Абсолютная устойчивость регулируемых систем с ограниченными ресурсами в критическом случае

С.А. Айсагалиев, Д.Г. Шаназаров
Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, Алматы
г.Алматы, ул.Масанчи, 39/47, e-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

Аннотация

Разработан новый эффективный алгебраический критерий абсолютной устойчивости положения равновесия нелинейных систем автоматического управления с ограниченными ресурсами в критическом случае, путем оценки несобственных интегралов вдоль решения системы.

Введение. Исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем в основном и критических случаях посвящены много работ. Среди них следует отметить монографии [1-4]. Существуют два подхода к исследованию абсолютной устойчивости регулиреумых систем: метод А.И. Лурье [2], метод В.М. Попова [3]. Связь между этими методами установлена в работах В.А. Якубовича и его учеников [4]. Разрешающие уравнения А.И. Лурье были получены на основе второго метода Ляпунова путем выбора функции Ляпунова в виде "квадратичная форма плюс интеграл от нелинейностей". В конечном счете, метод А.И. Лурье сводится к разрешимости матричных неравенств. Естественно, для решения прикладных задач такой подход довольно сложен.

Частотный критерий абсолютной устоичивости В.М. Попова является необходимым и достаточным условием разрешимости матричных неравенств А.И. Лурье, более того, для одномерных систем частотный критерий допускает геометрическую интерпретацию, что позволяет легко проверить разрешимость матричных неравенств при фиксированных значениях конструктивных параметров системы. Однако, для многомерных систем частотный критерий не имеет геометрическую интерпретацию, как в случае одномерных, и его проверка в этих случаях является достаточно сложной задачей. Сложность проверки частотных критериев, необходимость выделения области абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы привели к созданию алгебраических критериев абсолютной устойчивости путем сведения частотных критериев к проверке положительности полиномов на положительной полуоси [5, 6].

Заметим, что частотный критерий был получен на основе априорных оценок несобственного интеграла. В данной работе также используются априорные оценки несобственных интегралов, однако конечный результат сформулирован в виде $(n+1)$ равенств не зависящих от параметров изменяющихся в пределах от 0 до ∞.

В работах [7-10] приведены результаты исследования абсолютной устойчивости регулируемых систем на основе оценок несобственных интегралов вдоль решения системы. Данная работа является продолжением этих исследований.

Постановка задачи. Уравнение движения нелинейных систем автоматического управления в критическом случае имеет вид

$$\begin{aligned} &\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma),\ \frac{d\xi}{dt} = \eta,\ \frac{d\eta}{dt} = \varphi(\sigma),\ \sigma = Dx + E\eta + F\xi, \\ &x(0) = x_0,\ \xi(0) = \xi_0,\ \eta(0) = \eta_0, t \in I = [0, \infty), \end{aligned} \tag{1}$$

где A, B, D, E, F – постоянные матрицы порядков $n{\times}n$, $n{\times}1$, $1{\times}n$, $1{\times}1$, $1{\times}1$, соответственно, матрица A – гурвицева, т.е. $Re\lambda_j(A){<}0$, $j{=}\overline{1,n}$, $\lambda_j(A)$ – собственные значения матрицы A.

Функция

$$\begin{gathered}\varphi(\sigma)\in\Phi_0=\{\varphi(\sigma)\in C(R^1,R^1)/\varphi(\sigma)=\varepsilon\sigma+\overline{\varphi}(\sigma),0\leq\overline{\varphi}(\sigma)\sigma\leq\mu_0\sigma^2,\\ \overline{\varphi}(0)=0,|\overline{\varphi}(\sigma)|\leq\overline{\varphi}_*,0<\overline{\varphi}_*<\infty,\forall\sigma,\sigma\in R^1\}.\end{gathered}\tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число.

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений

$$Ax_*+B\varphi(\sigma_*)=0,\eta_*=0,\varphi(\sigma_*)=0,\sigma_*=Dx_*+E\eta_*+F\xi_*.$$

Так как матрица A – гурвицева, $\varphi(\sigma_*)=0$ только при $\sigma_*=0$, то система (1), (2) имеет единственное положение равновесия $(x_*=0,\xi_*=0,\eta_*=0)$, при $F\neq 0$.

