

Решение задачи Дирихле для двумерного волнового уравнения методом итераций Ландвебера

С.И. КАБАНИХИН[†], М.А. БЕКТЕМЕСОВ[‡], Д.Б. НУРСЕЙТОВ[‡], А.Н. АЛИМОВА[‡]

[†]*Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН,
Новосибирск, Россия*

[‡]*Казахский национальный педагогический университет им. Абая,
Алматы, Казахстан*

e-mail: ksi52@mail.ru, maktagali@mail.ru, ndb80@mail.ru, anic2002@mail.ru

Аннотация

В данной работе рассматривается некорректная задача Дирихле для двумерного волнового уравнения. Для решения обратной задачи последовательно решаются прямая и сопряженная задачи методом итераций Ландвебера. В конце работы приводятся численные результаты решения обратной задачи.

1 Постановка задачи

Известно, что для эллиптических уравнений краевые задачи с данными на всей границе области исследованы достаточно полно. В то же время для гиперболических уравнений и уравнений составного типа этим задачам посвящено гораздо меньше работ, а изучение их началось сравнительно недавно. Это, обусловлено тем, что краевые задачи для неэллиптических уравнений являются вообще говоря, некорректными. Типовым примером некорректной краевой задачи есть задачи типа Дирихле для волнового уравнения. Задача Дирихле для гиперболического уравнения в круге исследована в работах В.П. Бурского [1]. Обзор некоторых результатов в исследовании краевых задач для гиперболических уравнений приведен в работах Б.И. Пташниковой [2]. В данной работе рассматривается классически некорректная задача Дирихле для волнового уравнения в двухмерном пространстве [3, 4, 5, 6]. Работа посвящена численному исследованию задачи Дирихле для волнового уравнения. Задача рассматривается в прямоугольной области.

Рассмотрим постановку задачи

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (1)$$

$$u \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=\pi} = 0, \quad y \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (2)$$

$$u \Big|_{y=0} = u \Big|_{y=\pi} = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (3)$$

$$u \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi), \quad (4)$$

$$u \Big|_{t=T} = f(x, y), \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi). \quad (5)$$

Эту задачу мы сформулируем как обратную задачу по отношению к следующей прямой задаче:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy}, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (6)$$

$$u \Big|_{x=0} = u \Big|_{x=\pi} = 0, \quad y \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (7)$$

$$u \Big|_{y=0} = u \Big|_{y=\pi} = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (8)$$

$$u \Big|_{t=0} = q(x, y), \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi), \quad (9)$$

$$u_t \Big|_{t=0} = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi). \quad (10)$$

В обратной задаче (1)–(5) требуется найти $q(x, y)$, по дополнительной информации относительно решения прямой задачи

$$u(x, y, T) = f(x, y), \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi). \quad (11)$$

Решаем задачу минимизацией целевого функционала

$$J(q) = \langle Aq - f, Aq - f \rangle, \quad (12)$$

минимизировать который будем методом итераций Ландвебера

$$q_{n+1}(x) = q_n(x) - \alpha J' q_n \quad (13)$$

при $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$.

2 Вычисление градиента функционала $J(q)$

Рассмотрим функционал (12) в следующем виде

$$J(q) = \int_0^\pi \int_0^\pi [u(x, y, T; q) - f(x, y)]^2 dx dy. \quad (14)$$

Найдем приращение функционала

$$\begin{aligned} J(q + \delta q) - J(q) &= \\ &= \int_0^\pi \int_0^\pi \left\{ [u(x, y, T; q + \delta q) - f(x, y)]^2 - [u(x, y, T; q) - f(x, y)]^2 \right\} dx dy \end{aligned} \quad (15)$$

