Абсолютная устойчивость регулируемых систем с ограниченными ресурсами в простом критическом случае

С.А. Айсагалиев, Е.Б. Злобина, М.О. Кенжебаева
Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, Алматы
г.Алматы, ул.Масанчи, 39/47, e-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

Аннотация

Предлагается новый эффективный алгебраический критерий абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных регулируемых систем в простом критическом случае, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы.

Постановка задачи. Уравнение движения регулируемых систем в простом критическом случае имеет вид

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma),\ \dot{\eta} = \varphi(\sigma),\ \sigma = Dx + E\eta,\ x(0) = x_0,\ \eta(0) = \eta_0, t \in I = [0, \infty), \tag{1}$$

где A, B, D, E — постоянные матрицы порядков $n{\times}n$, $n{\times}1$, $1{\times}n$, $1{\times}1$, соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A){<}0$, $j{=}\overline{1,n}$, $\lambda_j(A)$ $j{=}\overline{1,n}$ – собственные значения матрицы A.

Функция

$$\varphi(\sigma){\in}\Phi_0{=}\{\varphi(\sigma){\in}C(R^1, R^1)/0 < \varphi(\sigma)\sigma{<}\mu_0\sigma^2, \sigma \neq 0, \forall\sigma, \sigma{\in}R^1, \varphi(0) = 0, \}. \tag{2}$$

Из (2) следует, что $0 < \dfrac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu_0$, $\forall\sigma, \sigma \in R^1$. Пусть $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое положительное число, такое, что

$$0 < \varepsilon \le \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu_0 + \varepsilon,\ \ \forall\sigma, \sigma \in R^1,$$

Представим функцию $\varphi(\sigma){\in}\Phi_0$ в виде суммы $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \overline{\varphi}(\sigma)$, $\sigma \in R^1$, $\overline{\varphi}(0) = 0$. Тогда $0 < \frac{\overline{\varphi}(\sigma)}{\sigma} < \mu_0$ Для систем с ограниченными ресурсами функция

$$\begin{gathered}\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1 = \{\overline{\varphi}(\sigma) \in C(R^1, R^1)/0 < \overline{\varphi}(\sigma)\sigma < \mu_0\sigma^2, \sigma \neq 0, \forall\sigma, \sigma \in R^1, \\ \overline{\varphi}(0) = 0, |\overline{\varphi}(\sigma)| \le \overline{\varphi}, 0 < \overline{\varphi} < \infty\}.\end{gathered} \tag{3}$$

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_*{+}B\varphi(\sigma_*){=}0$, $\sigma_*{=}Dx_*{+}E\eta_*$. Так как матрица A — гурвицева , функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ обращается в нуль только при $\sigma = 0$, то в случае, когда $E \neq 0$, система (1), (2) имеет единственное положение равновесия $(x_* = 0, \eta_* = 0)$, где $\sigma_* = 0$.

Положение равновесия $(x_* = 0, \eta_* = 0)$ системы (1), (2) называется абсолютно устойчивым, если матрицы A,

$$A_1(\mu) = \begin{pmatrix} A + B\mu D & B\mu E \\ \mu D & \mu E \end{pmatrix},\ \ 0 < \varepsilon \le \mu < \overline{\mu}_0,\ \ \mu_0 \le \overline{\mu}_0$$

— гурвицевы и для всех $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ решение дифференциального уравнения (1) обладает свойством $\lim\limits_{t\to\infty} x(t; 0, x_0, \eta_0, \varphi) = 0$, $\lim\limits_{t\to\infty} \eta(t; 0, x_0, \eta_0, \varphi) = 0$ $\forall x_0$, η_0, $|x_0| < \infty$, $|\eta_0| < \infty$.

Критерием абсолютной устойчивости для системы (1), (2) называют алгебраические соотношения, связывающие матрицы (A, B, D, E, μ_0), при выполнении которых положение равновесия $(x_* = 0, \eta_* = 0)$ абсолютно устойчиво.