Положение равновесия $(x_*=0,\xi_*=0,\eta_*=0)$ системы (1), (2) называется абсолютно устойчивым, если матрицы A,

$$A_1(\mu)=\begin{pmatrix}A+B\mu D & B\mu F & B\mu E\\ 0 & 0 & 1\\ \mu D & \mu F & \mu E\end{pmatrix},\;\; 0<\varepsilon\leq\mu<\overline{\mu}_0,\;\; \mu_0\leq\overline{\mu}_0$$

— гурвицевы (асимптотическая устойчивость в малом) и для всех $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$ решение дифференциального уравнения (1) обладает свойством $\lim\limits_{t\to\infty}x(t;0,x_0,\xi_0,\eta_0,\varphi)=x_*=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t;0,x_0,$ $\eta_0,\xi_0,\varphi)=\xi_*=0$, $\lim\limits_{t\to\infty}\eta(t;0,x_0,\eta_0,\xi_0,\varphi)=\eta_*=0$, для любых x_0, ξ_0, η_0, $|x_0|<\infty$, $|\xi_0|<\infty$, $|\eta_0|<\infty$.

Критерием абсолютной устойчивости для системы (1), (2) называют алгебраические соотношения, связывающие матрицы (A,B,D,E,F,μ_0), при выполнении которых положение равновесия $(x_*=0,\xi_*=0,\eta_*=0)$ абсолютно устойчиво.

Ставится задача: Найти новый эффективный критерий абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2), на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы.

Неособое преобразование. Одним из основных требований, предъявляемых к критерию абсолютной устойчивости, является простота его проверки. Одним из путей достижения указанной цели необходимость неособого преобразования исходной системы (1).

Как следует из включения (2) уравнение движения (1) может быть представлено в виде

$$\dot z=A_1z+B_1\overline{\varphi}(\sigma),\sigma=Sz,z(0)=z_0,t\in I=[0,\infty)\tag{3}$$

где

$$z=\begin{pmatrix}x\\ \xi\\ \eta\end{pmatrix},A_1=A_1(\varepsilon)=\begin{pmatrix}A+B\varepsilon D & B\varepsilon F & B\varepsilon E\\ 0 & 0 & 1\\ \varepsilon D & \varepsilon F & \varepsilon E\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}B\\ 0\\ 1\end{pmatrix},S=\begin{pmatrix}D,F,E\end{pmatrix},$$

$\varepsilon>0$ – сколь угодно малое число, функция

$$\begin{gathered}\overline{\varphi}(\sigma)\in\Phi_1=\{\overline{\varphi}(\sigma)\in C(R^1,R^1)/,0\leq\overline{\varphi}(\sigma)\sigma\leq\mu_0\sigma^2,\overline{\varphi}(0)=0,\\ |\overline{\varphi}(\sigma)|\leq\overline{\varphi}_*,0<\overline{\varphi}_*<\infty,\forall\sigma,\sigma\in R^1\},\end{gathered}\tag{4}$$

матрица $A_1=A_1(\varepsilon)$ порядка $(n+2)\times(n+2)$ – гурвицева.

Характеристический полином матрицы A_1 имеет вид

$$\Delta(\lambda)=|\lambda I_{n+2}-A_1|=\lambda^{n+2}+a_{n+1}\lambda^{n+1}+a_n\lambda^n+\ldots+a_1\lambda+a_0,$$

где I_{n+2} — единичная матрица порядка $(n+2)\times(n+2$. Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли матрица $\Delta(A_1)=0$. Тогда

$$A_1^{n+2}=-a_{n+1}A_1^{n+1}-a_nA_1^n-\ldots-a_1A_1-a_0I_{n+2}.$$

где $a_i=a_i(\varepsilon),i=\overline{0,n+1}$.

Лемма 1 . *Пусть вектор-строка* $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1}, \theta_{n+2}) \in R^{n+2}$ *такой, что*

$$\theta B_1 = 0,\ \theta A_1 B_1 = 0, \ldots, \theta A_1^n B_1 = 0, \theta A_1^{n+1} B_1 \neq 0. \tag{5}$$

Тогда уравнение (3) может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \ldots, \dot{y}_{n+1} = y_{n+2}, \\ &\dot{y}_{n+2} = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - a_{n+1} y_{n+2} + \theta A_1^{n+1} B_1 \overline{\varphi}(\sigma), \end{aligned} \tag{6}$$

где $y_1 = \theta z$, $y_2 = \theta A_1 z$, $\ldots$, $y_{n+2} = \theta A_1^{n+1} z$, $z = z(t)$, $y_i = y_i(t)$, $i = \overline{1, n+2}$.

Лемма 2 . *Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$R = \|\theta^*, A_1^* \theta^*, \ldots, A_1^{*n+1} \theta^*\| \tag{7}$$

порядка $(n+2) \times (n+2)$ *равен* $(n+2)$, *где* $(*)$ — *знак транспонирования. Тогда:*

1) существует вектор-строка $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n+1}) \in R^{n+2}$ *такой, что*

$$\sigma = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + \ldots + \beta_n y_{n+1} + \beta_{n+1} y_{n+2}; \tag{8}$$

2) если $y_1 = \theta z = 0$, $y_2 = \theta A_1 z = 0, \ldots,$ $y_{n+2} = \theta A_1^{n+1} z = 0$, *то* $z = 0$.

