Численный анализ и прогноз аномалий атмосферных процессов с использованием сопряженных функций

Н.С. Заурбеков
КазЭУ им. Т.Рыскулова, e-mail: agu_nurgali@mail.ru

Аннотация

Рассмотренные в данной работе вопросы касаются, во-первых, теории сопряженных функции к решению прогностических задач, во-вторых, дальнейшему развитию идей Г.И. Марчука [1] по долгосрочному прогнозу атмосферных процессов.

В работе [1] рассматривалась трехмерная задача для уравнения притока тепла в атмосфере и океане. На границе этих двух сред выполнялось условие теплового баланса. Циркуляция в атмосфере предполагалось известной (были взяты климатические скорости ветра), а для океана использовались скорости потоков, полученные из океанической циркуляционной модели. Авторы решали сопряженную задачу с указанными выше скоростями в атмосфере и океане применительно к расчету декадных температур у поверхности земли для большой территории. В работе показано, насколько велика роль океана в формировании аномалий температуры.

Мы ставим своей целью рассмотреть поведение сопряженных функции для месячных осреднений, используя фактические данные об атмосферной циркуляции [2]. При этом интегрирование ведется только для начала прогнозируемого месяца. Это соответствует к применению сопряженных функции для прогноза с нулевой заблаговременностью. Все эти обстоятельства рассматривались из желания максимально приблизиться к условиям оперативного использования этой теории.

Рассмотрим простую задачу, что поведение средней температуры тропосферы описывается следующей задачей на сфере

$$\frac{\partial T}{\partial t} + AT - \mu\Delta T = c_1\widetilde{T} - cT + F, \quad T = T_0 \quad \text{при} \quad t = t_0, \tag{1}$$

где μ – коэффициент горизонтальной макротурбулентности; $\widetilde{T}$ – температура поверхности океана; F – внешние притоки тепла; c и c_1 – коэффициенты теплопередачи; Δ – оператор Лапласа на сфере; A – дифференциальный оператор, описывающий адвекцию температуры. Предполагаем, что $AT = \dfrac{1}{aSin\theta}\left(\dfrac{\partial V_\lambda T}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial V_\theta Sin\theta T}{\partial \theta}\right)$, где V_λ и V_θ – компоненты горизонтальной составляющей скорости реального ветра. Их значения получены из предположении соленоидальности движения путем решения линейного уравнения баланса относительно функции тока по реальным данным геопотенциала H_{500} и H_{1000} .

Слагаемое $c_1\widetilde{T} - cT \approx c_1(\widetilde{T} - T)$ описывает теплопередачу турбулентной энергии на границе атмосфера – океан, поэтому над сушей c_1 принимается равной нулю. Коэффициент c введен из-за того, что T является средней температурой тропосферы, а не температурой воздуха вблизи земной поверхности, как это должно быть в соответствии с теорией пограничного слоя. Приближенно $c_1 \approx$1,05c, но более точно оно должно быть определено эмпирически.

Поставим, в соответствии с (1) следующую сопряженную задачу:

$$-\frac{\partial T^*}{\partial t} + A^*T^* - \mu\Delta T^* + cT^* = F^*, \quad T^* = T_1^* \quad \text{при} \quad t = t_1. \tag{2}$$

Из-за присутствия члена с горизонтально турбулентностью, эта задача корректна, если ее решать по времени в направлении его убывания. Оператор A^* – сопряженное оператору A. При условии $\dfrac{\partial V_\lambda}{\partial \lambda} + \dfrac{\partial V_\theta Sin\theta}{\partial \theta} = 0$, которое выполняется в силу соленоидальности движения, имеем $A^* = -A$.

Ищем в области G значение средней температуры $\overline{T}_{G,\delta}$, определяемой из следующего функционала:

$$\overline{T}_{G,\delta} = \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_G TF^* d\omega, \tag{3}$$

где $\delta = t_1 - t_0$, $d\omega$ – элемент сферической поверхности.

