Корректная разрешимость неоднородных систем линейных алгебраических уравнений при правых частях из подпространств

А.К. Шаймерденова, А.М.Тлеулесова, Л.Н.Темирбекова
КазНУ имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан
e-mail: altinay86@mail.ru

Аннотация

В работе дано полное описание корректных краевых задач для линейных систем алгебраических уравнений. Решения этих задач найдены для общего случая. Для наглядности все результаты иллюстрируются на неоднородных системах алгебраических уравнений.

1 Введение При численном решений краевых задач для дифференциальных уравнений, мы на самом деле ищем решения алгебраических систем уравнений. Такую систему получаем, аппроксимируя дифференциальное уравнение и краевые условия. К примеру, для дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + q(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < b \tag{1}$$

с краевыми условиями

$$\begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(b) = 0 \end{array} \tag{2}$$

явное аналитическое решение найти невозможно. Удобно численным методом с заданной точностью найти приближенные решения в определенных точках. Задачу (1), (2), заменяя на разностное уравнение, получаем следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{array}{l} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} + q_i y_i = b_i, \ \ i = \overline{1, n-1} \\ y_0 = 0 \\ y_n = 0 \end{array} \tag{3}$$

где $q_i = h^2 q(x_i), b_i = h^2 f_i$, h-шаг аппроксимаций. Таким образом, мы получили матричную систему из n+1-го уравнений и n+1-ой неизвестных. Распишем систему (3) в матрично-векторной форме

$$\begin{pmatrix} 1 & -2+q_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & -2+q_2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2+q_3 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2+q_4 & 1 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2+q_5 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ ... \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ... \\ b_{n-2} \\ b_{n-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

И это только один из возможных случаев, если взять вместо дифференциального уравнения второго порядка уравнение более высокого порядка или взять другую его аппроксимацию и другие краевые условия мы приходим к матрично-векторной системе с матрицей другой структуры . Поэтому, можно рассмотреть сразу общий случай

$$\begin{array}{l} l(y) = f(x), \quad 0 < x < b \\ U_1(y) = g_1(f),\ U_2(y) = g_2(f) \end{array}$$

Соответственно, если введем обозначения, тогда в общем случае вместо системы (4) получим систему вида

$$\left[\begin{array}{c} A \\ \\ C \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \vec{Y} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} \vec{b} \\ \\ \vec{0} \end{array} \right] \tag{5}$$

где $\vec{Y} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & ... & c_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{n-m,1} & c_{n-m,2} & ... & c_{n-m,n} \end{pmatrix}$,

$\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$, $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$.

Отметим, что здесь и в дальнейшем $1 \leq m < n$, и что матрица A порождается дифференциальным уравнением, а матрица C вытекает из краевых условий. Допустим, что задача (5) однозначно разрешима при всех правых частях $\vec{b}$.

Постановка задачи: Существует ли другие, кроме условий задаваемых матрицей C, условия, чтобы матричное уравнение $A\vec{Y} = \vec{b}$ с этими дополнительными условиями имело единственное решение при всех $\vec{b}$? Выписать общий вид таких дополнительных условий.

Поставленная задача в случае дифференциальных уравнений хорошо известна [1].

2 Корректная разрешимость неоднородных систем линейных алгебраических уравнений при правых частях из подпространств

Теорема 1 *Решение задачи (5) задается формулой*

$$\vec{Y}_0 = L_0^{-1}\, \vec{b} \tag{6}$$

где через L_0^{-1} *- обозначим первых* m *столбцов матрицы* $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}$, *при* $\det \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \neq 0$.

Доказательство: (6) формула получена матричным методом и легко проверяется подставлением решения в систему.

Перепишем матричное уравнение (5) в виде системы матричных уравнений

$$\begin{cases} A\vec{Y} = \vec{b} \\ C\vec{Y} = \vec{0} \end{cases} \tag{7}$$

Согласно теореме 1 ее решение задается по формуле (6). Система (7) состоит из неоднородного уравнения $A\vec{Y} = \vec{b}$ и однородного уравнения $C\vec{Y} = \vec{0}$.

