Оптимальное управление фазовыми системами

С.А. Айсагалиев, Ш.А. Айпанов
Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби
e-mail: Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz

Аннотация

Разработан конструктивный метод решения краевых задач оптимального управления для динамических систем с цилиндрическим фазовым простанством.

Постановка задачи. Рассматривается фазовая система, описываемая дифференциальными уравнениями вида

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma,t) + Du(t), \quad \dot{\sigma} = Cx + R\varphi(\sigma,t) + Ev(t), \\ &x(t_0) = x_0, \quad \sigma(t_0) = \sigma_0, \quad t \in I = [t_0, t_1], \end{aligned} \tag{1}$$

где A, B, D, C, R, E – постоянные матрицы порядков $(n\times n)$, $(n\times m)$, $(n\times r)$, $(m\times n)$, $(m\times m)$, $(m\times s)$ соответственно. Функция $\varphi(\sigma,t) = (\varphi_1(\sigma_1,t),\dots,\varphi_m(\sigma_m,t))$ является периодической по σ, т.е. $\varphi(\sigma,t) = \varphi(\sigma+\Delta,t)$, что означает $\varphi_i(\sigma_i,t) = \varphi_i(\sigma_i+\Delta_i,t)$, $i=\overline{1,m}$, где $\Delta_1,\dots,\Delta_m$ – периоды.

Ограничения на управления $u(t) = (u_1(t),\dots,u_r(t))$, $v(t) = (v_1(t),\dots,v_s(t))$ имеют вид

$$u(t) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I,R^r) \mid \alpha_i(t) \le u_i(t) \le \beta_i(t), \ \ i=\overline{1,r}, \ \ t\in I\}, \tag{2}$$

$$v(t) \in V = \{v(\cdot) \in L_2(I,R^s) \mid \gamma_i(t) \le v_i(t) \le \delta_i(t), \ \ i=\overline{1,s}, \ \ t\in I\}, \tag{3}$$

где $\alpha(t) = (\alpha_1(t),\dots,\alpha_r(t))$, $\beta(t) = (\beta_1(t),\dots,\beta_r(t))$, $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\dots,\gamma_s(t))$, $\delta(t) = (\delta_1(t),\dots,$ $\delta_s(t))$, $t\in I$ – заданные непрерывные функции.

Краевые условия для системы (1) имеют вид

$$(x(t_0) = x_0, \ x(t_1) = x_1) \in S_0 \times S_1 \subset R^{2n}, \tag{4}$$

$$(\sigma(t_0) = \sigma_0, \ \sigma(t_1) = \sigma_1) \in S_2 \times S_3 \subset R^{2m}, \tag{5}$$

где $x_0 \in S_0 \subset R^n$, $x_1 \in S_1 \subset R^n$, $\sigma_0 \in S_2 \subset R^m$, $\sigma_1 \in S_3 \subset R^m$; S_i, $i=\overline{0,3}$ – заданные множества.

Для системы (1) заданы фазовые ограничения вида

$$x(t) \in G_1(t) = \{x \in R^n \mid \omega(t) \le F(x(t),t) \le \lambda(t), \ \ t\in I\}, \tag{6}$$

$$(\sigma(t) \in G_2(t) = \{\sigma \in R^m \mid \varepsilon(t) \le P(\sigma(t),t) \le \zeta(t), \ \ t\in I\}, \tag{7}$$

где $F(x,t) = (F_1(x,t),\dots,F_{n1}(x,t))$, $P(\sigma,t) = (P_1(\sigma,t),\dots,P_{m1}(\sigma,t))$ – заданные функции, непрерывные по (x,t), (σ,t) соответственно.

Для системы (1) заданы также интегральные ограничения

$$g_j(x,\sigma,u,v) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),\sigma(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,t)\,dt \le c_j, \quad j=\overline{1,p}, \tag{8}$$

$$g_j(x,\sigma,u,v) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_{0j}(x(t),\sigma(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,t)\,dt = c_j, \quad j=\overline{p+1,l}, \tag{9}$$

где $f_{0j}(x, \sigma, u, v, x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1, t)$, $j = \overline{1, l}$ – заданные функции, непрерывные по совокупности аргументов; c_j, $j = \overline{1, l}$ – заданные числа.

Требуется минимизировать функционал

$$J(x, \sigma, u, v) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(x(t), \sigma(t), u(t), v(t), x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1, t)\, dt \to \inf \tag{10}$$

на множестве решений дифференциального уравнения (1) при ограничениях на управления (2), (3), краевых условиях (4), (5), фазовых ограничениях (6), (7) и интегральных ограничениях (8), (9). Здесь $F_0(x, \sigma, u, v, x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1, t)$ – заданная функция, непрерывная по совокупности аргументов.

Совокупность переменных $(u, v, x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1) \in \Xi = U \times V \times S_0 \times S_1 \times S_2 \times S_3$ называется допустимым управлением для задачи (1)-(9), если решение дифференциального уравнения (1), исходящее из точки $(x(t_0) = x_0,\ \sigma(t_0) = \sigma_0) \in S_0 \times S_2$ удовлетворяет условию $(x(t_1) = x_1,\ \sigma(t_1) = \sigma_1) \in S_1 \times S_3$, кроме того, справедливы включения $x(t; x_0, \sigma_0, u, v) \in G_1(t) \subset R^n$, $\sigma(t; x_0, \sigma_0, u, v) \in G_2(t) \subset R^m$ и вдоль решения системы (1) выполняются условия $g_j \le c_j$, $j = \overline{1, p}$; $g_j = c_j$, $j = \overline{p+1, l}$. Множество всех допустимых управлений обозначим через Σ, где $\Sigma \subset \Xi$.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия того, что множество Σ непусто.