Ставится задача: Найти новый эффективный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия ($x_* = 0, \eta_* = 0$) системы (1), (2), (3), который выделяет в пространстве конструктивных параметров системы область шире, чем известные критерии.

Исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем в простом критическом случае посвящены много работ. Среди них следует отметить монографии [1-4]. В работах [5, 6] предложены алгебраические критерии абсолютной устойчивости на основе частотного критерия. Эти критерии могут быть применены и к исследованию системы с ограниченными ресурсами. Однако их проверка чрезвычайно сложна. Поэтому разработка новых эффективных методов исследования абсолютной устойчивости является актуальной.

В работах [7-12] приведены результаты исследования абсолютной устойчивости регулируемых систем на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Данная работа является продолжением этих исследований и в ней использованы дополнительное сведение, которое позволяет получит более эффективный критерий.

Неособое преобразование. Одним из основных требований, предъявляемых критерию абсолютной устойчивости, является простота его проверки. Для этого необходимо неособое преобразование исходной системы (1).

Характеристический полином матрицы A имеет вид

$$\Delta(\lambda) = |\lambda I_n - A| = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \ldots + a_1\lambda + a_0,$$

где I_n — единичная матрица порядка $n \times n$, a_i, $i = \overline{0,n}$ — известные числа. Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли $\Delta(A) = 0$. Тогда

$$A^n = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_1A - a_0I_n.$$

Лемма 1 . *Пусть вектор-строка $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n)$ такой, что*

$$\theta B = 0,\ \theta AB = 0, \theta A^2B = 0, \ldots, \theta A^{n-2}B = 0, \theta A^{n-1}B \neq 0. \tag{4}$$

Тогда первое уравнение из (1) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \ldots, \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ &\dot{y}_n = -a_0y_1 - a_1y_2 - \ldots - a_{n-1}y_n + \theta A^{n-1}B\varphi(\sigma), \end{aligned} \tag{5}$$

где $y_1 = \theta x$, $y_2 = \theta Ax$, $\ldots$, $y_n{=}\theta A^{n-1}x$, $x = x(t)$, $y_i = y_i(t)$, $i{=}\overline{1,n}$.

Доказательство. Умножая слева на θ систему $\dot{x}{=}Ax{+}B\varphi(\sigma)$, имеем $\theta\dot{x} = \theta Ax{+}\theta B\varphi(\sigma){=}$ $= \theta Ax$, в силу того, что $\theta B = 0$. Отсюда с учетом того, что $y_1 = \theta x$, $y_2 = \theta Ax$, получим $\dot{y}_1 = y_2$. Из $\theta\dot{x} = \theta Ax$ следует $\theta\ddot{x} = \theta A\dot{x} = \theta A^2x + \theta AB\varphi(\sigma) = \theta A^2x$, где $\theta AB = 0$. Следовательно, $\dot{y}_2 = y_3$, где $y_3 = \theta A^2x$ и так далее. В результате имеем $\dot{y}_{n-1} = y_n$, где $y_{n-1}{=}\theta A^{n-2}x$, $\theta A^{n-2}B{=}0$, $y_n{=}\theta A^{n-1}x$. Тогда $\dot{y}_n{=}\theta A^{n-1}\dot{x}{=}\theta A^{n-1}(Ax{+}B\varphi){=}\theta A^nx{+}\theta A^{n-1}B\varphi$, где $\theta A^nx = \theta(-a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2}- \ldots -a_1A - a_0I_n)x{=}-a_0y_1{-}a_1y_2{-} \ldots {-}a_{n-1}y_n$, $\theta A^{n-1}B{\neq}0$. Лемма доказана.