Свойства решений. Можно показать, что решение системы (1), (2), а также системы (6), (8), (4) ограничены. Эти свойства решений могут быть использованы при оценке несобственных интегралов.

Теорема 1 . *Пусть матрицы* A, $A_1(\varepsilon)$ *– гурвицевы, т.е.* $Re\lambda_j(A_1) < 0$, $j = \overline{1, n+2}$, *функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$, *и пусть, кроме того, выполнены равенства (5) и ранг* $R = n+2$. *Тогда верны оценки*

$$|z(t)| \leq c_0, \ \ |\dot{z}(t)| \leq c_1, \ \ t \in I = [0, \infty), \ \ c_0, c_1 = const < \infty, \tag{9}$$

$$|y_i(t)| \leq m_{i1}, \ \ |\dot{y}_i(t)| \leq m_{i2}, \ \ i = \overline{1, n+2},\ t \in I, \tag{10}$$

$$|\sigma(t)| \leq c_2,\ |\dot{\sigma}(t)| \leq c_3 \ \ \forall t, t \in I, \tag{11}$$

где $m_{i1} = const < \infty, m_{i2} = const < \infty$, $c_i = const < \infty$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Кроме того, функции $z(t)$, $y_i(t)$, $i = \overline{1, n+2}$, $\sigma(t)$, $t \in I$ — *равномерно непрерывны.*

Теорема 2 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, величина* $\kappa = \theta A_1^{n+1} B_1 \neq 0$. *Тогда вдоль решения системы (6), (8), (4) верны тождества:*

$$\overline{\varphi}(\sigma(t)) = \kappa^{-1} \omega(t) + \kappa^{-1} a_0 y_1(t) + \ldots + \kappa^{-1} a_{n+1} y_{n+2}(t),\ t \in I, \tag{12}$$

$$\sigma(t) = \beta_0 y_1(t) + \beta_1 y_2(t) + \ldots + \beta_n y_{n+1}(t) + \beta_{n+1} y_{n+2}(t),\ t \in I, \tag{13}$$

$$\dot{\sigma}(t) = \beta_0 y_2(t) + \beta_1 y_3(t) + \ldots + \beta_n y_{n+2}(t) + \beta_{n+1} \omega(t),\ t \in I, \tag{14}$$

где $\omega = \omega(t) = \dot{y}_{n+2}(t)$, $t \in I$.

Несобственные интегралы. На основе тождеств (12)-(14) и включения (4) могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (6), (8), (4). Заметим, что при выполнении условия лемм 1, 2 система (1), (2) равносильна (6), (8), (4).

Теорема 3 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрицы* $A, A_1(\varepsilon)$ *– гурвицевы, функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любой величины* $\tau_1 > 0$ *вдоль решения системы (6), (8), (4) несобственный интеграл*

$$\begin{gathered}
I_1 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [\overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_1\sigma(t) - \overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_1\mu_0^{-1}\overline{\varphi}(\sigma(t))]dt = \\
= \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [N_0\omega^2(t) + N_1 y_1^2(t) + \ldots + N_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt \geq 0,
\end{gathered} \tag{15}$$

$$|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt| < \infty, \tag{16}$$

где $F_1(t) = y^*(t)P_0 y(t), \omega(t) = \dot{y}_{n+2}, y(t) = (y_1(t), \ldots, y_{n+2}(t)), P_0$ *– постоянная матрица порядка* $(n+2)\times(n+2)$.

Теорема 4 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрицы* $A, A_1(\varepsilon)$ *– гурвицевы, функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любых величин* $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+2}$ *вдоль решения системы (6), (8), (4) несобственный интеграл*

$$\begin{gathered}
I_2 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [\gamma_0\omega(t) + \gamma_1 y_1(t) + \ldots + \gamma_{n+2}y_{n+2}(t)]^2 dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [\Gamma_0\omega^2(t) + \\
+\Gamma_1 y_1^2(t) + \ldots + \Gamma_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt = 0
\end{gathered} \tag{17}$$

$$|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt| < \infty. \tag{18}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Теорема 5 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрицы* $A, A_1(\varepsilon)$ *– гурвицевы, функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любой величины* τ_2 *вдоль решения системы (6), (8), (4) несобственный интеграл*

$$\begin{gathered}
I_3 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_2\dot{\sigma}(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [M_0\omega^2(t) + M_1 y_1^2(t) + \ldots + M_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt + \\
+\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt = -\int\limits_0^{\sigma(0)} \overline{\varphi}(\sigma)\tau_2 d\sigma + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^{\sigma(T)} \overline{\varphi}(\sigma)\tau_2 d\sigma < \infty.
\end{gathered} \tag{19}$$

$$|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt| < \infty. \tag{20}$$

Теорема 6 . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2, матрицы* $A, A_1(\varepsilon)$ *– гурвицевы, функция* $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1$. *Тогда для любого числа* τ_3 *вдоль решения системы (6), (8), (4) несобственный интеграл*

$$I_4 = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \dot\sigma(t)\tau_3\dot\sigma(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T [P_0\omega^2(t) + P_1 y_1^2(t) + \ldots + P_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt+$$
$$+\lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt = \lim_{T\to\infty} \int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} \tau_3\dot\sigma d\sigma \le \lim_{T\to\infty} \int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} |\tau_3\dot\sigma| d\sigma < \infty, \tag{21}$$

$$|\lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt| < \infty. \tag{22}$$