Задача 2. Найти оптимальное управление $(u_*(t), v_*(t), x_0^*, x_1^*, \sigma_0^*, \sigma_1^*) \in \Sigma$, доставляющее минимум функционалу (10), и оптимальную траекторию $x_*(t) = x_*(t; x_0^*, \sigma_0^*, u_*,\ v_*)$, $\sigma_*(t) = \sigma_*(t; x_0^*, \sigma_0^*, u_*, v_*)$, $t \in I$, где $x_*(t) \in G_1(t)$, $\sigma_*(t) \in G_2(t)$, $g_j(x_*, \sigma_*, u_*, v_*) \le c_j$, $j = \overline{1, p}$; $g_j(x_*, \sigma_*, u_*, v_*) = c_j$, $j = \overline{p+1, l}$.

Выше сформулирована общая постановка задачи оптимального управления для фазовых систем. В частных случаях могут быть поставлены задачи оптимального управления с фиксированными концами траекторий, а также задачи, где отсутствуют фазовые или интегральные ограничения и др. Задачи управления движением маятниковых и роторных систем в механике, синхронных машин в электроэнергетике, навигационных систем в радиотехнике, вибрационного оборудования в технике сводятся к решению задач оптимального управления вида (1)-(10). В данной статье предлагается метод решения указанных задач на основе принципа погружения, изложенного в работах [1-5].

Преобразования. Вводя следующие векторы и матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} A & O_{nm} \\ C & O_{mm} \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} B \\ R \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} D \\ O_{mr} \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} O_{ns} \\ E \end{pmatrix},$$

уравнение (1), ограничения (2)-(9) запишем в виде

$$\dot{X} = A_1 X + B_1 \varphi(\sigma, t) + B_2 u(t) + B_3 v(t), \quad t \in I, \tag{11}$$

$$X_0 = X(t_0) = (x_0, \sigma_0) \in S_0 \times S_2, \quad X_1 = X(t_1) = (x_1, \sigma_1) \in S_1 \times S_3, \tag{12}$$

$$u(t) \in U, \quad v(t) \in V, \quad P_1 X = x, \quad P_2 X = \sigma, \tag{13}$$

$$P_1 X \in G_1(t), \quad P_2 X \in G_2(t), \quad t \in I, \tag{14}$$

$$g_j(X, u, v) \le c_j, \quad j = \overline{1, p}; \quad g_j(X, u, v) = c_j, \quad j = \overline{p+1, l}, \tag{15}$$

где $P_1 = (I_{nn},\ O_{nm})$, $P_2 = (O_{mn},\ I_{mm})$,

$$g_j(X,u,v) = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_{0j}(X(t),u(t),v(t),X_0,X_1,t)\,dt,\quad j=\overline{1,l}. \tag{16}$$

Функционал (10) запишется в виде

$$J(X,u,v) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(X(t),u(t),v(t),X_0,X_1,t)\,dt \to \inf. \tag{17}$$

Вводя обозначения $\eta_j(t) = \int\limits_{t_0}^{t} f_{0j}(X(\tau),u(\tau),v(\tau),X_0,X_1,\tau)\,d\tau,\quad j=\overline{1,l},\quad t\in I$, интегральные ограничения (15), (16) можно представить в виде

$$\dot\eta(t) = f_0(X(t),u(t),v(t),X_0,X_1,t),\quad t\in I, \tag{18}$$

$$\begin{array}{l}\eta(t_0)=0,\ \ \eta(t_1)=\bar c\in Q,\ \ Q=\{\bar c=(\bar c_1,\dots,\bar c_p,\bar c_{p+1},\dots,\bar c_l)\mid\\ \bar c_j=c_j-d_j,\ \ d_j\ge 0,\ \ j=\overline{1,p};\ \ \bar c_j=c_j,\ \ j=\overline{p+1,l}\},\end{array} \tag{19}$$

где $f_0=(f_{01},\dots,f_{0l})$, $\eta=(\eta_1,\dots,\eta_l)$.

Введем далее следующие векторы и матрицы

$$Y=\begin{pmatrix}X\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ \sigma\\ \eta\end{pmatrix},\ \ \bar A=\begin{pmatrix}A & O_{nm} & O_{nl}\\ C & O_{mm} & O_{ml}\\ O_{ln} & O_{lm} & O_{ll}\end{pmatrix},\bar B_1=\begin{pmatrix}B\\ R\\ O_{lm}\end{pmatrix},\ \ \bar B_2=\begin{pmatrix}D\\ O_{mr}\\ O_{lr}\end{pmatrix},\ \ \bar B_3=\begin{pmatrix}O_{ns}\\ E\\ O_{ls}\end{pmatrix},$$

$$\bar B_4=\begin{pmatrix}O_{nl}\\ O_{ml}\\ I_{ll}\end{pmatrix},\bar P_1=(I_{nn},\ O_{nm},\ O_{nl}),\ \ \bar P_2=(O_{mn},\ I_{mm},\ O_{ml}),\ \ \bar P_3=(O_{ln},\ O_{lm},\ I_{ll}).$$

С использованием этих обозначений оптимизационную задачу (11)-(19) можно записать в виде: минимизировать функционал

$$J(Y,u,v) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(\bar P_1Y(t),\bar P_2Y(t),u(t),v(t),\bar P_1Y_0,\bar P_2Y_0,\bar P_1Y_1,\bar P_2Y_1,t)\,dt \to \inf \tag{20}$$

при условиях

$$\begin{array}{l}\dot Y=\bar AY+\bar B_1\varphi(\bar P_2Y,t)+\bar B_2u(t)+\bar B_3v(t)+\\ +\bar B_4f_0(\bar P_1Y(t),\bar P_2Y(t),u(t),v(t),\bar P_1Y_0,\bar P_1Y_1,t),\ \ t\in I,\end{array} \tag{21}$$