Функция F^* выбрано таким образом, чтобы удовлетворялись условия

1) $F^*(t,\theta,\lambda) = 0$ при $(t,\theta,\lambda) \notin [t_1 - \delta, t_1] \times G$,

2) $\int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_G F^*(t,\theta,\lambda) d\omega = 1$,

F^* выбирается в виде гладкой функции по каждой из переменных. Ее явный вид таков:

$$F^*(t,\theta,\lambda) = B\omega_{\varepsilon_0}\left(\theta - \theta_0^*\right)\omega_{\varepsilon_\lambda}(\lambda - \lambda_0^*)\omega_{\varepsilon_t}(t - t_0^*), \tag{4}$$

где $\omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} e^{-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}} & |x| \le \varepsilon \\ 0 & |x| \ge \varepsilon, \end{cases}$ $\lambda_0^* = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$, $\theta_0^* = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$, $t_0^* = \dfrac{t_0 + t_1}{2}$, $\varepsilon_\lambda = \dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}$, $\varepsilon_\theta = \dfrac{\theta_2 - \theta_1}{2}$, $\varepsilon_t = \dfrac{\delta}{2}$, постоянная B определяется из условия 2.

Уравнение (2) решается при $T_1^* = 0$ в интервале $[t_1, t_0]$ при δ, равной месяцу. Численный метод, применяемый для решения (2), аналогичен описанному в работе [3]. Остальные параметры взяты следующие: $C = 5 \times 10^{-6} c^{-1}$, $\mu = 5 \times 10^6 \text{м}^2 c^{-1}$.

Напомним, что задачи (1) и (2) гильбертовом пространстве функции на сфере S связаны с тождеством Лагранжа

$$(T^*, AT) = (T, A^*T^*), \tag{5}$$

где $(a,b) = \int\limits_S abd\omega$ – скалярное произведение.

Если умножить скалярное произведение (1) на T^*, а (2) - на T и из первого произведения вычесть второе и затем результат проинтегрировать по времени от t_0 до t_1, то имея в виду (3), (5) и начальные условия, получим функционал:

$$\overline{T}_{G,\delta} = \int\limits_S T_0 T_0 * d\omega + \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_S (F + c_1 \widetilde{T}) T^* d\omega. \tag{6}$$

Выражения (6) определяет среднюю температуру по району G и интервал времени δ как сумму двух интегралов. Первый описывает вклад начального поля, а второй – притоков тепла, действующих непрерывно по времени на всем интервале $[t_1, t_0]$. При этом результат существенно зависит от пространственно-временного распределения T^* – своеобразной функции влияния рассматриваемой задачи.

Функция T^* рассчитывалась для трех областей: G_1 – Европа, G_2 – Сибирь, G_3 – Канада. Все области имели одинаковую форму и размер - сферический прямоугольник $G = \{(\theta, \lambda) \in S; \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2; \lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2\}$.

Например, G ограничена широтами 47,5^0 - 67,5^0 с.ш. и долготами 11,25^0- 78,75^0 в.д. Для сравнения были вычислены также T^* при $c_1 = c = 0$. Общей закономерностью всех трех вариантов является уменьшения значения T^* над океанами, что соответствует качественным оценкам поведения решениям из-за присутствия члена T^* в уравнении (2). Остановимся на этом более подробнее.

Для области G_1 полученное поле T^*, помимо полученного эффекта над океанами, существенно перераспределилось по сравнению с вариантами без океана. По-прежнему, активными являются полярные области и, кроме того, проявилось значительное влияние районов юго-запада Европы и северо-запада Африки, включая Средиземноморье.

Заметим, что над акваторией Тихого океана не наблюдается существенных изменений, и вообще значения T^* здесь сравнительно малы, что указывает на то, что влияния Тихого океана не существенно проявляется в температурном режиме области G_1. Это обстоятельство можно рассматривать как обоснования многих попыток искать объяснения изменениям термического режима Европы и Европейской территории СНГ в значительной степени благодаря воздействию Атлантического океана.