Теперь рассмотрим тот случай, когда второе уравнение также является неоднородным.

Теорема 2 *Для любых векторов* $\vec{p}$ *и* $\vec{b}$ *система*

$$\begin{cases} A\vec{Y} = \vec{b} \\ C\vec{Y} = \vec{p} \end{cases}$$

имеет единственное решение

$$\vec{Y} = L_0^{-1}\vec{b}_0 + L_0^{-1}\vec{p}_0$$

где $\vec{b}_0 = \begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix}$, $\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{p} \end{pmatrix}$.

Доказательство теоремы 2 осуществляется непосредственной проверкой.

Теперь покажем как из теоремы 2 получить ответ на поставленную задачу. Для этого достаточно предполагать, чтобы вектор $\vec{p}$ непрерывным образом зависит от $\vec{b}$, то есть $\vec{p} = F(\vec{b})$. Таким образом, можем сформулировать утверждение

Теорема 3 *Пусть F - любая непрерывная функция, отображающая векторное пространство $\mathbb{C}^m$ в векторное пространство $\mathbb{C}^{n-m}$. Система*

$$\begin{cases} A\vec{Y} = \vec{b} \\ C\vec{Y} - F\left(A\vec{Y}\right) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение при всех правых частях $\vec{b}$. Причем решение системы непрерывно зависит от $\vec{b}$ и для него верно представление

$$\vec{Y} = L_0^{-1}\begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix} + L_0^{-1}\begin{pmatrix} \vec{0} \\ F(\vec{b}) \end{pmatrix} \tag{8}$$

Таким образом, в теореме 3 указаны те дополнительные условия $C\vec{Y} - F\left(A\vec{Y}\right) = 0$ которые сохраняют единственность решения.

Существенным нетривиальным моментов данной работы является следующая теорема

Теорема 4 *Допустим уравнение $A\vec{Y} = \vec{b}$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное устойчивое решение при всех правых частях $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$. Тогда существует непрерывное отображение F из $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^{n-m}$ такое, что дополнительные условия эквивалентны следующим условиям*

$$C\vec{Y} - F\left(A\vec{Y}\right) = 0$$

Здесь эквивалентность систем уравнений понимается в том смысле, что решения одной системы являются решениями другой и обратно.

Доказательство: По условию теоремы 4 уравнение $A\vec{Y} = \vec{b}$ с некоторыми дополнительными условиями имеет единственное решение, которое обозначим через $\vec{Y}\left(\vec{b}\right)$. Введем разность

$$\vec{V} = \vec{Y}\left(\vec{b}\right) - \vec{Y}_0$$

Ясно, что вектор $\vec{V}$ удовлетворяет однородного уравнению

$$A\vec{V} = \vec{0} \tag{9}$$

Таким образом, каждому вектору $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$ соответствует единственный вектор $\vec{V}$, который является решением однородного уравнения (9). Следовательно, каждому вектору $\vec{b} \in \mathbb{C}^m$ соответствует единственный вектор $C\vec{V} \in \mathbb{C}^{n-m}$, который непрерывным образом зависит от вектора $\vec{b}$. Иначе говоря, существует непрерывное отображение F из $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^{n-m}$, определяемое по формуле

$$F\left(\vec{b}\right) = C\vec{V}\left(\vec{b}\right) \tag{10}$$

Введем вектор $\vec{W} = \vec{Y}_0 + L_0^{-1}\begin{pmatrix} \vec{0} \\ C\vec{V}\left(\vec{b}\right) \end{pmatrix}$. Сравнение с формулой (8) позволяет утверждать, что $\vec{W}$ решение системы

$$\begin{cases} A\vec{W} = \vec{b} \\ C\vec{W} = C\vec{V}\left(\vec{b}\right) \end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрим разность $\vec{W} - \vec{Y}(\vec{b})$. Тогда имеем соотношения

$$\begin{cases} A\left(\vec{W} - \vec{Y}\left(\vec{b}\right)\right) = \vec{0} \\ C\left(\vec{W} - \vec{Y}\left(\vec{b}\right)\right) = 0 \end{cases}$$