с краевыми условиями

$$Y_0=Y(t_0)=\begin{pmatrix}x_0\\ \sigma_0\\ O_{l1}\end{pmatrix}\in S_0\times S_2\times O_{l1},\ \ Y_1=Y(t_1)=\begin{pmatrix}x_1\\ \sigma_1\\ \bar c\end{pmatrix}\in S_1\times S_3\times Q, \tag{22}$$

с фазовыми ограничениями

$$\bar P_1Y(t)\in G_1(t),\ \ \bar P_2Y(t)\in G_2(t),\ \ t\in I, \tag{23}$$

и с ограничениями на управления

$$u(t) \in U, \ \ v(t) \in V. \tag{24}$$

Таким образом, на первом этапе решения сформулированных выше задач уравнения движения приводятся к виду (21), где интегральные ограничения заменены соответствующими дифференциальными уравнениями с краевыми условиями.

Принцип погружения. На втором этапе решения задачи рассматривается линейная система управления следующего вида

$$\dot{y} = \bar{A}y + \bar{B}_1 w_1(t) + \bar{B}_2 w_2(t) + \bar{B}_3 w_3(t) + \bar{B}_4 w_4(t), \ \ t \in I \tag{25}$$

с краевыми условиями

$$y(t_0) = Y_0 \in S_0 \times S_2 \times O_{l1}, \ \ y(t_1) = Y_1 \in S_1 \times S_3 \times Q, \tag{26}$$

при управлениях

$$w_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \ \ w_2(\cdot) \in L_2(I, R^r), \ \ w_3(\cdot) \in L_2(I, R^s), \ \ w_4(\cdot) \in L_2(I, R^l). \tag{27}$$

Уравнение (25) получается на основе (22) путем замены $\varphi(\sigma, t)$, $u(t)$, $v(t)$, f_0 на $w_1(t)$, $w_2(t)$, $w_3(t)$, $w_4(t)$ соответственно.

Пусть $\bar{B} = (\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3, \bar{B}_4)$, $w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t), w_4(t)) \in L_2(I, R^{m+r+s+l})$. Тогда соотношения (25)-(27) можно записать в виде

$$\dot{y} = \bar{A}y + \bar{B}w(t), \ \ t \in I, \tag{28}$$

$$y(t_0) = Y_0, \ \ y(t_1) = Y_1, \tag{29}$$

$$w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l}). \tag{30}$$

Найдем множество W всех управлений $w(t)$, $t \in I$, каждый элемент которого переводит траекторию системы (28) из начальной точки Y_0 в момент времени t_0 в конечное состояние Y_1 в момент времени t_1.

Рассмотрим методы построения множества W, основанные на теории управляемости, приведенной в [1-5]. По исходным данным $\bar{A}$, $\bar{B}$, Y_0, Y_1 определим следующие векторы и матрицы

$$\begin{aligned}
&a = e^{\bar{A}(t_0 - t_1)} Y_1 - Y_0, \ \ C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} e^{\bar{A}(t_0 - t)} \bar{B} \bar{B}^* e^{-\bar{A}^*(t_0 - t)} dt, \\
&C(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} e^{\bar{A}(t_0 - \tau)} \bar{B} \bar{B}^* e^{-\bar{A}^*(t_0 - \tau)} d\tau, \ \ C(t, t_1) = C(t_0, t_1) - C(t_0, t), \\
&\Lambda_1(t, Y_0, Y_1) = \bar{B}^* e^{\bar{A}^*(t_0 - t)} C^{-1}(t_0, t_1) a, \ \ N_1(t) = -\bar{B}^* e^{\bar{A}^*(t_0 - t)} C^{-1}(t_0, t_1) e^{\bar{A}(t_0 - t_1)}, \\
&\Lambda_2(t, Y_0, Y_1) = e^{-\bar{A}(t_0 - t)} C(t, t_1) C^{-1}(t_0, t_1) Y_0 + e^{-\bar{A}(t_0 - t)} C(t_0, t) C^{-1}(t_0, t_1) e^{\bar{A}(t_0 - t_1)} Y_1, \\
&N_2(t) = e^{-\bar{A}(t_0 - t)} C(t_0, t) C^{-1}(t_0, t_1) e^{\bar{A}(t_0 - t_1)}, \ \ t \in I.
\end{aligned}$$

Теорема 1 . *Пусть матрица $C(t_0, t_1)$ положительно определена. Тогда управление $w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l})$ переводит траекторию системы (28) из начальной точки $Y_0 \in S_0 \times S_2 \times O_{l1}$ в конечное состояние $Y_1 \in S_1 \times S_3 \times Q$ тогда и только тогда, когда*

$$w(t) \in W = \{w(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l}) \mid w(t) = \mu(t) + \Lambda_1(t, Y_0, Y_1) + N_1(t) z(t_1, \mu), \ \ t \in I\}, \tag{31}$$

где $\mu(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l})$ *– произвольная функция,* $z(t) = z(t, \mu)$, $t \in I$ *является решением дифференциального уравнения*

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}\mu(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I. \tag{32}$$

Решение дифференциального уравнения (28), соответствующее управлению $w(t) \in W$ *(см. (31)), имеет вид*

$$y(t) = z(t) + \Lambda_2(t, Y_0, Y_1) + N_2(t)z(t_1, \mu), \quad t \in I. \tag{33}$$

Как следует из теоремы 1, компоненты управления $w(t) = (w_1(t), w_2(t), w_3(t), w_4(t)) \in W$ определяются по формулам

$$w_i(t) = \mu_i(t) + \bar{B}_i^* e^{\bar{A}^*(t_0 - t)} C^{-1}(t_0, t_1)a - \bar{B}_i^* e^{\bar{A}^*(t_0 - t)} C^{-1}(t_0, t_1) e^{\bar{A}(t_0 - t_1)} z(t_1, \mu), \tag{34}$$

где $i = \overline{1,4}$; $\mu_1(\cdot) \in L_2(I, R^m)$, $\mu_2(\cdot) \in L_2(I, R^r)$, $\mu_3(\cdot) \in L_2(I, R^s)$, $\mu_4(\cdot) \in L_2(I, R^l)$ – произвольные функции.