Уравнения движения (6), (8) могут быть представлены в векторной форме

$$\dot y = Cy + K\overline{\varphi}(\sigma), \sigma = Qy, y(0) = y_0, t \in I = [0, \infty), \tag{23}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n+1} \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \theta A_1^{n+1}B_1 \end{pmatrix}, Q^* = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Представляет интерес частный случай, когда вектор $Q^*{\in}R^{n+2}$ является собственным вектором матрицы C^* соответствующий собственному значению λ_*. В этом случае $C^*Q^*{=}\lambda_*Q^*$, производная $\dot\sigma{=}Q\dot y{=}Q[Cy{+}K\overline{\varphi}(\sigma)]{=}QCy{+}QK\overline{\varphi}(\sigma){=}\lambda Qy{+}QK\overline{\varphi}(\sigma){=}\lambda\sigma{+}\ {+}QK\overline{\varphi}(\sigma)$. Следовательно, верно тождество $\dot\sigma(t){-}\lambda\sigma(t){-}QK\overline{\varphi}(\sigma(t)){\equiv}0,\ t \in I$. Обозначим $W = -\lambda_*, \Sigma = -QK$. Тогда $\dot\sigma(t) + W\sigma(t) + \Sigma\overline{\varphi}(\sigma(t)) \equiv 0, \forall t, t \in I$. Отсюда следует, что для любого числа τ_3 произведение $[\dot\sigma(t) + W\sigma(t) + \Sigma\overline{\varphi}(\sigma(t))]\tau_3\dot\sigma(t) \equiv 0$, $\forall t, t \in I$. Тогда несобственный интеграл

$$I_4 = \lim_{T\to\infty} \int_0^T \dot\sigma(t)\tau_3\dot\sigma(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T [P_0\omega^2(t) + P_1 y_1^2(t) + \ldots + P_{n+2}y_{n+2}^2(t)]dt+$$
$$+\lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt {=} \lim_{T\to\infty} \int_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} [-W\sigma(t) - \Sigma\overline{\varphi}(\sigma(t))]d\sigma{<}\infty,\ |\lim_{T\to\infty} \int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt|{<}\infty.$$

Абсолютная устойчивость. На основе оценок (15), (16), (17) - (21), (22) могут быть сформулированы критерий абсолютной устойчивости положения равновесия системы (1), (2).

Теорема 7 . *Пусть выполнены следующие условия:*
1) матрицы A, $A_1(\mu)$, $0 < \varepsilon \le \mu \le \overline{\mu}_0$, $\mu_0{\le}\overline{\mu}_0$ *— гурвицевы, функция* $\varphi(\sigma){\in}\Phi_0$, $\varphi(\sigma){=}\varepsilon\sigma{+}\overline{\varphi}(\sigma)$, $\overline{\varphi}(\sigma) \in \Phi_1, \varepsilon > 0$ *– сколь угодно малое число;*
2) существует вектор $\theta^* \in R^{n+2}$ *такой,что* $\theta B_1 = 0$, $\theta A_1 B_1 = 0$, $\ldots$, $\theta A_1^n B_1 = 0$, $\kappa = \theta A_1^{n+1}B_1 \neq 0$*;*
3)ранг матрицы $R = \|\theta^*, A_1^*\theta^*, \ldots, A_1^{*n+1}\theta^*\|$ *равен* $n+2$*;*
4) выполнены равенства $N_i + \Gamma_i = M_i$, $i = \overline{0, n+2}, F \neq 0$.

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Теорема 8 . *Пусть выполнены условия 1) - 3) теоремы 7, и выполнено условие теоремы 6, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$N_i + \Gamma_i = P_i, \quad i = \overline{0, n+2}. \tag{24}$$

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Теорема 9 . *Пусть выполнены условия 1) - 3) теоремы 7, и выполнено условие теоремы 6, и пусть, кроме того, верны равенства*

$$N_i + \Gamma_i = M_i + P_i, \quad i = \overline{0, n+2}, \tag{25}$$

Тогда положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво.

