Всюду разрешимые краевые задачи для неоднородных систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

Д.Б. Нурахметов, К.С. Туленов, Д. Дәуітбек
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан,
e-mail: tulen.kz@mail.ru; dos-mm@mail.ru

Аннотация

В работе дано полное описание всюду разрешимых краевых задач для неоднородных систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами на отрезке.

1 Введение

Известно [1], что для неоднородных систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами всюду разрешимой задачей является задача Коши, то есть для всюду разрешимости краевые условия выбираются специальным образом. В данной работе предлагается еще один способ постановки всюду разрешимых краевых задач для неоднородных систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Для наглядности все результаты иллюстрируются на неоднородные системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами на отрезке. В настоящей статьи описаны всевозможные всюду разрешимые краевые задачи для неоднородных систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами на отрезке.

2 Вспомогательные утверждения и доказательства теорем

Теорема 1 *В пространства $L_2[0,1]$ решение задачи Коши для системы неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами вида:*

$$\begin{cases} a_1\frac{dx_1}{dt} + a_2\frac{dx_2}{dt} = f_1(t) - c_1x_1(t) - c_2x_2(t), \\ b_1\frac{dx_1}{dt} + b_2\frac{dx_2}{dt} = f_2(t) - d_1x_1(t) - d_2x_2(t) \end{cases} \quad 0<t<1; \tag{1}$$

$$f_1(t), f_2(t) \in L_2[0,1],$$
$$a_1b_2 \neq a_2b_1,$$
$$\frac{c_1}{a_1} = \alpha = \frac{d_1}{b_1},$$
$$\frac{c_2}{a_2} = \beta = \frac{d_2}{b_2}$$

с начальными условиями:

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0 \tag{2}$$

задается формулой:

$$\begin{cases} x_1(t) = \int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \\ x_2(t) = \int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi \end{cases} \tag{3}$$

где

$$k_1(t,\xi) = e^{\alpha(\xi - t)} \qquad k_2(t,\xi) = e^{\beta(\xi-t)} \tag{4}$$

$$\varphi(\xi) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} f_1(\xi) & a_2 \\ f_2(\xi) & b_2 \end{vmatrix} \qquad \psi(\xi) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_1 & f_1(\xi) \\ b_1 & f_2(\xi) \end{vmatrix} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \tag{5}$$

Доказательство Докажем, что правая часть соотношения (3) удовлетворяет краевой задаче (1), (2). Для этого находим $x_1'(t)$, $x_2'(t)$.

$$\begin{cases} x_1'(t) = \varphi(t) - \alpha\int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi, \\ x_2'(t) = \psi(t) - \beta\int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi \end{cases} \tag{6}$$

Теперь формулу (6) поставим левую часть формулы (1).

$$a_1x_1'(t) + a_2x_2'(t) = a_1\varphi(t) - a_1\alpha\int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi + a_2\psi(t) - a_2\beta\int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi =$$
$$a_1\frac{b_2f_1(t)-a_2f_2(t)}{a_1b_2-a_2b_1} + a_2\frac{a_1f_2(t)-b_1f_1(t)}{a_1b_2-a_2b_1} - c_1x_1(t) - c_2x_2(t) = f_1(t) - c_1x_1(t) - c_2x_2(t),$$
$$b_1x_1'(t) + b_2x_2'(t) = b_1\varphi(t) - b_1\alpha\int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi + b_2\psi(t) - b_2\beta\int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi =$$
$$b_1\frac{b_2f_1(t)-a_2f_2(t)}{a_1b_2-a_2b_1} + b_2\frac{a_1f_2(t)-b_1f_1(t)}{a_1b_2-a_2b_1} - d_1x_1(t) - d_2x_2(t) = f_2(t) - d_1x_1(t) - d_2x_2(t)$$

Из формулы (3) выполнение начальных условий очевидно.

Теорема 1 доказана.

Сформулируем необходимые для дальнейшего результаты в виде отдельного утверждения.

