Решение задачи пограничного слоя неньютоновских жидкостей вариационным методом

Ж.Ж. Жанабеков
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
e-mail: 2261032@mail.ru

Аннотация

Приводимый в статье вариационный метод дает профиль скоростей, зависящих от реологического индекса n, что подобно зависимости от n в случае численного решения. Данный метод приводит к аналитическому выражению для профиля скорости, по которому оперировать легче, чем решением в рядах Блазиуса или численным.

Рассмотрим стационарное двумерное течение неньютоновских (степенных) жидкостей в пограничном слое плоской пластины. Набегающий поток будем считать однородным и движущимся со скоростью U_∞. Ось x направим вдоль пластины, y – перпендикулярно к ней. Начало координат поместим на передней кромке пластины [1]. При этом течение описывается системой уравнений:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{k}{\rho}\cdot n\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &u(x,0) = 0, \qquad v(x,0) = v_0 \quad \text{при} \quad 0 \le x \le L, \\ &u = U_\infty \quad \text{при} \quad y = \infty, \\ &u(0,y) = U_\infty \quad \text{при} \quad -\infty \le y \le +\infty. \end{aligned} \tag{2}$$

Общий подход к решению подобной задачи методом локального потенциала или возрастания общей энтропии [2] приводит к рассмотрению следующей системы, близкой к стационарному состоянию.

$$\begin{aligned} &\rho\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = kn\cdot\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ &\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Умножим первое уравнение системы (3) на $\left(-\frac{\partial u}{\partial t}\right)$, а второе на $\left(-\frac{\rho}{2}\right)\cdot\left(\frac{\partial v^2}{\partial t}\right)$, полученные результаты сложим.

$$\begin{aligned} &\psi = -\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 = \rho u\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} + \rho v\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} - kn\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial t} - \\ &-\frac{\rho}{2}\cdot\frac{\partial v^2}{\partial t}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \le 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ определена в прямоугольной области $A(0 \le x \le L,\ 0 \le y \le \infty)$. Тогда

$$\varphi = -\rho \cdot \int\limits_A \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dA = -\rho \int\limits_0^L \int\limits_0^\infty \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dydx \le 0. \tag{5}$$

Подынтегральную функцию ψ преобразуем к виду:

$$\psi = \rho \frac{\partial}{\partial x}\left(u \cdot u \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \rho \frac{\partial}{\partial y}\left(u \cdot v \frac{\partial u}{\partial t}\right) - kn \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial t}\right) - \rho u \cdot u \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) -$$
$$-\rho u \cdot v \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(u^2 + v^2\right) + \frac{kn}{2} \cdot \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2.$$

Интегрируя по частям и применяя теорему Остроградского о дивергенции, уравнение (5) преобразуем к виду:

$$\begin{aligned} \varphi = \int\limits_0^L \int\limits_0^\infty \Bigg[-\rho u u \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \rho u \cdot v \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{k}{2} n \cdot \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \\ -\frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(u^2 + v^2\right) \Bigg] dydx + J, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$J = \int\limits_C \left(\rho u \cdot u \frac{\partial u}{\partial t} dy + \rho u \cdot v \frac{\partial u}{\partial t} dx - kn \cdot \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^{n-1} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} dx, \right) \tag{7}$$

C – граница области $A(0 \le x \le L,\ 0 \le y \le \infty)$.

Легко заменить, что уравнение (6) приобретает определенный физический смысл, если воспользоваться принципом локального потенциала. При этом все составляющие скорости в (6), как коэффициенты при производных по времени, вычисляются при стационарном состоянии. Такая операция позволяет вынести $\dfrac{\partial}{\partial t}$ за знак интеграла, так как граница области не зависит от времени. Величина интеграла может уменьшаться со временем, в стационарном состоянии течение в пограничном слое соответствует минимуму функционала

$$\begin{aligned} E^* = \int\limits_0^L \int\limits_0^\infty \Bigg[-\rho u^0 \cdot u^0 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \rho u^0 \cdot v^0 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{k}{2} n \cdot \left|\frac{\partial u^0}{\partial y}\right|^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \\ -\frac{\rho}{2} \cdot \left(\frac{\partial u^0}{\partial x} + \frac{\partial v^0}{\partial y}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(u^2 + v^2\right) \Bigg] dydx + \\ + \int\limits_C \left(\rho u^0 \cdot u^0 \cdot u dy + \rho u^0 \cdot v^0 \cdot u dx - kn \cdot \left|\frac{\partial u^0}{\partial y}\right|^{n-1} \cdot \left(\frac{\partial u^0}{\partial y}\right) \cdot u dx\right), \end{aligned} \tag{8}$$

где E^* – возрастание общей энтропии, $\dfrac{\partial E^*}{\partial t}$ – скорость возрастания общей энтропии.