Введем замену

$$u(x, y, T; q + \delta q) = \tilde{u} \quad (16)$$

$$u(x, y, T; q) = u \quad (17)$$

$$\delta u(x, y, T; \delta q) = \tilde{u} - u \quad (18)$$

$$\tilde{u} = \delta u + u \quad (19)$$

Раскроем скобки в (15) и, используя (16) – (17), получим

$$= \int_0^\pi \int_0^\pi (\tilde{u}^2 - 2\tilde{u}f(x, y) + f(x, y)^2) dx dy - \int_0^\pi \int_0^\pi (u^2 - 2uf(x, y) + f(x, y)^2) dx dy$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi \int_0^\pi \tilde{u}^2 dx dy - 2 \int_0^\pi \int_0^\pi \tilde{u} f(x, y) dx dy - \int_0^\pi \int_0^\pi u^2 dx dy + 2 \int_0^\pi \int_0^\pi u f(x, y) dx dy \\
 &= \int_0^\pi \int_0^\pi (\tilde{u}^2 - u^2) dx dy - 2 \int_0^\pi \int_0^\pi (\tilde{u} - u) f(x, y) dx dy,
 \end{aligned}$$

используя (18),(19), получим

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^\pi \int_0^\pi ((\tilde{u} - u)(\tilde{u} + u)) dx dy - 2 \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u f(x, y) dx dy \\
 &= \int_0^\pi \int_0^\pi (\delta u(\delta u + u + u)) dx dy - 2 \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u f(x, y) dx dy \\
 &= \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u^2 dx dy + 2 \int_0^\pi \int_0^\pi u \delta u dx dy - 2 \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u f(x, y) dx dy \\
 &= \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u^2 dx dy + 2 \int_0^\pi \int_0^\pi (u - f(x, y)) \delta u dx dy.
 \end{aligned}$$

Сформулируем возмущенную задачу

$$\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} + \tilde{u}_{yy}, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (20)$$

$$\tilde{u}(0, y, t) = \tilde{u}(\pi, y, t) = 0, \quad y \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (21)$$

$$\tilde{u}(x, 0, t) = \tilde{u}(x, \pi, t) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (22)$$

$$\tilde{u}(x, y, 0) = q(x, y) + \delta q(x, y), \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi), \quad (23)$$

$$\tilde{u}_t(x, y, 0) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi). \quad (24)$$

Из задачи (20) – (24) вычтем задачу (6) – (10) и получим задачу на $\delta u(x, y)$

$$\delta u_{tt} = \delta u_{xx} + \delta u_{yy}, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (25)$$

$$\delta u(0, y, t) = \delta u(\pi, y, t) = 0, \quad y \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (26)$$

$$\delta u(x, 0, t) = \delta u(x, \pi, t) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (27)$$

$$\delta u(x, y, 0) = \delta q(x, y), \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi), \quad (28)$$

$$\delta u_t(x, y, 0) = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi). \quad (29)$$

Рассмотрим тождественно равное нулю выражение, вытекающее из (25)

$$0 \equiv \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi (\delta u_{tt} - \delta u_{xx} - \delta u_{yy}) \psi dx dy dt$$

$$= \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u_{tt} \psi dx dy dt - \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u_{xx} \psi dx dy dt - \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u_{yy} \psi dx dy dt,$$

проинтегрируем по частям выражение

$$= \left| \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u_t \psi dx dy \right. - \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u_t \psi_t dx dy dt - \left| \int_0^\pi \int_0^T \int_0^\pi \delta u_x \psi dy dt + \right. \\ \left. + \int_0^\pi \int_0^T \int_0^\pi \delta u_x \psi_x dx dy dt - \left| \int_0^\pi \int_0^T \int_0^\pi \delta u_y \psi dx dt + \int_0^\pi \int_0^T \int_0^\pi \delta u_y \psi_y dx dy dt, \right. \right.$$