Лемма 2 . *Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$R = \|\theta^*, A^*\theta^*, \ldots, A^{*n-1}\theta^*\| \tag{6}$$

порядка $n \times n$ равен n, где $(*)$ — знак транспонирования. Тогда:

1) существует вектор-строка $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ такой, что

$$\sigma = \beta_0y_1 + \beta_1y_2 + \ldots + \beta_{n-1}y_n + E\eta; \tag{7}$$

2)существует вектор-строка $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ *такой, что*

$$\dot{\sigma} = \alpha_0 y_1 + \alpha_1 y_2 + \ldots + \alpha_{n-1} y_n + R\varphi(\sigma), \tag{8}$$

где $C = DA, R = DB + E$;

3) если $y_1 = \theta x = 0$, $y_2 = \theta A x = 0, \dots, y_n = \theta A^{n-1} x = 0$, *то* $x = 0$.

Свойства решений. Для оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (1) - (3), а также системы (5), (7) необходимо исследования свойства решения указанных систем.

Теорема 1 . *Пусть выполнены условия лемм 1,2, и пусть, кроме того, матрицы* A,

$$A_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} A + B\varepsilon D & B\varepsilon E \\ \varepsilon D & \varepsilon E \end{pmatrix}$$

— гурвицевы, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ *и функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$.

Тогда верны оценки

$$|x(t)| \le l_1,\ |\dot{x}(t)| \le l_2,\ |\eta(t)| \le l_3,\ |\dot{\eta}(t)| \le l_4, t \in I, \tag{9}$$

$$|\sigma(t)| \le c_0,\ |\dot{\sigma}(t)| \le c_1\ \ \forall t, t \in I, \tag{10}$$

$$|y_i(t)| \le m_{i1},\ \ |\dot{y}_i(t)| \le m_{i2},\ \ i = \overline{1,n},\ t \in I, \tag{11}$$

где $l_i = const > 0$, $i = \overline{1,4}$, $c_i = const > 0$, $i = 0,1$, $m_{i1} = const > 0$, $m_{i2} = const > 0$, $i = \overline{1,n}$. *Кроме того, функции* $x(t)$, $y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $\sigma(t)$, $t \in I$ *— равномерно непрерывны.*

Теорема 2 . *Пусть выполнены условия лемм 1,2. Тогда вдоль решения системы* (5), (7) *верны тождества*

$$\varphi(\sigma(t)) = \kappa^{-1}[\omega(t) + a_0 y_1(t) + a_1 y_2(t) + \ldots + a_{n-1} y_n(t)], t \in I, \tag{12}$$

$$\sigma(t) = \beta_0 y_1(t) + \beta_1 y_2(t) + \ldots + \beta_{n-1} y_n(t) + E\eta(t), t \in I, \tag{13}$$

$$\dot{\sigma}(t) = \delta_0 \omega(t) + \delta_1 y_1(t) + \ldots + \delta_n y_n(t), t \in I, \tag{14}$$

где $\omega(t) = \dot{y}_n(t)$, $t \in I, \kappa = \theta A^{n-1} B$.

Несобственные интегралы. На основе тождеств (12)-(14) и включения (2) могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (5), (7), (8).

Теорема 3 . *Пусть выполнены условия лемм 1,2, матрицы* A, $A_1(\varepsilon)$ *гурвицевы, функция* $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. *Тогда для любой величины* $\tau_1 > 0$ *вдоль решения системы (5), (7),* (2) *несобственный интеграл*

$$\begin{gathered} I_1 = \lim_{T\to\infty} \int_0^T [\varphi(\sigma(t))\tau_1 \sigma(t) - \varphi(\sigma(t))\tau_1 \mu_0^{-1} \varphi(\sigma(t))]dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T [N_0 \omega^2(t) + \\ + N_1 y_1^2(t) + \ldots + N_n y_n^(t)]dt + \lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{d}{dt} F_1(t)\right] dt + \lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{d}{dt} S_1(t)\right] dt \ge 0, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{d}{dt} F_1(t)\right] dt\right| < \infty,\ \ \left|\lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{d}{dt} S_1(t)\right] dt\right| < \infty, \tag{16}$$

где $S_1(t) = \dfrac{1}{2} E\tau_1 \eta^2(t), F_1(t) = y^*(t) P_0 y(t), t \in I, y = (y_1, \dots, y_n)$, $\omega(t) = \dot{y}_n(t)$, $y_i = y_i(t)$, $t \in I$, $i = \overline{1,n}, P_0$ *— постоянная матрица порядка* $n \times n$.