Пример. В качестве примера рассмотрим задачу А.И. Лурье и В.Н. Постникова. Уравнения движения регулируемой системы имеет вид [2]

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = x_1 + \varphi(\sigma), \frac{d\xi}{dt} = \eta, \frac{d\eta}{dt} = \varphi(\sigma), \sigma = (1-\alpha)x_1 + (\alpha - r - 1)\eta - \alpha\xi, \\ x_1(0) = x_{10}, \xi(0) = \xi_0, \eta(0) = \eta_0, t \in I = [0, \infty), \end{gathered} \tag{26}$$

где α, r – постоянные параметр, $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \overline{\varphi}(\sigma)$, $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое число. Для данного примера: $A = -1$, $B = 1$, $D = (1-\alpha)$, $E = \alpha - r - 1$, $F = -\alpha$, $n = 1$. Вектор-функция $z = (x_1, \xi, \eta)$ и после замены $\varphi(\sigma) = \varepsilon\sigma + \overline{\varphi}(\sigma)$, получим

$$\dot{z} = A_1 z + B_1 \overline{\varphi}(\sigma), \sigma = Sz, z(0) = z_0, t \in [0, \infty),$$

где

$$A_1 = A_1(\varepsilon) = \begin{pmatrix} -1 + \varepsilon(1-\alpha) & -\alpha\varepsilon & \varepsilon(\alpha - r - 1) \\ 0 & 0 & 1 \\ \varepsilon(1-\alpha) & -\alpha\varepsilon & \varepsilon(\alpha - r - 1) \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$S = \begin{pmatrix} 1-\alpha, -\alpha, \alpha - r - 1 \end{pmatrix}$.

а) Неособое преобразование. Вектор $\theta{=}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Произведение $\theta B_1{=}\theta_1{+}\theta_3{=}0$. Следовательно, $\theta_3{=}{-}\theta_1$, $\theta{=}(\theta_1, \theta_2, -\theta_1)$. Произведение $\theta A_1 B_1{=}{-}\theta_1{+}\theta_2{=}0$. Тогда $\theta_1{=}\theta_2$ и вектор $\theta{=}(1, 1, -1)\theta_1$. Пусть $\theta_1{=}1$. Тогда $\theta{=}(1, 1, -1)$, $\theta B_1{=}0$, $\theta A_1 B_1{=}0$, $\theta A_1^2 B_1{=}1$.

Характеристический полином матрицы A_1 имеет вид

$$\Delta(\lambda) = det(\lambda I_3 - A_1) = \lambda^3 + \lambda^2(1 + \varepsilon r) + \lambda[\varepsilon(1+r)] + \varepsilon\alpha.$$

Тогда $A_1^3 = -A_1^2(1+\varepsilon r) - A_1[\varepsilon(1+r)] - \varepsilon\alpha I_3$, величины $a_0 = \varepsilon\alpha$, $a_1 = [\varepsilon(1+r)]$, $a_2 = (1+\varepsilon r)$. Дифференциальное уравнение (6) запишется в виде

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = y_3, \quad \dot{y}_3 = -\varepsilon\alpha y_1 - \varepsilon(1+r)y_2 - (1+\varepsilon r)y_3 + \overline{\varphi}(\sigma). \tag{27}$$

Матрица

$$R = \|\theta^*, A_1^*\theta^*, A_1^{*2}\theta^*\| = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \Delta = 1 \neq 0,$$

ранг $R = 3$, матрица R – неособая.

б) Тождества. Вектор $S^* = (1-\alpha, -\alpha, \alpha - r - 1)$. Тождества (12) - (14) запишутся в виде

$$\overline{\varphi}(\sigma(t)) = \omega + \varepsilon\alpha y_1 + \varepsilon(1+r)y_2 + (1+\varepsilon r)y_3,$$

$$\sigma(t) = -\alpha y_1 + (-r-1)y_2 - ry_3, \quad \dot{\sigma}(t) = -\alpha y_2 + (-r-1)y_3 - r\omega,$$

где $y_1{=}y_1(t)$, $y_2{=}y_2(t)$, $y_3{=}y_3(t)$, $\omega(t){=}\dot{y}_3(t)$, $S^*{=}{-}\alpha\theta^*{+}(-r-1)A_1^*\theta^*{-}rA_1^{*2}\theta^*$, $y_1{=}x_1{+}\xi{-}\eta$, $y_2 = -x_1 + \eta$, $y_3{=}x_1$.