Функцию $y(t)$, $t \in I$, определяемую по формуле (33), представим в виде $y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t))$, где $y_1(t) = \bar{P}_1 y(t)$, $y_2(t) = \bar{P}_2 y(t)$, $y_3(t) = \bar{P}_3 y(t)$, $t \in I$. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал (см. (20)-(24))

$$\begin{aligned} &J(z, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, u, v, x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1, d) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} F_0(\bar{P}_1 y(t), \bar{P}_2 y(t), u(t), v(t), x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1, t)\, dt \to \inf \end{aligned} \tag{35}$$

при условиях

$$\begin{aligned} &J_1(z, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, u, v, x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1, d, p, q) = \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [|w_1(t) - \varphi(\bar{P}_2 y(t), t)|^2 + |w_2(t) - u(t)|^2 + |w_3(t) - v(t)|^2 + \\ &+ |w_4(t) - f_0(\bar{P}_1 y(t), \bar{P}_2 y(t), u(t), v(t), x_0, x_1, \sigma_0, \sigma_1, t)|^2 + \\ &+ |p(t) - F(\bar{P}_1 y(t), t)|^2 + |q(t) - P(\bar{P}_2 y(t), t)|^2]\, dt = 0, \end{aligned} \tag{36}$$

$$\dot{z}(t) = \bar{A}z + \bar{B}_1\mu_1(t) + \bar{B}_2\mu_2(t) + \bar{B}_3\mu_3(t) + \bar{B}_4\mu_4(t), \quad z(t_0) = 0, \quad t \in I, \tag{37}$$

$$\mu_1(\cdot) \in L_2(I, R^m), \quad \mu_2(\cdot) \in L_2(I, R^r), \quad \mu_3(\cdot) \in L_2(I, R^s), \quad \mu_4(\cdot) \in L_2(I, R^l), \tag{38}$$

$$p(t) \in V_1 = \{p(\cdot) \in L_2(I, R^{n_1} \mid \omega(t) \le p(t) \le \lambda(t), \quad t \in I\}, \tag{39}$$

$$q(t) \in V_2 = \{q(\cdot) \in L_2(I, R^{m_1} \mid \varepsilon(t) \le q(t) \le \zeta(t), \quad t \in I\}, \tag{40}$$

$$\begin{aligned} &u(t) \in U, \quad v(t) \in V, \quad x_0 \in S_0, \quad x_1 \in S_1, \\ &\sigma_0 \in S_2, \quad \sigma_1 \in S_3, \quad d \in \Gamma = \{d \in R^p \mid d \ge 0\}. \end{aligned} \tag{41}$$

Теорема 2 . *Пусть матрица* $C(t_0, t_1)$ *положительно определена. Тогда исходная задача оптимального управления (1)-(10) равносильна задаче (35)-(41).*

Заметим, что в отличие от краевой задачи оптимального управления с фазовыми и интегральными ограничениями (1)-(10), задача (35)-(41) является задачей оптимального управления со свободным правым концом траекторий без фазовых и интегральных ограничений. Переход от исходной задачи (1)-(10) к равносильной задаче (35)-(41) назовем принципом погружения. Для полученной оптимизационной задачи (35)-(41) могут быть применены известные численные методы решения экстремальных задач в функциональных пространствах.

Существование допустимых управлений. Рассмотрим решение задачи 1. Для существования допустимого управления необходимо доказать, что краевая задача (1)-(9) имеет хотя бы одно решение, т.е. множество Σ непусто. Для решения задачи 1 рассмотрим следующую оптимизационную задачу: минимизировать функционал

$$J_1(z,\mu,u,v,x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,d,p,q) = \\ =\int\limits_{t_0}^{t_1} F_1(z(t),\mu(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,d,p(t),q(t),t)\,dt \to \inf \tag{42}$$

при условиях (37)-(41), где

$$F_1 = |w_1-\varphi|^2 + |w_2-u|^2 + |w_3-v|^2 + |w_4-f_0|^2 + |p-F|^2 + |q-P|^2. \tag{43}$$

Решение оптимизационной задачи вида (42),(37)-(41) приведено в [6].

Теорема 3 . *Пусть матрица $C(t_0,t_1)$ положительно определена. Для существования допустимого управления для задачи (1)-(10) необходимо и достаточно, чтобы значение $J_1(\bar z_*,\ \bar\mu_*,\ \bar u_*,\ \bar v_*,\ \bar x_0^*, \bar x_1^*, \bar\sigma_0^*, \bar\sigma_1^*, \bar d_*, \bar p_*, \bar q_*) = J_{1*} = 0$, где $(\bar\mu_*, \bar u_*, \bar v_*, \bar x_0^*, \bar x_1^*, \bar\sigma_0^*, \bar\sigma_1^*, \bar d_*, \bar p_*, \bar q_*)$ – оптимальное управление в задаче (42), (37)-(41).*

Иными словами, если $J_{1*}=0$, то краевая задача (1)-(9) имеет решение, т.е. существует допустимое управление для задачи (1)-(10); если $J_{1*}>0$, то краевая задача (1)-(9) не имеет решения, в этом случае задача оптимального управления (1)-(10) также не будет иметь решения.