Теорема 4 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда для любых величин* γ_0, γ_1, $\dots$, γ_n *вдоль решения системы* (5), (7), (2) *несобственный интеграл*

$$I_2 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [\gamma_0\omega(t) + \gamma_1 y_1(t) + \ldots + \gamma_n y_n(t)]^2 dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [\Gamma_0\omega^2(t) + \Gamma_1 y_1^2(t) + \ldots + \Gamma_n y_n^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right] dt \geq 0, \tag{17}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right] dt\right| < \infty, \tag{18}$$

где $F_2(t) = y^*(t)P_1 y(t), t \in I, P_1$ *— постоянная матрица порядка* $n \times n$.

Теорема 5 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда для любой величины* τ_2 *вдоль решения системы* (2), (5), (7) *несобственный интеграл*

$$I_3 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \varphi(\sigma(t))\tau_2\dot{\sigma}(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [M_0\omega^2(t) + M_1 y_1^2(t) + \ldots + M_n y_n^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right] dt = -\int\limits_0^{\sigma(0)} \varphi(\sigma)\tau_2 d\sigma + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^{\sigma(T)} \varphi(\sigma)\tau_2 d\sigma < \infty, \tag{19}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right] dt\right| < \infty, \tag{20}$$

где $F_3(t) = y^*(t)P_2 y(t), t \in I, P_2$ *— постоянная матрица порядка* $n \times n$.

Теорема 6 . *Пусть выполнены условия лемм 1,2, и пусть, кроме того, существует непрерывная по* σ *функция* $\psi(\sigma)$, $\sigma \in R^1$ *такая, что функция* $\sigma(t)$, $t \in I$ *является решением уравнения*

$$\dot{\sigma}(t) + W\varphi(\sigma) + \Sigma\psi(\sigma) = 0,$$

где W, Σ *— некоторые числа. Тогда вдоль решения системы* (2), (5), (7) *несобственный интеграл*

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \tau_3\psi(\sigma(t))\dot{\sigma}(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [L_0\omega^2(t) + L_1 y_1^2(t) + \ldots + L_n y_n^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right] dt = \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} \tau_3\psi(\sigma)d\sigma < \infty, \tag{21}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right] dt\right| = |\lim_{T\to\infty} F_4(T) - F_4(0)| < \infty. \tag{22}$$

Теорема 7 *Пусть выполнены условия леммы 1, 2. Тогда для любых величин h_0, h_1 вдоль решения системы (2), (5), (7) несобственный интеграл.*

$$I_5 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \tau_4\left[h_0\dot{\sigma}(t) + h_1\varphi(\sigma(t))\right]^2 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \Big[H_0\omega^2(t) + H_1y_1^2 + \ldots$$
$$\ldots + H_ny_n^2(t)\Big]dt + + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_5(t)\right]dt \geq 0, \tag{23}$$

$$|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_5(t)\right]dt| < \infty, \tag{24}$$

где функция $F_5(t) = y^*(t)P_4y(t), t \in I$, P_4 — постоянная матрица порядка $n \times n$.

Абсолютная устойчивость. На основе оценок (15), (16), (17), (18), (19) – (24) могут быть сформулированы критерий абсолютной устойчивости исходной системы (1) – (3).

Теорема 8 . *Пусть выполнены следующие условия:*

1) матрицы A, $A_1(\mu)$, $0 < \varepsilon \leq \mu \leq \bar{\mu}_0$, $\mu_0 \leq \bar{\mu}_0$ — гурвицевы, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \bar{\varphi}(\sigma)$, $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$;

2) существует вектор $\theta^* \in R^n$ такой, что $\theta B = 0$, $\theta AB = 0, \ldots, \theta A^{n-2}B = 0$, $\kappa = \theta A^{n-1}B \neq 0$;

3) ранг матрицы $R = \|\theta^*, A^*\theta^*, \ldots, A^{*n-1}\theta^*\|$ равен n;

4) выполнены равенства $N_i + \Gamma_i = M_i, i = \overline{0,n}, E \neq 0$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2), (3) абсолютно устойчиво.