в) Несобственные интегралы. Несобственный интеграл

$$I_1 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [N_0\omega^2(t) + N_1y_1^2(t) + N_2y_2^2(t) + N_3y_3^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt \geq 0,$$

где $N_0 = -\tau_1\mu_0^{-1}$, $N_1 = -\varepsilon\alpha^2\tau_1 - \tau_1\mu_0^{-1}\alpha^2\varepsilon^2$, $N_2 = \tau_1[\alpha + 2\alpha\varepsilon r - \varepsilon(1{+}r)^2] - \tau_1\mu_0^{-1}[\varepsilon^2(1{+}r)^2 - 2\alpha\varepsilon(1+\varepsilon r)]$, $N_3{=}\tau_1(1-\varepsilon r^2) - \tau_1\mu_0^{-1}[(1-\varepsilon r)^2 - 2\varepsilon(1+r)]$.

Несобственный интеграл

$$I_2 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [\gamma_0\omega(t) + \gamma_1y_1(t) + \gamma_2y_2(t) + \gamma_3y_3(t)]^2dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [\Gamma_0\omega^2(t) +$$
$$+\Gamma_1y_1^2(t) + \Gamma_2y_2^2(t) + \Gamma_3y_3^2]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt \geq 0,$$

где $\Gamma_0 = \gamma_0^2$, $\Gamma_1 = \gamma_1^2$, $\Gamma_2 = \gamma_2^2 - 2\gamma_1\gamma_3$, $\Gamma_3 = \gamma_3^2 - 2\gamma_0\gamma_2$.

Несобственный интеграл

$$I_3{=}\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \overline{\varphi}(\sigma(t))\tau_2\dot{\sigma}(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [M_0\omega^2(t){+}M_1y_1^2(t){+}$$
$$+M_2y_2^2(t) + M_3y_3^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right]dt,$$

где $M_0 = -\tau_2 r$, $M_1 = 0$, $M_2 = 0$, $M_3 = (\alpha - r - 1)\tau_2$.

Несобственный интеграл

$$I_4 = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \tau_3\dot{\sigma}^2(t)dt = \lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T [P_0\omega^2(t) + P_1y_1^2(t) + P_2y_2^2(t) + P_3y_3^2(t)]dt +$$
$$+\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_4(t)\right]dt,$$

где $P_0 = \tau_3 r^2$, $P_1 = 0$, $P_2 = \tau_3\alpha^2$, $P_3 = \tau_3[(r+1)^2 - 2\alpha r]$.

г) Абсолютная устойчивость. Проверка условия теоремы 7. Поскольку $A = -1$, то A – гурвицева. Характеристический полином матрицы

$$A_1 = A_1(\mu) = \begin{pmatrix} -1 + \mu(1-\alpha) & -\alpha\mu & \mu(\alpha - r - 1) \\ 0 & 0 & 1 \\ \mu(1-\alpha) & -\alpha\mu & \mu(\alpha - r - 1) \end{pmatrix}$$

равен

$$\Delta_1(\lambda) = det(\lambda I_3 - A_1) = \lambda^3 + (1 + \mu r)\lambda^2 + [\mu(1+r)]\lambda + \mu\alpha, \quad 0 < \varepsilon \leq \mu \leq \overline{\mu}_0.$$

Для гурвицевости матрицы $A_1(\mu)$ необходимо и достаточно, чтобы $1+\mu r>0$, $\mu(1+r)>0$, $\mu\alpha>0$, $(1+\mu r)\mu(1+r)>\mu\alpha$.

Для выполнения указанных неравенств достаточно, чтобы $\alpha>0$, $r>0$, $r+1-\alpha>0$. Для данных значений параметров системы величина μ удовлетворяет условию $0<\varepsilon\leq\leq\mu\leq\overline{\mu}_0$, $\mu_0\leq\overline{\mu}_0=\infty$. Проверка условий 2), 3) теоремы 7 приведена выше. Из условия 4) теоремы 7 имеем

$$N_0+\Gamma_0=M_0:\ \ -\tau_1\mu_0^{-1}+\gamma_0^2=-\tau_2 r, \tag{28}$$

$$N_1+\Gamma_1=M_1:\ \ -\varepsilon\alpha^2\tau_1-\tau_1\mu_0^{-1}\alpha^2\varepsilon^2+\gamma_1^2=0, \tag{29}$$

$$\begin{aligned}N_2+\Gamma_2=M_2:\ \ &\tau_1[\alpha+2\alpha\varepsilon r-\varepsilon(1+r)^2]-\tau_1\mu_0^{-1}[\varepsilon^2(1+r)^2-\\&-2\alpha\varepsilon(1+\varepsilon r)]+\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3=0\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}N_3+\Gamma_3=M_3:\ \ &\tau_1(1-\varepsilon r^2)-\tau_1\mu_0^{-1}[(1+\varepsilon r)^2-2\varepsilon(1+r)]+\\&+\gamma_3^2-2\gamma_0\gamma_2=\tau_2(\alpha-r-1).\end{aligned} \tag{31}$$