Лемма 1 *Функции $k_1(t,\xi)$, $k_2(t,\xi)$ задачи Коши для системы неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами на отрезке обладает свойствами:*

1)$k_i(P,Q) = k_i(Q,P), i = 1,2; \forall P,Q \in [0,1]$,
2)$k_i(P,Q) > 0, i = 1,2; \forall P,Q \in [0,1]$,
3)$(k_1)_t'(P,Q) + \alpha k_1(P,Q) = 0, (k_2)_t'(P,Q) + \beta k_2(P,Q) = 0, \forall P,Q \in [0,1]$,
4) *при* $P = Q, k_i(P,Q) = 1, i = 1,2$
5) *при* $P = Q = 0, k_i(P,Q) = 1, i = 1,2.$

Теперь образуем новую функцию по формуле:

$$\begin{cases} W_1(t) = \int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi + h_1(0)k_1(t,0), \\ W_2(t) = \int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi + h_2(0)k_2(t,0) \end{cases} \tag{7}$$

Теорема 2 *Функции $W_1(t)$, $W_2(t)$, введенные по формуле (7), является решением следующей задачи:*

$$\begin{cases} a_1\frac{dW_1}{dt} + a_2\frac{dW_2}{dt} = f_1(t) - c_1W_1(t) - c_2W_2(t), \\ \\ b_1\frac{dW_1}{dt} + b_2\frac{dW_2}{dt} = f_2(t) - d_1W_1(t) - d_2W_2(t) \end{cases} \quad 0<t<1; \tag{8}$$

$$\begin{cases} W_1(t)|_{t=0} = h_1(t)|_{t=0}, \\ W_2(t)|_{t=0} = h_2(t)|_{t=0} \end{cases} \tag{9}$$

где $h_1(t)$, $h_2(t)$-произвольные достаточно гладкие функций.

Причем решение краевой задачи (8), (9) единственно, то есть решение зависит, только от граничных значений $h_1(t)|_{t=0}$, $h_2(t)|_{t=0}$, но не зависит от $h_1(t)$, $h_2(t)$ когда $0 < t < 1$.

Доказателство Преобразуем формулу (6) и используем формулу (3):

$$\begin{cases} x_1'(t) + \alpha x_1(t) = \varphi(t), \\ x_2'(t) + \beta x_2(t) = \psi(t) \end{cases} \tag{10}$$

Пусть $h_1(t)$, $h_2(t)-$ произвольные дифференцируемые на отрезке $[0,1]$ функции. Введем новую функции $I_1(t)$, $I_2(t)-$ следующим образом:

$$\begin{cases} I_1(t) = \int_0^t k_1(t,\xi)[h_1^{'}(\xi) + \alpha h_1(\xi)]d\xi, \\ I_2(t) = \int_0^t k_2(t,\xi)[h_2^{'}(\xi) + \beta h_2(\xi)]d\xi \end{cases} \tag{11}$$

Какими свойствами обладают $I_1(t), I_2(t)$ функции? Вычислим значение функции $I_1(t)$, $I_2(t)$ в точке $t = 0$.

$$\begin{cases} I_1(0) = \int_0^0 k_1(0,\xi)[h_1^{'}(\xi) + \alpha h_1(\xi)]d\xi = 0, \\ I_2(0) = \int_0^0 k_2(0,\xi)[h_2^{'}(\xi) + \beta h_2(\xi)]d\xi = 0 \end{cases} \tag{12}$$

Теперь найдем производные первого порядка функции $I_1(t)$, $I_2(t)$ и найдем их значение в точке $t = 0$.

$$I_1^{'}(t) = k_1(t,t)[h_1^{'}(t) + \alpha h_1(t)] + \int_0^t (k_1)_t^{'}(t,\xi)[h_1^{'}(\xi) + \alpha h_1(\xi)]d\xi,$$
$$I_2^{'}(t) = k_2(t,t)[h_2^{'}(t) + \beta h_2(t)] + \int_0^t (k_2)_t^{'}(t,\xi)[h_2^{'}(\xi) + \beta h_2(\xi)]d\xi$$