Теорема 9 . *Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 8, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$N_i + \Gamma_i = L_i, i = \overline{0,n}. \tag{25}$$

Тогда положение равновесия системы (1) – (3) абсолютно устойчиво.

Теорема 10 .*Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 8, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$N_i + \Gamma_i = M_i + L_i, i = \overline{0,n}. \tag{26}$$

Тогда положение равновесия системы (1) – (3) абсолютно устойчиво.

Теорема 11 . *Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 8, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$H_i + \Gamma_i = M_i + L_i, i = \overline{0,n}. \tag{27}$$

функция $\varphi(\sigma)$ – равномерно непрерывна по σ. Тогда

$$\lim_{T\to\infty}\left[h_0\dot{\sigma}(t) + h_1\varphi(\sigma(t))\right] = 0. \tag{28}$$

Если, кроме того, решение системы

$$h_0\dot{z} + h_1\varphi(z) = 0 \tag{29}$$

абсолютной устойчиво, то положение равновесия системы (1) – (3) абсолютно устойчиво.

Теорема 12 *.Пусть выполнены условия 1) – 3) теоремы 8, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$N_i + \Gamma_i + H_i = M_i + L_i, i = \overline{0, n}. \tag{30}$$

Тогда:

1) положение равновесия системы (1) – (3) абсолютно устойчиво;

2) если, кроме того, функция $\varphi(\sigma)$ – равномерно непрерывна, то

$$\lim_{T\to\infty} [h_0\dot{\sigma}(t) + h_1\varphi(\sigma(t))] = 0. \tag{31}$$

Пример. Уравнения движения системы имеет вид

$$\begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 + \varphi(\sigma), \\ \dot{\eta} = \varphi(\sigma), \\ \sigma = -3x_1 + x_2 - 1,5\eta, t \in I = [0, \infty) \end{array} \tag{32}$$

где функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \bar{\varphi}(\sigma)$, $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$, $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число.

Для данного примера матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, D = (-3, 1), E = -1,5 \neq 0, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\Delta(\lambda) = det(\lambda I_2 - A) = \lambda^2 + \lambda + 1$, $\theta = (\theta_1, \theta_2)$, $\theta B = \theta_2 = 0$, $\theta AB = \kappa = -\theta_1 \neq 0$, где $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, то $\theta = (1, 0)\theta_1$, матрица A – гурвицева. Пусть $\theta_1 = 1$. Тогда $\kappa = -1$. Уравнения движения (5) запишется в виде

$$\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = -y_1 + y_2 - \varphi(\sigma).$$

Векторы $\theta = (1, 0)$, $\theta A = (1; -1)$, матрица $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, ранг $R = 2$.

Легко убедиться в том, что

$$\sigma(t) = -2y_1 - y_2 - 1,5\eta, \dot{\sigma}(t) = -2y_2 - \omega - 1,5\varphi(\sigma), \omega = \dot{y}_2.$$

Тогда

$$\begin{array}{l} \varphi(\sigma(t)) = -y_1(t) - y_2(t) - \omega(t), t \in I, \\ \sigma(t) = -2y_1(t) - y_2(t) - 1,5\eta(t), t \in I, \\ \dot{\sigma}(t) = -1,5y_1(t) - 0,5y_2(t) + 0,5\omega, t \in I. \end{array} \tag{33}$$

Матрица

$$A_1(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 - 3\mu & -2 + \mu & -1,5\mu \\ -3\mu & \mu & -1,5\mu \end{pmatrix}, 0 < \varepsilon \leq \mu < \bar{\mu}_0,\ \mu_0 \leq \bar{\mu}_0.$$

Характеристический полином матрицы $A_1(\mu)$ равен $\Delta_1(\lambda) = det(\lambda I_3 + A_1) = \lambda^3 + (0,5\mu + $ $+1)\Delta^2 + (1 - 0,5\mu)\lambda + 1,5\mu$. Для гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$ необходимо и достаточно, $0 <$ $\varepsilon \leq \mu \leq \bar{\mu}_0$, где $\bar{\mu}_0 = -3 + \sqrt{13} = 0,60551275464$.