Рассмотрим предельный случай, когда $\overline{\mu}_0=\mu_0=\infty$. Поскольку $\mu_0^{-1}=0$, то равенства (28) – (31) запишутся так:

$$\begin{aligned}&\gamma_0^2=-\tau_2 r,\quad \gamma_1^2=\varepsilon\alpha^2\tau_1,\quad \tau_1[\alpha+2\alpha\varepsilon r-\varepsilon(1+r)^2]+\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3=0,\\&\tau_1(1-\varepsilon r^2)+\gamma_3^2-2\gamma_0\gamma_2=\tau_2(\alpha-r-1).\end{aligned} \tag{32}$$

Из первого равенства из (32) следует, что $r>0$, $\tau_2<0$. В частности, $\gamma_0^2=\frac{k_3^2}{\varepsilon\tau_1}\tau_1^2+k_4\tau_1+k_5\varepsilon\tau_1$, где k_4, k_5 – любые числа, знак γ_0^2 определяется знаком первой слагаемой, $k_3\neq0$, $\varepsilon>0$, $\tau_1>0$. Из второго равенства из (32) имеем $\gamma_1=\alpha\sqrt{\varepsilon\tau_1}$, где $\alpha>0$, $\varepsilon>0$, $\tau_1>0$. Из третьего равенства следует, что $\gamma_2^2=2\gamma_1\gamma_3-\alpha\tau_1-\varepsilon\tau_1[2\alpha r-(1+r)^2]$. Выберем $\gamma_3=\frac{k_1}{\sqrt{\varepsilon\tau_1}}\tau_1+k_2\sqrt{\varepsilon\tau_1}$, где k_1, k_2 – любые числа. Тогда $2\gamma_1\gamma_3=2\alpha k_1\tau_1+2\alpha k_2\varepsilon\tau_1$, $\gamma_2^2=[2\alpha k_1-\alpha]\tau_1+[2\alpha k_2-2\alpha r+(1+r)^2]\varepsilon\tau_1$. Если $k_1=\frac{1}{2}$, $k_2=r-\frac{(1+r)^2}{2\alpha}$, $\alpha>0$, $r>0$, то $\gamma_2=0$. Из четвертого равенства из (32) при $\gamma_2=0$, $\gamma_3^2=\frac{k_1^2}{\varepsilon\tau_1}\tau_1^2+2k_1k_2\tau_1+k_2^2\varepsilon\tau_1$, имеем

$$\tau_1-\varepsilon\tau_1 r^2+\frac{k_1^2}{\varepsilon\tau_1}\tau_1^2+2k_1k_2\tau_1+k_2^2\varepsilon\tau_1=\tau_2(\alpha-r-1). \tag{33}$$

Заметим, что $\tau_2(\alpha-r-1)=\tau\alpha-\tau r-\tau_2=\tau_2(\alpha-1)+\gamma_0^2=-\frac{\gamma_0^2}{r}(\alpha-1)+\gamma_0^2=\gamma_0^2\frac{r+1-\alpha}{r}$. Теперь равенства (33) с учетом того, что $\gamma_0^2=\frac{k_3^2}{\varepsilon\tau_1}\tau_1^2+k_4\tau_1+k_5\varepsilon\tau_1$, запишутся в виде

$$(1+2k_1k_2-\frac{r+1-\alpha}{r}k_4)\tau_1+(-r^2+k_2^2-k_5\frac{r+1-\alpha}{r})\varepsilon\tau_1+(k_1^2-k_3^2\frac{r+1-\alpha}{r})\frac{\tau_1^2}{\varepsilon\tau_1}=0.$$

Пусть $r+1-\alpha>0$, $r>0$. Тогда при $k_4=\frac{r}{r+1-\alpha}(1+2k_1k_2)$, $k_5=\frac{r}{r+1-\alpha}(-r^2+k_2^2)$, $k_3^2=\frac{r}{r+1-\alpha}k_1^2$ выполнено четвертое равенство из (32).

Итак, при $\alpha>0$, $r>0$, $r+1-\alpha>0$ выполнены все условия теоремы 7. Такой же результат получен в работе [4] по частотному критерию.

д) Абсолютная устойчивость. Проверка условия теоремы 8. В случае $\mu_0=\infty$, $\mu_0^{-1}=0$ равенства (24) запишутся в виде

$$\begin{aligned}&\gamma_0^2=-\tau_3 r^2,\quad \gamma_1^2=\varepsilon\alpha^2\tau_1,\quad \tau_1[\alpha+2\alpha\varepsilon r-\varepsilon(1+r)^2]+\gamma_2^2-2\gamma_1\gamma_3=\alpha^2\tau_3,\\&\tau_1(1-\varepsilon r^2)+\gamma_3^2-2\gamma_0\gamma_2=\tau_3[(r+1)^2-2\alpha r].\end{aligned} \tag{34}$$