так как $k_1(t,t) = 1$, $k_2(t,t) = 1$ и $(k_1)_t^{'}(t,\xi) = -\alpha k_1(t,\xi)$, $(k_2)_t^{'}(t,\xi) = -\beta k_2(t,\xi)$, то получим следующую формулу:

$$\begin{cases} I_1^{'}(t) = h_1^{'}(t) + \alpha h_1(t) - \alpha \int_0^t k_1(t,\xi)[h_1^{'}(\xi) + \alpha h_1(\xi)]d\xi, \\ I_2^{'}(t) = h_2^{'}(t) + \beta h_2(t) - \beta \int_0^t k_2(t,\xi)[h_2^{'}(\xi) + \beta h_2(\xi)]d\xi \end{cases} \tag{13}$$

$$I_1^{'}(0) = h_1^{'}(0) + \alpha h_1(0) - \alpha \int_0^0 k_1(0,\xi)[h_1^{'}(\xi) + \alpha h_1(\xi)]d\xi = h_1^{'}(0) + \alpha h_1(0),$$
$$I_2^{'}(0) = h_2^{'}(0) + \beta h_2(0) - \beta \int_0^0 k_2(0,\xi)[h_2^{'}(\xi) + \beta h_2(\xi)]d\xi = h_2^{'}(0) + \beta h_2(0)$$

то есть

$$\begin{cases} I_1^{'}(0) = h_1^{'}(0) + \alpha h_1(0), \\ I_2^{'}(0) = h_2^{'}(0) + \beta h_2(0) \end{cases} \tag{14}$$

Если взять линейную комбинацию (11), (13) в виде $I_1^{'}(t) + \alpha I_1(t)$, $I_2^{'}(t) + \beta I_2(t)$ то получим

$$I_1^{'}(t) + \alpha I_1(t) = h_1^{'}(t) + \alpha h_1(t) - \alpha \int_0^t k_1(t,\xi)[h_1^{'}(\xi) + \alpha h_1(\xi)]d\xi + \alpha \int_0^t k_1(t,\xi)[h_1^{'}(\xi) + \alpha h_1(t)]d\xi,$$
$$I_2^{'}(t) + \beta I_2(t) = h_2^{'}(t) + \beta h_2(t) - \beta \int_0^t k_2(t,\xi)[h_2^{'}(\xi) + \beta h_2(\xi)]d\xi + \beta \int_0^t k_2(t,\xi)[h_2^{'}(\xi) + \beta h_2(t)]d\xi$$

то есть

$$\begin{cases} I_1^{'}(t) + \alpha I_1(t) = h_1^{'}(t) + \alpha h_1(t), \\ I_2^{'}(t) + \beta I_2(t) = h_2^{'}(t) + \beta h_2(t) \end{cases} \tag{15}$$

С другой стороны если вспомнить формулу Лагранжа, то $I_1(t)$, $I_2(t)$ функции можно переписать в виде:

$$I_1(t) = \int_0^t k_1(t,\xi)[h_1^{'}(\xi) + \alpha h_1(\xi)]d\xi = k_1(t,\xi)h_1(\xi)|_0^t - \int_0^t [(k_1)_\xi^{'}(t,\xi)h_1(\xi) - \alpha k_1(t,\xi)h_1(\xi)]d\xi$$
$$I_2(t) = \int_0^t k_2(t,\xi)[h_2^{'}(\xi) + \beta h_2(\xi)]d\xi = k_2(t,\xi)h_2(\xi)|_0^t - \int_0^t [(k_2)_\xi^{'}(t,\xi)h_2(\xi) - \beta k_2(t,\xi)h_2(\xi)]d\xi$$

так как $k_1(t,t) = 1$, $k_2(t,t) = 1$ и $(k_1)_\xi^{'}(t,\xi) = \alpha k_1(t,\xi)$, $(k_2)_\xi^{'}(t,\xi) = \beta k_2(t,\xi)$, то получим следующую формулу:

$$\begin{cases} I_1(t) = h_1(t) - h_1(0)k_1(t,0), \\ I_2(t) = h_2(t) - h_2(0)k_2(t,0) \end{cases} \tag{16}$$

Удобно вести обозначение $M_1(t) = h_1(t) - I_1(t)$, $M_2(t) = h_2(t) - I_2(t)$. Найдем производные первого порядка функции $M_1(t), M_2(t)$.

$$\begin{cases} M_1'(t) = h_1'(t) - I_1'(t), \\ M_2'(t) = h_2'(t) - I_2'(t) \end{cases}$$