Профили скоростей зададим в виде:

$$u = U_\infty \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{f}\right)\right], \tag{9}$$

$$v = v_0 + U_\infty \cdot f' \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{f}\right) - \frac{y}{f}\exp\left(-\frac{y}{f}\right)\right], \tag{10}$$

где f – неизвестная пока функция x, f' – производная по x.

Нетрудно показать, что функции (9) и (10) удовлетворяют как уравнению неразрывности, так и граничным условиям (2), если $f(x) \to 0$ при $x \to 0$.

Следуя [2], для функционала E^* в (8) имеем следующее выражение:

$$E^* = \int_0^L \int_0^\infty \left\{ \rho U_\infty^3 \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right)^2 \cdot \frac{yf'}{f^2} \cdot e^{-\frac{y}{f}} - \rho \cdot \left[U_\infty^2 \cdot v_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right) + \right.\right.$$

$$\left. + U_\infty^3 \cdot f^{0\prime} \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}} - \frac{y}{f^0} \cdot e^{-\frac{y}{f^0}}\right)\right] \cdot \frac{1}{f} e^{-\frac{y}{f}} +$$

$$\left. + \frac{k}{2} \cdot nU_\infty^{n+1} \cdot \left|\frac{1}{f^0} \cdot e^{-\frac{y}{f^0}}\right|^{n-1} \cdot \frac{1}{f^2} \cdot e^{-\frac{2y}{f}} \right\} dydx + \int_0^\infty \rho U_\infty^3 \cdot \left[\left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right)^2 \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f}}\right) - 1\right]\Bigg|_{x=L} dy.$$

Вычислим вариацию E^* по f, сохраняя неизменной f^0.

$$\delta^* = \int_0^L \int_0^\infty \left\{ \rho U_\infty^3 \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right)^2 \cdot \left(\frac{y\delta f'}{f^2} - \frac{2yf'}{f^3} \cdot \delta f + \frac{y^2 f'}{f^4} \cdot \delta f\right) \cdot e^{-\frac{y}{f}} - \right.$$

$$-\rho \cdot \left[U_\infty^2 \cdot v_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right) + U_\infty^3 \cdot f^{0\prime} \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right) \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}} - \frac{y}{f^0} \cdot e^{-\frac{y}{f^0}}\right)\right] \cdot$$

$$\left. \cdot \left(-\frac{1}{f^2} + \frac{y}{f^3}\right) e^{-\frac{y}{f}} \delta f + kn \cdot U_\infty^{n+1} \cdot \left|\frac{1}{f^0} \cdot e^{-\frac{y}{f^0}}\right|^{n-1} \cdot \left(-\frac{1}{f^3} + \frac{y}{f^4}\right) \cdot e^{-\frac{2y}{f}} \delta f \right\} dydx -$$

$$- \int_0^\infty \rho U_\infty^3 \cdot \left(1 - e^{-\frac{y}{f^0}}\right)^2 \cdot \frac{y}{f^2} e^{-\frac{y}{f}} \delta f \Bigg|_{x=L} dy.$$

Полагая $f^0 = f$ и многократно интегрируя, получим

$$\delta E^* = \int_0^L \left(\frac{\rho U_\infty^3}{9} \cdot \frac{f'}{f} - \frac{\rho U_\infty^2 \cdot v_0}{4} \cdot \frac{1}{f} - \frac{kU_\infty^{n+1} \cdot n^2}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{f^{n+1}}\right) \delta f \cdot dx.$$

Приравнивая вариацию δE^* нулю для всех допустимых вариаций δf, имеем уравнение Эйлера-Лагранжа

$$f^n \cdot f' - \frac{9v_0}{4U_\infty} \cdot f^n - \frac{9k \cdot U_\infty^{n-2} \cdot n^2}{\rho(n+1)^2} = 0. \tag{11}$$

При этом функция f^0 должна быть положительной. Действительно, если $f^0 < 0$, то можно записать $f^0 = -|f^0|$. Следовательно,

$$u^0 = U_\infty \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{f^0}\right)\right] = U_\infty \cdot \left[1 - \exp\left(-\frac{y}{|f^0|}\right)\right],$$

что противоречит выполнению условия, $u^0 > 0$ так как $e^{\frac{y}{|f^0|}}$ всегда положительна.

Так как $u = U_\infty$ при $x = 0$, то задача сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения (11) при условии $f(0) = 0$.

Для сравнения приближенного решения (9)-(10) с точным [1], полученным интегрированием уравнения (11), рассмотрен частный случай, когда $v_0 = 0$ (непроницаемая пластинка) и $n = 1$ (ньютоновская жидкость), $n = 0,5$ (псевдопластичная жидкость).