Сформулированная задача оптимального управления (42), (37)-(41) может быть решена с использованием известных численных методов, в частности, с помощью метода проекции градиента. Пусть $J_{1*}=0$, т.е. допустимое управление существует. Вычислим значение функционала качества $J(\bar z_*, \bar\mu_*, \bar u_*, \bar v_*, \bar x_0^*, \bar x_1^*, \bar\sigma_0^*, \bar\sigma_1^*, \bar d_*, \bar p_*, \bar q_*) = \gamma_0$.

Построение оптимального управления. Введем переменную

$$x_{n+1}(t) = \int\limits_{t_0}^{t} F_0(x(\tau),\sigma(\tau),u(\tau),v(\tau),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,\tau)\,d\tau, \quad t\in I.$$

Тогда

$$\dot x_{n+1}(t) = F_0(x(t),\sigma(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,t), \quad t\in I, \tag{44}$$

$$x_{n+1}(t_0)=0, \quad x_{n+1}(t_1)=\gamma, \tag{45}$$

где γ – некоторое число. Вводя следующие векторы и матрицы

$$\Sigma = \begin{pmatrix} x\\ \eta\\ x_{n+1}\end{pmatrix}, \quad A_0 = \begin{pmatrix}\bar A\\ O_{1,n+m+l}\end{pmatrix}, \quad B_{01} = \begin{pmatrix}\bar B_1\\ O_{1m}\end{pmatrix}, \quad B_{02} = \begin{pmatrix}\bar B_2\\ O_{1r}\end{pmatrix}, \\ B_{03} = \begin{pmatrix}\bar B_3\\ O_{1s}\end{pmatrix}, \quad B_{04} = \begin{pmatrix}\bar B_4\\ O_{1l}\end{pmatrix}, \quad B_{05} = \begin{pmatrix}\bar O_{n+m+l,1}\\ 1\end{pmatrix},$$

уравнения (21), (44) запишем в виде

$$\dot\Sigma(t) = A_0\Sigma(t) + B_{01}\varphi(P_{20}\Sigma,t) + B_{02}u(t) + B_{03}v(t) + \\ +B_{04}f_0(P_{10}\Sigma, P_{20}\Sigma, u(t), v(t), P_{10}\Sigma_0, P_{20}\Sigma_1, t) + \\ +B_{05}F_0(P_{10}\Sigma, P_{20}\Sigma, u(t), v(t), P_{10}\Sigma_0, P_{20}\Sigma_1, t), \quad t\in I, \tag{46}$$

где $P_{10} = (\bar{P}_1,\ 0)$, $P_{20} = (\bar{P}_2,\ 0)$. Краевые условия (22), (45) запишутся в виде

$$\Sigma_0 = \Sigma(t_0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \sigma_0 \\ O_{l1} \\ 0 \end{pmatrix} \in S_0 \times S_2 \times O_{l1} \times O_{11}, \Sigma_1 = \Sigma(t_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \sigma_1 \\ \bar{c} \\ \gamma \end{pmatrix} \in S_1 \times S_3 \times Q \times R^1. \quad (47)$$

Фазовые ограничения (23) будут иметь вид

$$P_{10}\Sigma(t) \in G_1(t), \ \ P_{20}\Sigma(t) \in G_2(t), \ \ t \in I, \quad (48)$$

ограничения на управления $u(t)$, $v(t)$ определяются включениями (24).

Линейная управляемая система, соответствующая (46), (47), имеет вид

$$\dot{\xi} = A_0\xi + B_{01}w_{01}(t) + B_{02}w_{02}(t) + B_{03}w_{03}(t) + B_{04}w_{04}(t) + B_{05}w_{05}(t), \quad (49)$$

с краевыми условиями

$$\xi(t_0) = \Sigma_0, \ \ \xi(t_1) = \Sigma_1, \quad (50)$$

с управлениями

$$\begin{array}{l} w_{01}(\cdot) \in L_2(I, R^m), \ \ w_{02}(\cdot) \in L_2(I, R^r), \ \ w_{03}(\cdot) \in L_2(I, R^s), \\ w_{04}(\cdot) \in L_2(I, R^l), \ \ w_{05}(\cdot) \in L_2(I, R^1). \end{array} \quad (51)$$

Введем матрицу $B_0 = (B_{01}, B_{02}, B_{03}, B_{04}, B_{05})$ и вектор состояния $w_0(t) = (w_{01},\ w_{02},\ w_{03},$ $w_{04},\ w_{05})$ и запишем (49)-(51) в виде

$$\dot{\xi} = A_0\xi + B_0 w_0(t), \ \ t \in I, \quad (52)$$

$$\xi(t_0) = \Sigma_0, \ \ \xi(t_1) = \Sigma_1, w_0(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l+1}). \quad (53)$$

Определим векторы и матрицы для (52),(53) следующим образом

$$\begin{array}{l} a_0 = e^{A_0(t_0-t_1)}\Sigma_1 - \Sigma_0, \ \ C_0(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} e^{A_0(t_0-t)} B_0 B_0^* e^{A_0^*(t_0-t)} dt, \\ \Lambda_{10}(t, \Sigma_0, \Sigma_1) = B_0^* e^{A_0^*(t_0-t)} C_0^{-1}(t_0, t_1) a_0, \\ N_{10}(t) = -B_0^* e^{A_0^*(t_0-t)} C_0^{-1}(t_0, t_1) e^{A_0(t_0-t_1)}, \\ \Lambda_{20}(t, \Sigma_0, \Sigma_1) = e^{-A_0(t_0-t)} C_0(t, t_1) C_0^{-1}(t_0, t_1)\Sigma_0 + \\ +e^{-A_0(t_0-t)} C_0(t_0, t) C_0^{-1}(t_0, t_1) e^{A_0(t_0-t_1)}\Sigma_1, \\ N_{20}(t) = e^{-A_0^*(t_0-t)} C_0(t_0, t) C_0^{-1}(t_0, t_1) e^{A_0(t_0-t_1)}, \ \ t \in I. \end{array}$$