I. Проверим условия теоремы 8. Выше были приведены проверка условия 1)-2) теоремы 8. Для проверки условия 4) теоремы 8, необходимы вычисления несобственных интегралов

I_1, I_2, I_3.

а) вычислим значение несобственного интеграла I_1. Значение

$$\begin{aligned} I_1 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\varphi(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \varphi(\sigma(t))\tau_1\mu_0^{-1}\varphi(\sigma(t))\right] dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \Big[N_0\omega^2(t)+ \\ +N_1 y_1^2(t) + N_2 y_2^2(t)\Big] + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\tfrac{d}{dt}F_1(t)\right] dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\tfrac{d}{dt}S_1(t)\right] dt, \end{aligned} \tag{34}$$

где

$N_0 = -\tau_1\mu_0^{-1},\ N_1 = 2\tau_1 - \tau_1\mu_0^{-1},\ N_2 = -\tau_1 + \tau_1\mu_0^{-1}$,
$F_1(t) = \left(\frac{3}{2} - \tau_1\mu_0^{-1}\right) y_1^2(t) + \left(\frac{1}{2} - \tau_1\mu_0^{-1}\right) y_2^2(t) + \left(2 - 2\tau_1\mu_0^{-1}\right) y_1(t)y_2(t), t \in I$,
$S_1(t) = -0,75\eta^2(t), t \in I$.

б) Значение

$$\begin{aligned} I_2 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\gamma_0\omega + \gamma_1 y_1 + \gamma_2 y_2\right]^2 dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \Big[\Gamma_0\omega^2(t)+ \\ +\Gamma_1 y_1^2(t) + \Gamma_2 y_2^2\Big] dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\tfrac{d}{dt}F_2(t)\right] dt, \end{aligned} \tag{35}$$

где

$\Gamma_0 = \gamma_0^2, \Gamma_1 = \gamma_1^2, \Gamma_2 = \gamma_2^2 - 2\gamma_0\gamma_1,\ F_2(t) = \gamma_1\gamma_2 y_1^2(t) + 2\gamma_0\gamma_1 y_1(t)y_2(t) + \gamma_0\gamma_1 y_2^2(t),\ t \in I$.

в) Значение

$$\begin{aligned} I_3 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \varphi(\sigma(t))\tau_2\dot{\sigma}(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \Big[M_0\omega^2(t)+ \\ +M_1 y_1^2(t) + M_2 y_2^2\Big] dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\tfrac{d}{dt}F_3(t)\right] dt, \end{aligned} \tag{36}$$

где

$M_0 = -0,5\tau_2, M_1 = -1,5\tau_2, M_1 = 2,5\tau_2$,
$F_3(t) = -\frac{1}{2}\tau_2 y_1^2(t) - 2\tau_2 y_1(t)y_2(t), t \in I$.

Несобственные интегралы (34)-(36) вычислены на основе тождества (33). Теперь равенства $N_i + \Gamma_i = M_i,\ i = 0, 1, 2$ запишутся так:

$$N_0 + \Gamma_0 = M_0 : \ \ -\tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_0^2 = -0,5\tau_2 \tag{37}$$

$$N_1 + \Gamma_1 = M_1 : \ \ 2\tau_1 - \tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_1^2 = -1,5\tau_2 \tag{38}$$

$$N_2 + \Gamma_2 = M_2 : \ \ -\tau_1 + \tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_2^2 - 2\gamma_0\gamma_1 = 2,5\tau_2 \tag{39}$$