используем повторное интегрирование по частям

$$= \left| \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u_t \psi dx dy \right. - \left| \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u \psi_t dx dy + \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u \psi_{tt} dx dy dt - \right. \\ \left. - \left| \int_0^\pi \int_0^T \int_0^\pi \delta u_x \psi dy dt + \left| \int_0^\pi \int_0^T \int_0^\pi \delta u \psi_x dy dt - \int_0^\pi \int_0^T \int_0^\pi \delta u \psi_{xx} dx dy dt - \right. \right. \\ \left. - \left| \int_0^\pi \int_0^T \int_0^\pi \delta u_y \psi dx dt + \left| \int_0^\pi \int_0^T \int_0^\pi \delta u \psi_y dx dt - \int_0^\pi \int_0^T \int_0^\pi \delta u \psi_{yy} dx dy dt = \right. \right. \\ = \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi (\psi_{tt} - \psi_{xx} - \psi_{yy}) \delta u dx dy dt + \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u_t(x, y, T) \psi(x, y, T) dx dy - \\ - \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u_t(x, y, 0) \psi(x, y, 0) dx dy - \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u(x, y, T) \psi_t(x, y, T) dx dy + \\ + \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u(x, y, 0) \psi_t(x, y, 0) dx dy - \int_0^T \int_0^\pi \delta u_x(\pi, y, t) \psi(\pi, y, t) dy dt + \\ + \int_0^T \int_0^\pi \delta u_x(0, y, t) \psi(0, y, t) dy dt + \int_0^T \int_0^\pi \delta u(\pi, y, t) \psi_x(\pi, y, t) dy dt - \\ - \int_0^T \int_0^\pi \delta u(0, y, t) \psi_x(0, y, t) dy dt - \int_0^T \int_0^\pi \delta u_y(x, \pi, t) \psi(x, \pi, t) dx dt +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^T \int_0^\pi \delta u_y(x, 0, t) \psi(x, 0, t) dx dt + \int_0^T \int_0^\pi \delta u(x, \pi, t) \psi_y(x, \pi, t) dx dt - \\
 & - \int_0^T \int_0^\pi \delta u(x, 0, t) \psi_y(x, 0, t) dx dt.
 \end{aligned}$$

Используя (26), (27), (29) получаем

$$\begin{aligned}
 & = \int_0^T \int_0^\pi \int_0^\pi (\psi_{tt} - \psi_{xx} - \psi_{yy}) \delta u dx dy dt + \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u_t(x, y, T) \psi(x, y, T) dx dy - \\
 & - \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u(x, y, T) \psi_t(x, y, T) dx dy + \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u(x, y, 0) \psi_t(x, y, 0) dx dy - \\
 & - \int_0^T \int_0^\pi \delta u_x(\pi, y, t) \psi(\pi, y, t) dy dt + \int_0^T \int_0^\pi \delta u_x(0, y, t) \psi(0, y, t) dy dt - \\
 & - \int_0^T \int_0^\pi \delta u_y(x, \pi, t) \psi(x, \pi, t) dx dt + \int_0^T \int_0^\pi \delta u_y(x, 0, t) \psi(x, 0, t) dx dt.
 \end{aligned}$$

Откуда вытекает постановка сопряженной задачи

$$\psi_{tt} = \psi_{xx} + \psi_{yy}, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (30)$$

$$\psi \Big|_{x=0} = \psi \Big|_{x=\pi} = 0, \quad y \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (31)$$

$$\psi \Big|_{y=0} = \psi \Big|_{y=\pi} = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad t \in (0, T), \quad (32)$$

$$\psi \Big|_{t=T} = 0, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi), \quad (33)$$

$$\psi_t \Big|_{t=T} = 2[u(x, y, T) - f(x, y)], \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi). \quad (34)$$

получаем выражение

$$0 \equiv \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u(x, y, T) \psi_t(x, y, T) dx dy - \int_0^\pi \int_0^\pi \delta u(x, y, 0) \psi_t(x, y, 0) dx dy. \quad (35)$$

Откуда, учитывая (28), из (35) получаем выражение для градиента функционала

$$J'q = \psi_t(x, y, 0). \quad (36)$$

3 Численные результаты

3.1 Схема метода итераций Ландвебера

1. Задаем параметр спуска α .
2. Для известного точного решения q_T находим дополнительную информацию f , решая прямую задачу берем след решения.
3. Задаем начальное приближение q_0 .
4. Предположим, что q_n уже известно, тогда решаем прямую задачу (6) – (10).
5. Считаем $J(q) = \|Aq - f\|^2$.
6. Если текущее значение функционала $J(q)$ – мало, то решаем сопряженную задачу (30) – (34).
7. Вычисляем градиент функционала $J'q = \psi_t(x, y, 0)$.
8. Вычисляем следующее приближение $q_{n+1}(x) = q_n(x) - \alpha J'q_n$, где $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$.