Если взять линейную комбинацию $M_1'(t) + \alpha M_1(t)$, $M_2'(t) + \beta M_2(t)$, то в результате для любых гладких функции $h_1(t)$, $h_2(t)$ получим соотношение

$$\begin{array}{c} M_1'(t) + \alpha M_1(t) = h_1'(t) - I_1'(t) + \alpha h_1(t) - \alpha I_1(t) = 0 \\ M_2'(t) + \beta M_2(t) = h_2'(t) - I_2'(t) + \beta h_2(t) - \beta I_2(t) = 0 \end{array}$$

или

$$\begin{cases} M_1'(t) + \alpha M_1(t) = 0, \\ M_2'(t) + \beta M_2(t) = 0 \end{cases} \qquad (17)$$

Теперь используем граничную условию (12), тогда для произвольных гладких функции $h_1(t)$, $h_2(t)$ имеем соотношения

$$\begin{cases} h_1(t)|_{t=0} - M_1(t)|_{t=0} = 0, \\ h_2(t)|_{t=0} - M_2(t)|_{t=0} = 0 \end{cases} \qquad (18)$$

Теперь образуем новую функцию по формуле:

$$\begin{cases} W_1(t) = \int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi + h_1(t) - I_1(t), \\ W_2(t) = \int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi + h_2(t) - I_2(t) \end{cases} \qquad (19)$$

где $h_1(t)$, $h_2(t)$ - произвольные достаточно гладкие функций. $I_1(t)$, $I_2(t)$ - определяется по формуле (16).

Заметим, что из соотношения (16) представление (19) можно переписать в виде (7).

Проверим, какими свойствами обладают $W_1(t)$, $W_2(t)$ функции. Вычислим значений функции $W_1(t)$, $W_2(t)$ в точке $t = 0$.

$$\begin{cases} W_1(0) = \int_0^0 k_1(0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + h_1(0)k_1(0,0) = h_1(0), \\ W_2(0) = \int_0^0 k_2(0,\xi)\psi(\xi)d\xi + h_2(0)k_2(0,0) = h_2(0) \end{cases} \qquad (20)$$

Найдем производные $W_1'(t)$, $W_2'(t)$ и найдем значении $W_1'(t)|_{t=0}$, $W_2'(t)|_{t=0}$.

$$\begin{cases} W_1'(t) = -\alpha\int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi + k_1(t,t)\varphi(t) - \alpha h_1(0)k_1(t,0), \\ W_2'(t) = -\beta\int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi + k_2(t,t)\psi(t) - \beta h_2(0)k_2(t,0) \end{cases} \qquad (21)$$

$$\begin{cases} W_1'(0) = -\alpha\int_0^0 k_1(0,\xi)\varphi(\xi)d\xi + \varphi(0) - \alpha h_1(0)k_1(0,0) = \varphi(0) - \alpha h_1(0), \\ W_2'(0) = -\beta\int_0^0 k_2(0,\xi)\psi(\xi)d\xi + \psi(t) - \beta h_2(0)k_2(0,0) = \psi(0) - \beta h_2(0) \end{cases} \qquad (22)$$

Преобразуем формулу (21) и используем формулу (7):

$$W_1'(t) = -\alpha[\int_0^t k_1(t,\xi)\varphi(\xi)d\xi + h_1(0)k_1(t,0)] + \varphi(t) = -\alpha W_1(t) + \varphi(t),$$
$$W_2'(t) = -\beta[\int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi + h_2(0)k_2(t,0)] = -\beta W_2(t) + \psi(t)$$

то есть

$$\begin{cases} W_1'(t) = -\alpha W_1(t) + \varphi(t), \\ W_2'(t) = -\beta W_2(t) + \psi(t) \end{cases} \qquad (23)$$

Теперь формулу (23) поставим в левую часть формулы (8):

$a_1W_1'(t)+a_2W_2'(t)=a_1[-\alpha W_1(t)+\varphi(t)]+a_2[-\beta W_2(t)+\psi(t)]=$
$-c_1W_1(t)-c_2W_2(t)+\frac{a_1b_2f_1(t)-a_1a_2f_2(t)+a_2a_1f_2(t)-a_2b_1f_1(t)}{a_1b_2-a_2b_1}=f_1(t)-c_1W_1(t)-c_2W_2(t),$
$b_1W_1'(t)+b_2W_2'(t)=b_1[-\alpha W_1(t)+\varphi(t)]+b_2[-\beta W_2(t)+\psi(t)]=$
$-d_1W_1(t)-d_2W_2(t)+\frac{b_1b_2f_1(t)-b_1a_2f_2(t)+b_2a_1f_2(t)-b_2b_1f_1(t)}{a_1b_2-a_2b_1}=f_2(t)-d_1W_1(t)-d_2W_2(t)$