Из (37)-(39), получим

$$\mu_0 = \frac{2\gamma_0^2 - 4\gamma_1^2 - 2\gamma_2^2 + 4\gamma_0\gamma_1}{7\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 - 4\gamma_0\gamma_1},\ \ \tau_1 = \frac{\gamma_0^2 - 2\gamma_1^2 - \gamma_2^2 + 2\gamma_0\gamma_1}{3},\ \ \tau_2 = 2\tau_1\mu_0^{-1} - 2\gamma_0^2.$$

Рассмотрим два случая: $a)\tau_2 > 0$; $b)\tau_2 < 0$. В случае $\tau_2 > 0$ имеем следующее решение: $\gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0,\ \tau_1 = \frac{\gamma_0^2}{3},\ \tau_2 = \frac{\gamma_0^2}{3}$, значение $\mu_0 = \frac{2}{7}$. Такое значение $\mu_0 = \frac{2}{7}$ можно получить применением частотного критерия.

В случае $\tau_2 < 0$, решением является: $\gamma_0 = 1,5\gamma_1$, $\gamma_2 = 0$, $\tau_1 = \frac{3,25}{3}\gamma_1^2$, $\tau_2 = -\frac{2,75}{3}\gamma_1^2$, значение $\mu_0 = \frac{3,25}{5,375} = 0,604651162790697 < \bar{\mu}_0 = 0,60551275464$.

II. Проверим условия теоремы 10. Выше были приведены проверка условия 1)-3) теоремы 8. Так как $\psi(\sigma) = -\Sigma^{-1}[\dot{\sigma} + W\varphi(\sigma)] = \alpha\dot{\sigma} + \gamma\varphi(\sigma)$, где $\alpha = -\Sigma^{-1}$, $\gamma = -\Sigma^{-1}W$. Тогда в силу тождества (33) имеем

$$\psi(\sigma(t)) = (0,5\alpha - \gamma)\omega(t) + (1,5\alpha - \gamma)y_1(t) + (-0,5\alpha - \gamma)y_2(t), t \in I.$$

Произведение

$$\psi(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t) = L_0\omega^2(t) + L_1y_1^2(t) + L_2y_2^2(t) + \frac{d}{dt}F_4(t), t \in I,$$

где $L_0 = 0,25\bar{\alpha} - 0,5\bar{\gamma}$, $L_1 = 2,25\bar{\alpha} - 1,5\bar{\gamma}$, $L_2 = -1,25\bar{\alpha} + 2,5\bar{\gamma}$, $\bar{\alpha} = \alpha\tau_3$, $\bar{\gamma} = \tau_3\gamma$, $F_4(t) = -\frac{1}{4}(1,5\bar{\alpha} - \bar{\gamma})y_1^2(t) + \frac{1}{4}(-0,5\bar{\alpha} - \bar{\gamma})y_2^2(t) + (1,5\bar{\alpha} - 2\bar{\gamma})y_1(t)y_2(t), t \in I$.

Равенства $N_i + \Gamma_i = M_i + L_i, i = 0,1,2$ запишутся так:

$$-\tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_0^2 = -0,5\tau_2 + 0,25\bar{\alpha} - 0,5\bar{\gamma}, \tag{40}$$

$$2\tau_1 - \tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_1^2 = -1,5\tau_2 + 2,25\bar{\alpha} - 1,5\bar{\gamma}, \tag{41}$$

$$-\tau_1 + \tau_1\mu_0^{-1} + \gamma_2^2 - 2\gamma_0\gamma_1 = 2,5\tau_2 - 1,25\bar{\alpha} + 2,5\bar{\gamma}. \tag{42}$$

Из (40)-(42) имеем

$$\mu_0 = \frac{2\gamma_0^2 - 4\gamma_1^2 - 2\gamma_2^2 + 4\gamma_0\gamma_1 + 6\bar{\alpha}}{7\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 - 4\gamma_0\gamma_1 - 1,5\bar{\alpha}}, \tag{43}$$

$$\tau_1 = \frac{\gamma_0^2 - 2\gamma_1^2 - \gamma_2^2 + 2\gamma_0\gamma_1 + 3\bar{\alpha}}{3}, \tag{44}$$

$$\tau_1 = \frac{\gamma_0^2 + \gamma_1^2 + 2\gamma_2^2 - 4\gamma_0\gamma_1 - 3\bar{\gamma}}{3}, \tag{45}$$