Для области G_2 воздействия Тихого и Атлантического океанов оказывается не столь значительным. Это видно, по крайней мере, из сравнения L_2 – нормы сопряженной функции для областей G_1 и G_2. Максимальное значение нормы для района G_2 значительно выше. Это обуславливается, во-первых, сравнительно отдаленностью Атлантического океана, и во-вторых тем, что Тихий океан расположен на "подветренной"стороне относительно преобладающего западно-восточного переноса. Кроме этого, мы видим, что максимум T^* находится в полярном районе. Это говорит о большом весе процессов Арктики для районов Сибири. Динамически такое явление связано с частыми переносами воздуха из арктических районов.

Несколько по иному ведет себя T^* для района G_3. Тихий океан для этой области оказывает более сильное влияние чем Атлантический океан на область G_1. Это связано с тем, что область G_3 находится в непосредственной близости от океана. И в этом варианте большую роль играют полярные районы, где наблюдается максимум T^*. Максимум воздействия Тихого океана приходится на середину прогнозируемого месяца. Следует отметить, что Атлантический океан на район G_3 влияет существенным образом, несмотря на преобладание западновосточного переноса, вероятно, из-за горизонтальной макротурбулентности.

Сопряженные функции, соответствующие 30 суткам интегрирования, оказались сравнительно устойчивы по отношению к различным ситуациям. Поэтому вклад начальных полей температуры (первый интеграл в функционале (6)) меняется в пределах одного градуса при использовании T^*, вычисленных за различные периоды времени.

В уравнении (1) мы рассмотрели в правой части лишь один вид притока тепла – теплоотдача от океана. Если ввести в параметризованной форме другие виды притока тепла, то такой детерминированный приток тепла, будучи учтенным в функционале (6), позволить решать диагностическую задачу, из которой удастся сделать заключения о факторах, определивших наблюдаемые аномалии температуры. Это можно делать каждый раз по происшествии календарного месяца, что даст возможность глубже понять происходившие атмосферные процессы. В этом мы видим перспективу применения этой теории для анализа причин формирования крупных аномалии температуры.

Рассмотрим теперь вопрос о возможности расчета средних аномалии температуры по заданному району. Для аномалии температуры можно пользоваться уравнением (1) с реальным ветром в операторе $\nabla * \left(\vec{V}\right)$, при этом правая часть уравнения будет содержать, помимо аномалии притоков тепла, дополнительные члены. Обозначив всю правую часть через δF, мы будем использовать для средней аномалии $\overline{\delta T_{\Sigma,G}}$ следующий функционал:

$$\overline{\delta F_{\Sigma,G}} = \int\limits_S \delta T_0 T_0^* d\omega + \int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_S \delta F T^* d\omega. \tag{7}$$

В таблице 1 приведена оценка составляющих функционала (7), вычисленная по реальным данным. В первой строке указаны номера скользящих трехдекадных периодов, начиная с 1 сентября. Расчеты приводилось для среднемесячных величин, со сдвигом на одну декаду. При расчете сопряженной функции предполагалось, что $C = 0$. Функция δF вычислялось с использованием архива по левой части уравнения (1). Производная по времени находилась как разность с суточным интервалом. Определенная таким образом правая часть уравнения с точностью до ошибок аппроксимации при ее решении балансирует уравнение (1). Приведенные в таблице ошибки характеризуют точность метода расчета сопряженной функции и вычисления функционала (7). Средняя ошибка составляет 0,5 градуса.

Таблица 1

	случай №1	случай №2	случай №3	случай №4	случай №5	случай №6	случай №7
$\int\limits_S \delta T_0 T_0^* d\omega$	2,4	0,4	-1,2	1,1	-0,3	-0,1	2,3
$\int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_S \delta F T^* d\omega$	-1,1	1,6	4,0	0,3	0,9	0,3	-2,2
Фактическая $\overline{\delta T_{\Sigma,G}}$	1,4	2,9	3,4	0,6	0,3	0,8	-0,1
Ошибка диагноза	-0,1	-0,9	-0,6	0,8	0,3	-0,6	0,2
Модуль ошибки адиабатического прогноза	1,0	2,5	4,6	0,5	0,6	0,9	2,4
	случай №8	случай №9	случай №10	случай №11	случай №12	случай №13	случай №14
$\int\limits_S \delta T_0 T_0^* d\omega$	1,3	0,2	-0,6	2,1	0,1	0,1	0,6
$\int\limits_{t_0}^{t_1} dt \int\limits_S \delta F T^* d\omega$	-2,3	1,4	1,6	-3,1	0,2	0,7	2,4
Фактическая $\overline{\delta T_{\Sigma,G}}$	0,6	0,3	0,8	-0,1	0,1	1,2	2,9
Ошибка диагноза	-1,6	1,3	0,2	-0,9	0,2	-0,4	0,1
Модуль ошибки адиабатического прогноза	0,7	0,1	1,4	2,2	0,0	1,1	2,3