то есть

$$\begin{cases} a_1W_1'(t)+a_2W_2'(t)=f_1(t)-c_1W_1(t)-c_2W_2(t), \\ \\ b_1W_1'(t)+b_2W_2'(t)=f_2(t)-d_1W_1(t)-d_2W_2(t) \end{cases} \quad 0<\mathrm{t}<1; \tag{24}$$

Из формул $(24),(20)$ вытекает утверждение теоремы 2.

Преобразуем формулу (21):

$$\begin{cases} W_1'(t)+\alpha W_1(t)=\varphi(t), \\ W_2'(t)+\beta W_2(t)=\psi(t) \end{cases} \tag{25}$$

Теперь покажем, как используя теорему 2 можно получать новые граничные корректно разрешимые задачи для системы неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами на отрезке $[0,1]$.

Для этого достаточно, чтобы функции $h_1(t)$, $h_2(t)$ непрерывным образом зависали от функции $\varphi(t),\psi(t)$. То есть, пусть существует непрерывный оператор K, отображающий $\varphi(t),\psi(t)$ в $h_1(t)$, $h_2(t)$. Напомним $h_1(t)$, $h_2(t)$-гладкие функции. Итак, пусть $h_1=K\varphi(t)$, $h_2=K\psi(t)$. Тогда задача $(18),(19)$ примет вид

$$\begin{cases} a_1W_1'(t)+a_2W_2'(t)=f_1(t)-c_1W_1(t)-c_2W_2(t), \\ \\ b_1W_1'(t)+b_2W_2'(t)=f_2(t)-d_1W_1(t)-d_2W_2(t) \end{cases} \quad 0<\mathrm{t}<1; \tag{26}$$

$$\begin{cases} W_1(t)|_{t=0}-K(W_1'+\alpha W_1)(t)|_{t=0}=0, \\ W_2(t)|_{t=0}-K(W_2'+\beta W_2)(t)|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{27}$$

Условия (27), накладываемые на функции $W_1(t)$, $W_2(t)$, можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (26) при любой правой части имело единственное решение. Таким образом, задача $(26),(27)$ представляет корректную всюду разрешимую задачу с новыми внутренне краевыми условиями вида (27). Итак, справедлива.

Теорема 3 *Для любого непрерывного оператора K, отображающего пространство $\varphi,\psi\in L_2[0,1]$ во множестве гладких функций $h_1,h_2\in W_2^2[0,1]$ задачи $(26),(27)$ имеет единственное устойчивое решение при всех допустимых правых частях $\varphi(t),\psi(t)$.*

Теперь докажем обратное утверждение.

Теорема 4 *Если система уравнении (26) при всех правых частях $f_1(t)$, $f_2(t)$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение, то найдется непрерывный оператор K, отображающий пространство $\varphi,\psi\in L_2[0,1]$ во множестве гладких функции $h_1,h_2\in W_2^2[0,1]$, такое, что дополнительное условие примет вид (27).*

Доказателство Пусть уравнение (26) с некоторыми дополнительными условиями однозначно разрешимо для любой правой части $\varphi(t)$, $\psi(t)$. Соответствующее единственное решение обозначим через $W_1(t,\varphi)$, $W_2(t,\psi)$. Для удобства введем новую функцию $u_{01}(t,\varphi)=\int_0^t k_1(t,\xi)\cdot$ $\cdot\varphi(\xi)d\xi$, $u_{02}(t,\psi)=\int_0^t k_2(t,\xi)\psi(\xi)d\xi$. Рассмотрим разность $\upsilon_1(t)=W_1(t,\varphi)-u_{01}(t,\varphi)$, $\upsilon_2(t)=W_2(t,\psi)-u_{02}(t,\psi)$. Функции $\upsilon_1(t)$, $\upsilon_2(t)$ удовлетворяют условием $\upsilon_1'(t)+\alpha\upsilon_1(t)=0$, $\upsilon_2'(t)+\beta\upsilon_2(t)=0$ Таким образом, для любых φ, ψ единственным образом находим υ_1, υ_2, то есть