Из (34) имеем: $\gamma_0 = r\sqrt{\tau_3}$, $r > 0$, $\tau_3 > 0$, $\gamma_1 = \alpha\sqrt{\varepsilon\tau_1}$. третьего равенства при $\gamma_3 = \frac{k_1}{\sqrt{\varepsilon\tau_1}}\tau_1 + k_2\sqrt{\varepsilon\tau_1}$, $k_1 = \frac{1}{2}$, $k_2 = r - \frac{(1+r)^2}{2\alpha}$ получим $\gamma_2^2 = \alpha^2\tau_3$. Следовательно, $\gamma_2 = \alpha\sqrt{\tau_3}$. Из четвертого равенства (34) имеем

$$\gamma_3^2 = \tau_3[(r+1)^2 - 2\alpha r] - \tau_1(1 - \varepsilon r^2) + 2\gamma_0\gamma_2, \tag{35}$$

где $2\gamma_0\gamma_2 = 2r\sqrt{\tau_3}\cdot\alpha\sqrt{\tau_3} = 2\alpha r\tau_3$. Теперь (35) запишется в виде $\gamma_3^2 = \tau_3(r+1)^2 - \tau_1(1-\varepsilon r^2)$, где $\tau_3>0$. Всегда можно выбрать величину $\tau_3>0$. так, чтобы $\gamma_3^2=\tau_3(r+1)^2-\tau_1(1-\varepsilon r^2)>0$. Проверка условия 1) – 3) теоремы 8 приведены выше. Таким образом, положение равновесия системы (1), (2) абсолютно устойчиво, если матрица $A_1(\mu)$, $0<\varepsilon\leq\mu\leq\infty$ – гурвицева.

Заключение. На практике встречающиеся системы автоматического управления относятся к системам с ограниченными ресурсами. В работе рассмотрена нелинейная система вида (1), (2) с устойчивой линейной частью. В отличие от известных методов исследования абсолютной устойчивости положения равновесия предлагается новый подход основанный на априорной оценке несобственных интегралов вдоль решения системы.

Примечательно то, что неособым преобразованием уравнения движения системы приводится к специальному виду, которая позволяет представить подынтегральную функцию в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое является квадратичной формой приведенной к диагональному виду, а второе слагаемое полный дифференциал функции по времени. Такое представление подынтегральной функции, в конечном счете, проводит к легко проверяемым критериям абсолютной устойчивости.

Отличительной особенностью предлагаемого подхода является получение тождеств вдоль решения системы относительно входного и выходного переменных нелинейного элемента. Эти тождества позволяют использовать сведения о свойствах нелинейной части системы для оценки несобственных интегралов. При таком подходе к исследованию абсолютной устойчивости регулируемых систем удается получить дополнительное соотношения связывающие фазовые переменные, что позволяет получить более эффективные критерии абсолютной устойчивости.

Для систем с ограниченными ресурсами, фазовые переменные ограничены и являются равномерно непрерывными функциями. Эти свойства были использованы при получении критерия, а также при оценке несобственного интеграла от квадрата производной входной переменной нелинейного элемента. Данная оценка позволяет существенно расширить область абсолютной устойчивости в пространстве конструктивных параметров системы нежели известные критерии и в ряде случаев можно получить необходимое и достаточное условие абсолютной устойчивости.

Список литературы

[1] *Воронов А.А.* Основы теории автоматического управления. Часть II.// -М.: "Энергия 1966, 350 с.

[2] *Лурье А.Н.* Некоторые нелинейные задачи теории автоматического регулирования.// -М.:-Л.: Гостехиздат, 1951, 216 с.

[3] *Попов В.М.* Гиперустойчивость автоматических систем.// -М.: Наука, 1970, 453 с.

[4] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия.
- М.: Наука, 1978, 400 с.

[5] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости вынужденных движений в нелинейных системах. – Изв. АН СССР, Техническая кибернетика, 1969, №5, с.38-48.

[6] *Айсагалиев С.А.* Об определении области абсолютной устойчивости системы управления снесколькими нелинейными элементами. – АН СССР, Автоматика и телемеханика, 1970, №12, с.83-94.

[7] *Айсагалиев С.А.* К теории абсолютной устойчивость релгулируемых систем. // – Дифференциальные уравнения, Минск-Москва, 1994, т.30, №5, с.748-757.

[8] *Айсагалиев С.А., Злобина Е.Б.* Общая теория об абсолютной устойчивости регулируемых систем. – Вестник НАН РК, 1999, №3, с.5-10.

[9] *Айсагалиев С.А.* Обобщенные теоремы об абсолютной устойчивости регулируемых систем. – Доклады НАН РК, 1992, №2, с.4-9.

[10] *Айсагалиев С.А.* Теория регулируемых систем. - Алматы: Қазақ университеті, 2000. -234 с.