3.2 Схема решения прямой задачи

Аппроксимируем прямую задачу (6) – (10). Пусть N – количество узлов равномерной сетки на интервале $(0, \pi)$, а N_t – количество узлов равномерной сетки на интервале $(0, T)$. Определим шаг сетки: $h = \frac{\pi}{N}$.

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - 2u_{i,j}^k + u_{i,j}^{k-1}}{\tau^2} = \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{h^2} + \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h^2}, \quad (37)$$

$$u_{0,j}^k = u_{N,j}^k = 0, \quad (38)$$

$$u_{i,0}^k = u_{i,N}^k = 0, \quad (39)$$

$$u_{i,j}^0 = q_{i,j}, \quad (40)$$

$$\frac{u_{i,j}^1 - u_{i,j}^0}{\tau} = 0. \quad (41)$$

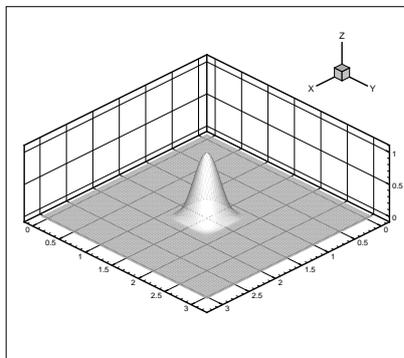


Рис. 1: График функции при $N_t = 0$