$\upsilon_1 = K\varphi(t)$, $\upsilon_2 = K\psi(t)$. С другой стороны, введем новые функции $\omega_1(t,\varphi) = u_{01}(t,\varphi) + \upsilon_1(0,\varphi)k_1(t,0)$, $\omega_2(t,\psi) = u_{02}(t,\psi) + \upsilon_2(0,\psi)k_2(t,0)$. Последняя формула аналогично формуле (7). В данном случае роль $h_1(t)$, $h_2(t)$ играет функции $\upsilon_1(t)$, $\upsilon_2(t)$. Следовательно, выше приведенные рассуждение из теоремы 3 показывают, что

$$\begin{cases} a_1\omega_1'(t) + a_2\omega_2'(t) = f_1(t) - c_1\omega_1(t) - c_2\omega_2(t), \\ b_1\omega_1'(t) + b_2\omega_2'(t) = f_2(t) - d_1\omega_1(t) - d_2\omega_2(t) \end{cases} \quad 0<t<1; \tag{28}$$

$$\begin{cases} \omega_1(t)|_{t=0} = \upsilon_1(t,\varphi)|_{t=0}, \\ \omega_2(t)|_{t=0} = \upsilon_2(t,\psi)|_{t=0} \end{cases} \tag{29}$$

где $\upsilon_1 = K\varphi(t)$, $\upsilon_2 = K\psi(t)$ или $\upsilon_1 = K(\omega_1' + \alpha\omega_1)(t)$, $\upsilon_2 = K(\omega_2' + \beta\omega_2)(t)$.

С другой стороны, ясно что $W_1(t,\varphi) = u_{01}(t,\varphi) + \upsilon_1(t)$, $W_2(t,\psi) = u_{02}(t,\psi) + \upsilon_2(t)$. Следовательно, имеем

$$\begin{cases} a_1W_1'(t) + a_2W_2'(t) = f_1(t) - c_1W_1(t) - c_2W_2(t), \\ b_1W_1'(t) + b_2W_2'(t) = f_2(t) - d_1W_1(t) - d_2W_2(t) \end{cases} \quad 0<t<1; \tag{30}$$

$$\begin{cases} W_1(t,\varphi)|_{t=0} = \upsilon(t,\varphi)|_{t=0}, \\ W_2(t,\psi)|_{t=0} = \upsilon(t,\psi)|_{t=0} \end{cases} \tag{31}$$

Сравнивая соотношения (29) и (30) видно, что $W_1(t,\varphi) = \omega_1(t,\varphi)$, $W_2(t,\psi) = \omega_2(t,\psi)$, то есть дополнительные условия для однозначной разрешимости имеют вид

$$W_1(t)|_{t=0} - K(W_1' + \alpha W_1)(t)|_{t=0} = 0,$$
$$W_2(t)|_{t=0} - K(W_2' + \beta W_2)(t)|_{t=0} = 0$$

Теорема 4 полностью доказана.

Список литературы

[1] *Степанов В.В.*, Курс дифференциальных уравнений. - М.: 1959. - С. 312 - 317.

[2] *Кальменов Т.Ш., Отелбаев М.О.*, О регулярных задачах для уравнения Лаврентьева - Бицадзе. // Диф. уравнения. 1981. т.17, №5. - С. 873 - 885.

[3] *Кальменов Т.Ш.*, О регулярных краевых задачах для волнового уравнения. // Диф. уравнения. 1981. т.17, №5. - С. 1105 - 1121.

[4] *Павлов Б.С.*, Теория расширений и явнорешаемые модели. // Успехи мат. наук, т.42, №6(258), 1987. - С. 99 - 131.

[5] *Kanguzhin B.E., Nurakhmetov D.B.*, Boundary Value Problems for 2nd Order Nonhomogeneous Differential Equations with Variable Coefficients. // Journal of Xinjiang University (Natural Science Edition), Vol. 28, №1, Feb. 2011. - P. 46 - 56.

[6] *Гантмахер Ф.Р.*, Теория матриц. - М.: Наука, 1988. - С. 70 - 86.