Теорема 4 . *Пусть матрица $C_0(t_0, t_1)$ положительно определена. Тогда управление $w_0(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l+1})$ переводит траекторию системы (52) из начальной точки Σ_0 в конечное состояние Σ_1 тогда и только тогда, когда*

$$\begin{array}{l} w_0(t) \in W_0 = \{w_0(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l+1} \ | \\ w_0(t) = \mu_0(t) + \Lambda_{10}(t, \Sigma_0, \Sigma_1) + N_{10}(t) z_0(t_1, \mu_0), \ \ i \in I\}, \end{array} \quad (54)$$

где $\mu_0(\cdot) \in L_2(I, R^{m+r+s+l+1})$ – произвольная функция, $z_0(t) = z_0(t, \mu)$, $t \in I$ является решением дифференциального уравнения

$$\dot{z}_0 = A_0 z_0 + B_0\mu_0(t), \ \ z_0(t_0) = 0, \ \ t \in I. \quad (55)$$

Решение дифференциального уравнения (52), соответствующее управлению $w_0(t) \in W_0$, имеет вид

$$\xi(t) = z_0(t) + \Lambda_{20}(t, \Sigma_0, \Sigma_1) + N_{20}(t) z_0(t_1, \mu_0), \ \ t \in I. \quad (56)$$

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$\begin{aligned}&J_2(z_0,\mu_0,u,v,x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,d,p,q)=\\&=\int_{t_0}^{t_1}[|w_{01}(t)-\varphi(P_{20}\xi(t),t)|^2+|w_{02}(t)-u(t)|^2+|w_{03}(t)-v(t)|^2+\\&+|w_{04}(t)-f_0(P_{10}\xi(t),P_{20}\xi(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,t)|^2+\\&+w_{05}(t)-F_0(P_{10}\xi(t),P_{20}\xi(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,t)|^2+\\&+|p(t)-F(P_{10}\xi(t),t)|^2+|q(t)-P(P_{20}\xi(t),t)|^2dt\to\inf\end{aligned}\tag{57}$$

при условиях

$$\dot z_0(t)=A_0z_0+B_0\mu_0(t),\ \ z(t_0)=0,\ \ t\in I,\tag{58}$$

$$\begin{aligned}&\mu_0(t)=(\mu_{01}(t),\mu_{02}(t),\mu_{03}(t),\mu_{04}(t),\mu_{05}(t))\in\\&\in L_2(I,R^m)\times L_2(I,R^r)\times L_2(I,R^s)\times L_2(I,R^l)\times L_2(I,R^1),\end{aligned}\tag{59}$$

$$u(t)\in U,\ \ v(t)\in V,\ \ p(t)\in V_1,\ \ q(t)\in V_2,\tag{60}$$

$$x_0\in S_0,\ \ x_1\in S_1,\ \ \sigma_0\in S_2,\ \ \sigma_1\in S_3,\ \ d\in\Gamma,\tag{61}$$

где функция $\xi(t)$, $t\in I$ определяется по формуле (56); $w_0(t)=(w_{01}(t),\ w_{02}(t),\ w_{03}(t),\ w_{04}(t),\ w_{05}(t))\in L_2(I,R^m)\times L_2(I,R^r)\times L_2(I,R^s)\times L_2(I,R^l)\times L_2(I,R^1)$ вычисляется по формуле (54).

Установим связь между решениями оптимизационной задачи (42), (37)-(41) и решениями оптимизационной задачи (57)-61). Пусть матрица $C(t_0,t_1)>0$, $(\bar\mu_*(t),\ \bar u_*(t),\ \bar v_*(t),\ \bar x_0^*,\ \bar x_1^*,\ \bar\sigma_0^*,\ \bar\sigma_1^*,\ \bar d_*,\ \bar p_*(t),\ \bar q_*(t))$ – оптимальное управление для задачи (42),(37)-(41), соответствующее значению $J_{1*}=0$. Пусть $\bar w_*(t)=(\bar w_{1*}(t),\bar w_{2*}(t),\bar w_{3*}(t),\bar w_{4*}(t))=\bar\mu_*(t)+\Lambda_1(t,\bar x_0^*,\bar\sigma_0^*,\bar x_1^*,\bar\sigma_1^*,\bar c_*)+N_1(t)z(t_1,\bar\mu_*)$, $t\in I$.

Теорема 5 . *Пусть матрица $C_0(t_0,t_1)>0$ и выполнены равенства $w_{01}(t)=\bar w_{1*}(t)$, $w_{02}(t)=\bar w_{2*}(t)$, $w_{03}(t)=\bar w_{3*}(t)$, $w_{04}(t)=\bar w_{4*}(t)$, $t\in I$. Тогда, если*

$$w_{05}(t)=F_0(\bar x_*(t),\bar\sigma_*(t),\bar u_*(t),\bar v_*(t),\bar x_0^*,\bar x_1^*,\bar\sigma_0^*,\bar\sigma_1^*,t),\ \ t\in I,\tag{62}$$

то $w_0(t)=(\bar w_{1*}(t),\bar w_{2*}(t),\bar w_{3*}(t),\bar w_{4*}(t),\bar w_{05}(t))\in L_2(I,R^{m+r+s+l+1})$ – оптимальное управление для задачи (57)-(61), соответствующее значению $J_{2*}=0$, где $w_{05}(t)$, $t\in I$ определяется по формуле (62), причем $\int_{t_0}^{t_1}w_{05}(t)\,dt=\gamma_0$.