Решением уравнения (11) в этом случае является выражение:

$$f = \left(\frac{9n^2}{n+1}\right)^{\frac{1}{n+1}} \cdot \left(\frac{1}{Re_x}\right)^{\frac{1}{n+1}} x,$$

где $Re_x = \dfrac{\rho U_\infty^{2-n}}{k} \cdot x^n$.

При этом решение (9) имеет вид:

$$\begin{aligned} u &= U_\infty \cdot \left(1 - e^{-c\eta}\right), \\ v &= v_0 + U_\infty \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{(n+1)\cdot c\eta} \cdot [1 - (1 + c\eta) \cdot e^{-c\eta}], \end{aligned} \tag{12}$$

$$\eta = \frac{y}{x} \cdot \left[\frac{Re_x}{n(n+1)}\right]^{\frac{1}{n+1}}, \qquad c = \left[\frac{(n+1)^2}{9n}\right]^{\frac{1}{n+1}}.$$

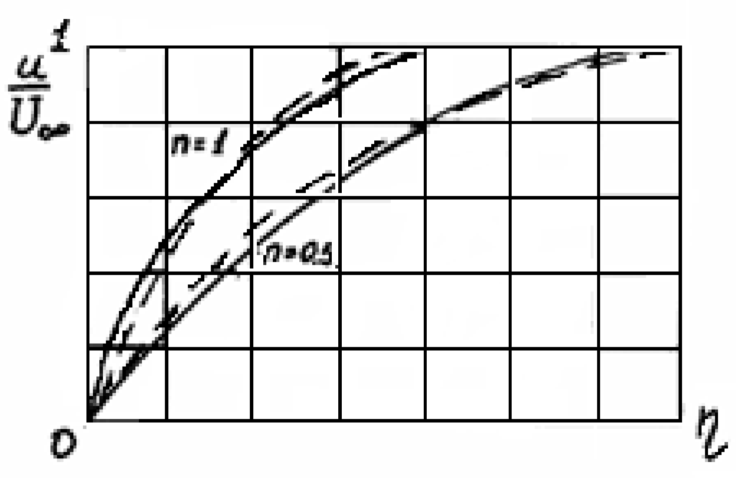

Рис. 1. Сравнение приближенного решение (12) с точным [1], где пунктирная линия приближенное решения (12), сплошная – точное [1].

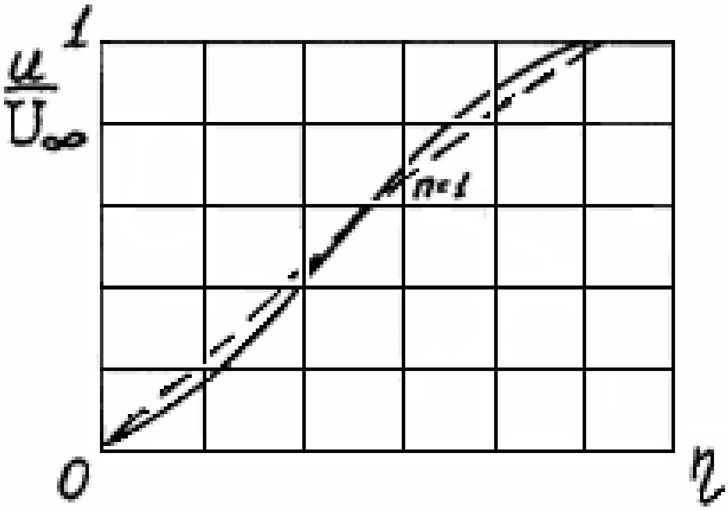

Рис. 2. Сравнение приближенного решения (12) с точным [1] для случая проницаемой пластины $(v_0 \neq 0)$, когда $v_0\,(x) \approx x^{-\frac{1}{2}}$.

В заключение отметим, что указанный вариационный метод дает профиль скоростей, который зависит от реологического индекса n, что подобно зависимости от n в случае точного численного решения. Таким образом, данный метод имеет определенное преимущество по сравнению с методом Кармана-Польгаузена, поскольку дает форму решения, в точности удовлетворяющую тем же граничным условиям, что и численное. Точность повышается по мере уменьшения $n(n < 0,5)$. Значительное преимущество данного метода состоит в том, что он дает аналитическое выражение для профиля скорости, т.е. приводит к решению в такой форме, которой оперировать легче, чем например, решением в рядах Блазиуса или численным.

Список литературы

[1] *Берковский Б.М., Шульман Э.П.* Пограничный слой неньютоновских жидкостей. – Минск, 1966. – 158 с.

[2] *Шехтер Р.* Вариационные методы в инженерных расчетах. – М.: Мир, 1971. – 112 с.