Из (43), (45) при $\gamma_0 = 1,5\gamma_1$, $\gamma_2 = 0$, $\tau_2 = 0$, получим предельные значения $\mu_0 = = 0,605551275463989$, $\bar{\alpha} = 0,001400659140695\gamma_1^2$, $\bar{\gamma} = -\frac{11}{12}\gamma_1^2$, $\tau_1 = 1,084733992474028\gamma_1^2$.

Заметим, что предельное значение $\mu_0 = \bar{\mu}_0$. Следовательно, теорема 10 дает необходимые и достаточные условия абсолютной устойчивости системы (32), $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$

Заключение. Реальные системы автоматического управления имеют ограниченные ресурсы. Для систем с одним интегрирующим звеном уравнения движения имеет вид (1), где нелинейный коэффициент усиления исполнительного привода удовлетворяет условию $0 < \varepsilon \leq \frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} < \mu_0 + \varepsilon$, $\forall\sigma$, $\sigma \in R^1$, где $\varepsilon > 0$ — сколь угодно малое число. Существование такого числа $\varepsilon > 0$ является необходимым условием в простом критическом случае. Включение $\bar{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$ соответствует тому, что обобщенные силы приводящие в движение объекта управления ограничены. Поэтому постановка задачи адекватно описывает реальные процессы в системах автоматического управления.

В статье предлагается метод отличный от известных методов исследования абсолютной устойчивости. На основе априорной оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Неособым преобразованием исходная система приводится к специальному виду, что позволяет представить подынтегральную функцию в виде суммы двух слагаемых, где первое слагаемое является квадратичной формой приведенной к диагональному виду, а второе слагаемое ограничено.

Такое представление подынтегральной функции, в конечном счете, приводит к легко проверяемых критериев абсолютной устойчивости. Как показано на примере, в частности, предлагаемый метод дает известные результаты. В общем случае, в пространстве конструктивных параметров системы выделяет области шире, нежели известные методы.

Список литературы

[1] *Лурье А.Н.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования.// -М.:-Л.: Гостехиздат, 1951, 216 с.

[2] *Айзерман М.А., Гантмахер Ф.Р.* Абсолютная устойчивость регулируемых систем.// - М.: Изд-во АН СССР, 1963, 270 с.

[3] *Якубович В.А.* Решение некоторых матричных неравенств, встречающихся в теории автоматического регулирования.// - ДАН СССР, 1962, т.143, №6, с.131-136.

[4] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия.
- М.: Наука, 1978, 400 с.

[5] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах. – Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1969, №5, с.38-48.

[6] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости системы управления снесколькими нелинейными элементами. – АН СССР, Автоматика и телемеханика, 1970, №12, с.83-94.

[7] *Айсагалиев С.А.* К теории абсолютной устойчивость релгулируемых систем. // – Дифференциальные уравнения, Минск-Москва, 1994, т.30, №5, с.748-757.

[8] *Айсагалиев С.А.* К теории управляемости регулируемых и фазовых систем. АН СССР, Автоматика и телемеханика, 1987, №5, с.3-10.

[9] *Айсагалиев С.А.* Обобщенные теоремы об абсолютной устойчивости регулируемых систем. – Доклады НАН РК, 1992, №2, с.4-9.

[10] *Айсагалиев С.А., Злобина Е.Б.* Общая теория об абсолютной устойчивости регулируемых систем. – Вестник НАН РК, 1999, №3, с.5-10.

[11] *Айсагалиев С.А.* Теория регулируемых систем. - Алматы: Қазақ университетi, 2000. -234 с.

[12] *Айсагалиев С.А., Букша В.А.* Расширение фазового пространства в теории абослютной устойчивости. – Вестник КазНУ, сер. математика, механика и информатика, 2006, №3(50). - с.8499.