Обозначим через $F_2(z_0(t),z_0(t_1),\mu_0(t),u(t),v(t),x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,d,p(t),q(t),t)$, $t\in I$ подинтегральную функцию в функционале (57). Тогда $J_2(z_0,\theta)=\int_{t_0}^{t_1}F_2(z_0(t),z_0(t_1),\theta,t)\,dt$, где $\theta=(\mu_0,u,v,x_0,x_1,\sigma_0,\sigma_1,d,p,q)$ – управление.

Теорема 6 . *Пусть матрица $C_0(t_0,t_1)>0$, функция $F_2(z_0,\bar z_0,\theta,t)$, $\bar z_0=z_0(t_1)$ имеет непрерывные производные по совокупности аргументов $(z_0,\bar z_0,\theta,t)$ вместе с частными производными по переменным $(z_0,\bar z_0,\theta)$, удовлетворяющим условиям Липшица. Тогда функционал (57) при условиях (58) – (61) непрерывен и дифференцируем по Фреше в любой точке $\theta\in L_2(I,R^{m+r+s+l+1})\times U\times V\times S_0\times S_1\times S_2\times S_3\times\Gamma\times V_1\times V_2=X\subset H=L_2(I,R^{m+r+s+l+1})\times L_2(I,R^r)\times L_2(I,R^s)\times R^n\times R^n\times R^m\times R^m\times R^p\times L_2(I,R^{n_1})\times L_2(I,r^{m_1})$, причем его градиент $J_2'(\theta)=$*

$(J'_{21}(\theta),\, J'_{22}(\theta),\, J'_{23}(\theta),\, J'_{24}(\theta),\, J'_{25}(\theta),\, J'_{26}(\theta),\, J'_{27}(\theta),\, J'_{28}(\theta),\, J'_{29}(\theta),\, J'_{210}(\theta)) \in H$ *вычисляется по формулам*

$$
\begin{aligned}
&J'_{21}(\theta) = \frac{\partial F_2(z_0,\bar z_0,\theta,t)}{\partial \mu_0} - B_0^*\psi, \;\; J'_{22}(\theta) = \frac{\partial F_2(z_0,\bar z_0,\theta,t)}{\partial u},\\
&J'_{23}(\theta) = \frac{\partial F_2(z_0,\bar z_0,\theta,t)}{\partial v}, \;\; J'_{24}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(z_0,\bar z_0,\theta,t)}{\partial x_0}\,dt,\\
&J'_{25}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(z_0,\bar z_0,\theta,t)}{\partial x_1}\,dt, \;\; J'_{26}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(z_0,\bar z_0,\theta,t)}{\partial \sigma_0}\,dt,\\
&J'_{27}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(z_0,\bar z_0,\theta,t)}{\partial \sigma_1}\,dt, \;\; J'_{28}(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(z_0,\bar z_0,\theta,t)}{\partial d}\,dt,\\
&J'_{29}(\theta) = \frac{\partial F_2(z_0,\bar z_0,\theta,t)}{\partial p}, \;\; J'_{210}(\theta) = \frac{\partial F_2(z_0,\bar z_0,\theta,t)}{\partial q},
\end{aligned}
\tag{63}
$$

где $\psi(t),\, t \in I$ *– решение сопряженной системы*

$$
\dot\psi = \frac{\partial F_0(z_0,\bar z_0,\theta,t)}{\partial z_0} - A_0^*\psi, \;\; \psi(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_2(z_0,\bar z_0,\theta,t)}{\partial \bar z_0}. \tag{64}
$$

Кроме того, градиент функционала $J'_2(\theta)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$
\|J'_2(\theta_1) - J'_2(\theta_2)\| \le K\|\theta_1 - \theta_2\|, \;\; \forall \theta_1,\theta_2 \in X, \tag{65}
$$

где $K = const > 0$ *– постоянная Липшица.*

Доказательства аналогичных теорем приведены в [7]. На основе соотношений (63)-(65) строим последовательность $\{\theta_n\} \subset X$, где $\theta_n = (\mu_{0n},\, u_n,\, v_n,\, x_{0n},\, x_{1n},\, \sigma_{0n},\, \sigma_{1n},\, d_n,\, p_n,\, q_n) \in X$ по следующему алгоритму:

$$
\begin{aligned}
&\mu_{0,n+1} = \mu_{0n} - \alpha_n J'_{21}(\theta_n), \;\; u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J'_{22}(\theta_n)],\\
&v_{n+1} = P_V[v_n - \alpha_n J'_{23}(\theta_n)], \;\; x_{0,n+1} = P_{S_0}[x_{0n} - \alpha_n J'_{24}(\theta_n)],\\
&x_{1,n+1} = P_{S_1}[x_{1n} - \alpha_n J'_{25}(\theta_n)], \;\; \sigma_{0,n+1} = P_{S_2}[\sigma_{0n} - \alpha_n J'_{26}(\theta_n)],\\
&\sigma_{1,n+1} = P_{S_3}[\sigma_{1n} - \alpha_n J'_{27}(\theta_n)], \;\; d_{n+1} = P_\Gamma[d_n - \alpha_n J'_{28}(\theta_n)],\\
&p_{n+1} = P_{V_1}[p_n - \alpha_n J'_{29}(\theta_n)], \;\; q_{n+1} = P_{V_2}[q_n - \alpha_n J'_{210}(\theta_n)], \;\; n = 0,1,2,\ldots,
\end{aligned}
\tag{66}
$$

где $\alpha_n \le 2/(K + 2\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$ – постоянная Липшица из (65). В частности, при $\varepsilon = K/2 > 0$ значение $\alpha_n = 1/K > 0$.

