны, ясно что $W(x,f) = u_0(x,f) + \upsilon(x)$. Следовательно, имеем

$$W''''(x) + p_1(x)W'''(x) + p_2(x)W''(x) + p_3(x)W'(x) + p_4(x)W(x) = f(x), 0 \le x \le 1,$$

$$\begin{aligned} W(x,f)|_{x=0} &= \upsilon(x,f)|_{x=0}, \\ \frac{d}{dx}W(x,f)|_{x=0} &= \frac{d}{dx}\upsilon(x,f)|_{x=0}. \\ \frac{d^2}{dx^2}W(x,f)|_{x=0} &= \frac{d^2}{dx^2}\upsilon(x,f)|_{x=0}. \\ \frac{d^3}{dx^3}W(x,f)|_{x=0} &= \frac{d^3}{dx^3}\upsilon(x,f)|_{x=0}. \end{aligned} \tag{37}$$

Сравнивая соотношение (36) и (37) видим, что $W(x,f) = \omega(x,f)$, то есть дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид:

$$W(x)|_{x=0} - K(W'' + p_1W' + p_2W)(x)|_{x=0} = 0,$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d}{dx}K(W'''' + p_1W''' + p_2W'' + p_3W' + p_4W)(x)|_{x=0} = 0.$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d^2}{dx^2}K(W'''' + p_1W''' + p_2W'' + p_3W' + p_4W)(x)|_{x=0} = 0.$$

$$\frac{d}{dx}W(x)|_{x=0} - \frac{d^3}{dx^3}K(W'''' + p_1W''' + p_2W'' + p_3W' + p_4W)(x)|_{x=0} = 0.$$

Остается заметить, что оператор K-непрерывен в смысле $L_2[0,1]$ и отображает пространство $L_2[0,1]$ в $W_2^4[0,1]$. Теорема 5 полностью доказана.

Список литературы

[1] *Наймарк М.А.*, Линейные дифференциальные операторы. - М.: Наука, 1969. - 528 с.

[2] *Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О.*, О регулярных задачах для уравнения Лаврентьева - Бицадзе. // Диф. уравнения. 1981. Т.17, №5. - С. 873-885.

[3] *Кальменов Т.Ш.*, О регулярных краевых задачах для волнового уравнения // Диф. уравнения. 1981. Т.17, №5. - С. 1105-1121.

[4] *Павлов Б.С.*, Теория расширений и явнорешаемые модели // Успехи мат. наук, Т.42, №6(258), 1987. - С. 99-131.