которая имеет единственное решение. Следовательно,$\vec{W} = \vec{Y}\left(\vec{b}\right)$, то есть $\vec{Y}\left(\vec{b}\right)$ удовлетворяет всем тем условиям, которым удовлетворяет $\vec{W}$. С другой стороны, $\vec{W}$ удовлетворяет системе (11). Поэтому система (11) удовлетворяет также $\vec{Y}\left(\vec{b}\right)$, то есть

$$\begin{cases} A\vec{Y}\left(\vec{b}\right) = \vec{b} \\ C\vec{Y}\left(\vec{b}\right) = F\left(\vec{b}\right) \end{cases}$$

Заметим, что здесь учтено равенство (10).

В теоремах 3 и 4 дополнительные условия могут быть нелинейными. В общем случае, отображение F может быть и нелинейным. Если требовать линейность от дополнительных условий, то отображение F также становится линейным. Следовательно, отображение F должно задаваться произвольной матрицей D из $\mathbb{C}^m$ в $\mathbb{C}^{n-m}$. Матрица D имеет размерность $(n-m)\times m$.

Теорема 5 *Определитель матрицы* $\begin{bmatrix} A \\ \\ C - DA \end{bmatrix}$ *не зависит от матрицы D, т.е.*

$$\det\begin{pmatrix} A \\ C - DA \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$$

Доказательство: Берем левую часть этого соотношения и с помощью элементарных преобразований получим правую часть:

$$\det\begin{pmatrix} A \\ C - DA \end{pmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \\ c_{11} - \sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_{1j}a_{j1} & c_{12} - \sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_{1j}a_{j2} & \dots & c_{1n} - \sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_{1j}a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-m,1} - \sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_{n-m,j}a_{j1} & c_{n-m,2} - \sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_{n-m,j}a_{j2} & \dots & c_{n-m,n} - \sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_{n-m,j}a_{jn} \end{bmatrix}$$

первую строку умножаем на α_{11}, вторую строку на α_{12}, третью строку на α_{13} ... m-ю строку на α_{1m} и складываем первые $m+1$ строк, результат пишем в $m+1$-ой строке. Потом первую строку умножим на α_{21}, вторую строку на α_{22}, третью строку на α_{23} ... m-ю строку на α_{2m} и сложив первые m строк с $m+2$-ой строкой и результат пишем в $m+2$-ой строке. Так продолжаем для всех строк и, наконец, первую строку умножим на $\alpha_{n-m,1}$, вторую строку на $\alpha_{n-m,2}$, третью строку на $\alpha_{n-m,3}$ ... m-ю строку на $\alpha_{n-m,m}$ и сложив первые m строк с последней строкой и результат пишем в n-ой строке. После этих элементарных преобразований определитель имеет такой вид

$$\det\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \\ c_{11} & c_{12} & ... & c_{1n} \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{n-m,1} & c_{n-m,2} & ... & c_{n-m,n} \end{bmatrix}$$

то есть, получился определитель $\det\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$. Теорема 5 полностью доказана.

Теорема 6 *Решение задачи*

$$\begin{bmatrix} A \\ \\ C-DA \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{b} \\ \\ \vec{0} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

задается формулой

$$\vec{Y}_D = \vec{Y}_0 + \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}\vec{b}$$

Доказательство: Если систему напишем в удобном виде для доказательства

$$\begin{cases} A\vec{Y} = \vec{b} \\ C\vec{Y} = D\vec{b} \end{cases}$$

преобразуем, то получаем решение системы (12)

$$\vec{Y} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \vec{b} \\ D\vec{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \vec{b} \\ \vec{0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \vec{0} \\ D\vec{b} \end{pmatrix} = \vec{Y}_0 + \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ D \end{pmatrix}\vec{b}$$

Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Гантмахер Ф.Р.*, Теория матриц. – М.: Физматлит. 2004. – 560 с.

[2] *Самарский А.А., Гулин А.В.*, Численные методы. – М.: Наука. 1989. – 432 с.