Теорема 7 . *Пусть выполнены условия теоремы 6, множество* $\Lambda_0 = \{\theta \in X \mid J_2(\theta) \le J_2(\theta_0)\}$ *ограничено, функция* $F_2(z_0;\bar z_0,\theta,t)$ *выпукла по переменным* $(z_0,\bar z_0,\theta) \in R^{n+m+l+1} \times R^{n+m+l+1} \times R^{m+r+s+l+1}$. *Тогда*

1) множество Λ_0 *слабо бикомпактно;*

2) последовательность $\{\theta_n\} \subset X$*, определяемая по формуле (66), является минимизирующей, т.е.* $\lim_{n\to\infty} J_2(\theta_n) = \inf_{\theta\in X} J_2(\theta) = J_2(\theta_*)$, $\theta_* \in X_*$*;*

3) справедлива следующая оценка скорости сходимости $0 < J_2(\theta_n) - J_2(\theta_*) \le c_1/n$, $c_1 = const > 0$, $n = 1,2,\ldots$*;*

4) множество $X_* = \{\theta_* \in X \mid J_2(\theta_*) = \min_{\theta \in X} J_2(\theta)\} \neq \emptyset$*;*

5) последовательность $\{\theta_n\} \subset X$ *слабо сходится к точке* $\theta_* \in X_*$*, т.е.* $\theta_n \xrightarrow{сл} \theta_*$ *при* $n \to \infty$*;*

6) если $J_{2*} = 0$, $\theta_n \xrightarrow{сл} \theta_*$ *при* $n \to \infty$*, где* $\theta_* = (\bar{\bar{\mu}}_{0*}, \bar{\bar{u}}_*, \bar{\bar{v}}_*, \bar{\bar{x}}_{0*}, \bar{\bar{x}}_{1*}, \bar{\bar{\sigma}}_{0*}, \bar{\bar{\sigma}}_{1*}, \bar{\bar{d}}_*, \bar{\bar{p}}_*, \bar{\bar{q}}_*) \in X_*$*, то задача (1)-(10) имеет решение, причем* $J(\bar{\bar{x}}_*, \bar{\bar{\sigma}}_*, \bar{\bar{u}}_*, \bar{\bar{v}}_*) = \int_{t_0}^{t_1} F_0(\bar{\bar{x}}_*(t),\ \bar{\bar{\sigma}}_*(t),\ \bar{\bar{u}}_*(t),\ \bar{\bar{v}}_*(t),\ \bar{\bar{x}}_{0*}(t),\ \bar{\bar{x}}_{1*},\ \bar{\bar{\sigma}}_{0*},\ \bar{\bar{\sigma}}_{1*}, t)\, dt = \gamma_1$*, где* $\bar{\bar{x}}_*(t)$, $\bar{\bar{\sigma}}_*(t)$, $t \in I$ *– решение дифференциального уравнения (1).*

Доказательства аналогичных теорем можно найти в [7].

На основе изложенных выше результатов предлагается следующий алгоритм решения задач 1, 2.

Этап 1. С помощью принципа погружения исходная краевая задача оптимального управления (1)-(10) приводится к задаче оптимального управления (35)-(41).

Этап 2. Определяется допустимое управление путем решения оптимизационной задачи (42),(37)-(41). Вычисляется значение γ_0 функционала (10), соответствующее допустимому управлению. В общем случае γ_0 не является минимальным значением функционала (10).

Этап 3. Применяя принцип погружения, получим задачу оптимального управления вида (57)-(61).

Этап 4. Решаем задачу (57)-(61) при различных значениях $x_{n+1}(t_1)$ с помощью минимизирующей последовательности (66). Полагаем, что функционал (10) ограничен снизу, т.е. $J \geq \bar{m}$. Тогда минимальное значение функционала находится между $\bar{m}$ и γ_0.

Выберем значение $x_{n+1}(t_1) = (\bar{m} + \gamma_0)/2 = \gamma_1$, $\bar{m} \leq \gamma_1 \leq \gamma_0$. Если при таком выборе $J_{2*} = 0$, то задаем значение $x_{n+1}(t_1) = \gamma_2$, где $\gamma_2 = (\bar{m} + \gamma_1)/2$ и т.д. Если $J_{2*} > 0$, то выберем значение $x_{n+1}(t_1) = \gamma_3$, где $\gamma_3 = (\gamma_1 + \gamma_0)/2$ и т.д.

Список литературы

[1] *Айсагалиев С.А.* Управлемость некоторой системы диффереениальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1991. – Т. 27, № 9. – С. 1475-1486.

[2] *Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С.* Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, 1993. – Т. 29, № 4. – С. 555-567.

[3] *Айсагалиев С.А.* Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений // Доклады НАН РК, 1993. – № 2. – С. 3-8.

[4] *Айсагалиев С.А.* Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траекторий и ограниченным управлением // Дифференциальные уравнения, 1996. – Т. 32, № 8. – С. 1011-1017.

[5] *Айсагалиев С.А.* Управляемость и оптимальное управление в нелинейных системах // Известия РАН. Теория и системы управления, 1993. – № 3. – С. 96-106.

[6] *Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А., Иманкул Т.Ш.* Управляемость динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Вестник Национальной инженерной академии РК. – 2011. – № 1. – 9 с. (в печати).

[7] *Айсагалиев С.А.* Конструктивная теория краевых задач оптимального управления. – Алматы: Қазақ университетi, 2007. – 328 с.