Анализ этой таблицы позволяет сделать вывод о величине вклада притока тепла и начального состояния в фактическую аномалию температуры. Мы видим, что неучет притока тепла в прогнозируемом интервале резко снижает качество расчетов в отдельных случаях (2, 3, 7). Кроме того, начальное состояние в отдельных случаях также окажется весомыми (1, 7). Как мы уже замечали, сопряженные функции T^* обладают некоторой устойчивостью. Сравнивая периоды (4-7), мы видим, что ошибка в среднем выросла в два раза и соответствует примерно 1 градусу. Анализируя отдельные случаи, можно сделать вывод, что прием основанный на использовании сопряженной температуры T^*, вычисленной по реальным данным предшествующегося месяца, вполне может быть использован на практике. Это обстоятельство очень важно для использования (7) в целях прогноза, когда мы не знаем в прогнозируемом месяце скоростей ветра, необходимых для расчета $\overline{T_{\Sigma,G}}$.

Чтобы говорить о применении (7) в режиме прогноза, этого недостаточно, как видно из таблиц. Необходимо еще научиться оценивать состояния δF в прогнозируемом интервале времени. Это мы предполагаем сделать путем детерминированного описания δF, выделяя различные процессы, описываемые этим членом. Кроме того, предполагается использования статистических связей для временной экстраполяции различных компонентов [4].

Для оценки прогностических "способностей"метода с использованием только начальных данных (адиабатический прогноз) следует иметь в виду среднюю точность метода в варианте "диагноз". В данной серии такая ошибка составила 0,4 градуса. Ошибка адиабатического прогноза определяется с сравнением первой и третьей строчек. Для случаев, когда аномалия была больше 0,4 градуса, мы имеем $\rho = 0,43$ и относительную ошибку (отношения средней ошибки к средней аномалии) равную 0,9. Таким образом, предварительные оценки на небольшом числе случаев, говорят о положительных возможностях метода. Помимо апробации вышеизложенного метода, которую следует провести с привлечением более широкого архивного материала, предполагается вести работу по его усовершенствованию.

В целях дальнейшего усовершенствования методики применения теории сопряженных уравнений к задачам анализа и прогноза, начата работа по модификации этого метода. Получены прогностические формулы, использующие специальным образом "предысторию"формирования температурного поля в целях фильтрации шумов в исходной информации для повышения точности прогноза. Предполагается в рамках теории сопряженных уравнений произвести учет важных для долгосрочного прогноза неадиабатических факторов (облачность, как регулятор притока солнечной энергии, температура океана), а также реализовать модифицированный подход.

Список литературы

[1] *Булеев Н.И., Марчук Г.И.* Некоторые вопросы теории краткосрочного прогноза полей метеорологических элементов. // Труды ВНМС. Т. 2. – 1963.

[2] *Айдосов А., Заурбеков Н.С.* Теоретические основы прогнозирования природных процессов и экологической обстановки окружающей среды. Книга 3. Теоретические основы прогнозирования атмосферных процессов, экологической обстановки окружающей среды и построение геоэкологической карты на примере КНГКМ. - А., Қазақ университетi, 2000. – 219 с.

[3] *Марчук Г.И., Скиба Ю.Н.* Численный расчет сопряженной задачи для моделирования термического взаимодействия атмосферы с океанами и континентами. // Известия АН СССР, серия Физика атмосферы и океана, 1970, Т.12., №5. – С. 459 – 469.

[4] *Марчук Г.И.* Численные методы в прогнозе погоды. – Л: Гидрометеоиздат, 1967. – 456 с.