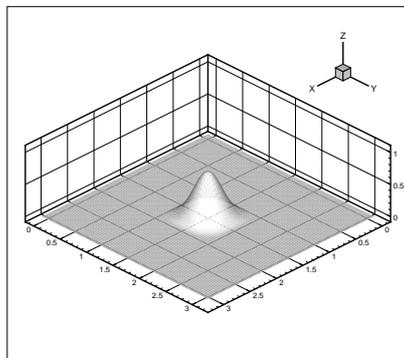


Рис. 2: График функции при $N_t = 100$

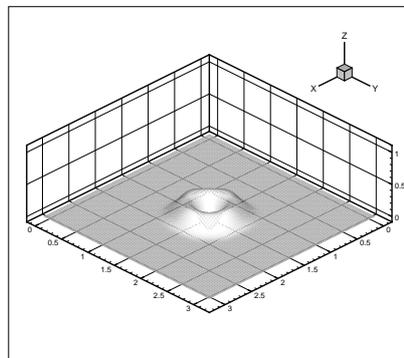


Рис. 3: График функции при $N_t = 250$

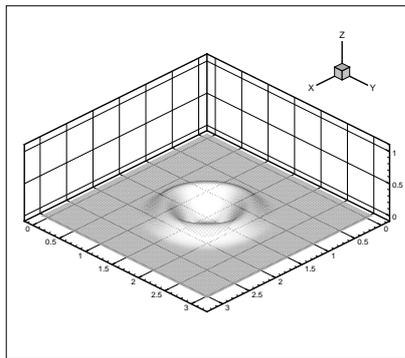


Рис. 4: График функции при $N_t = 500$

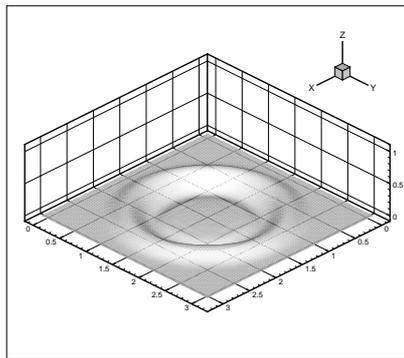


Рис. 5: График функции при $N_t = 1000$

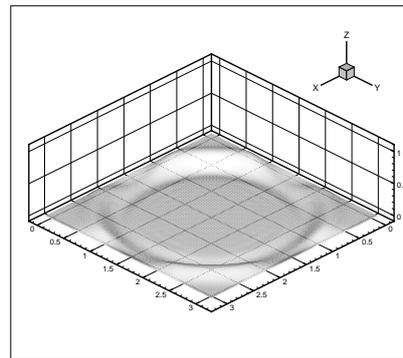


Рис. 6: График функции при $N_t = 1500$

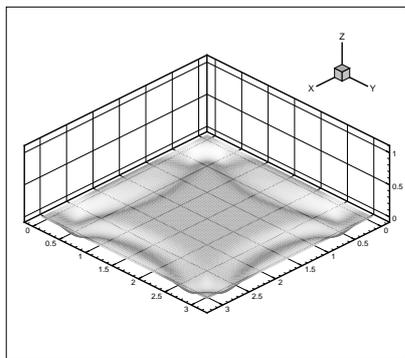


Рис. 7: График функции при $N_t = 2000$

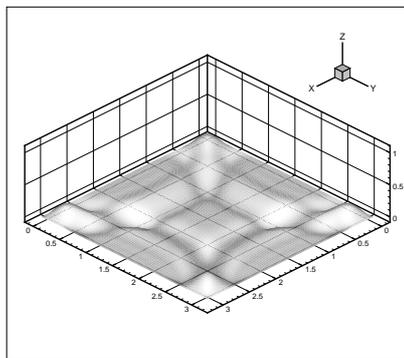


Рис. 8: График функции при $N_t = 2500$

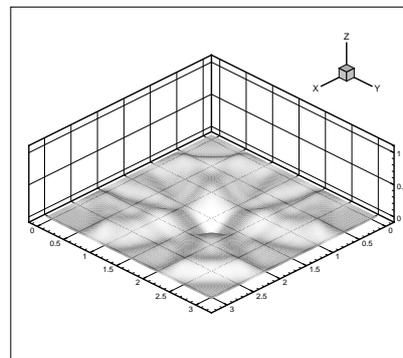


Рис. 9: График функции при $N_t = 3000$

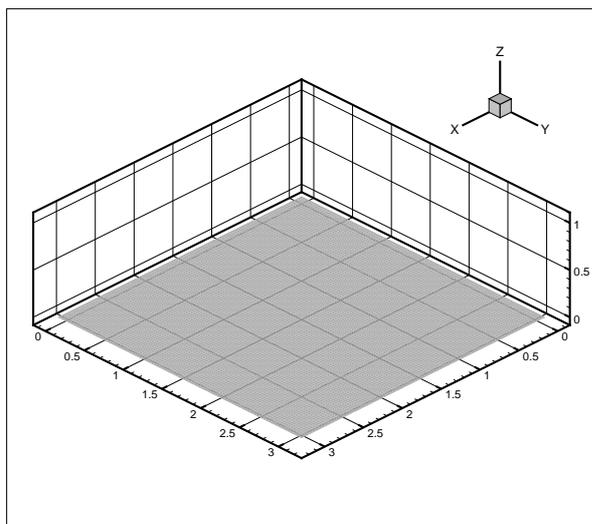


Рис. 10: График функции q_0

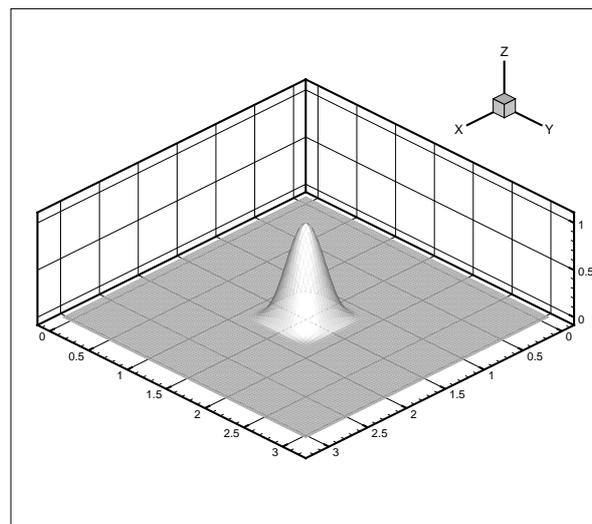
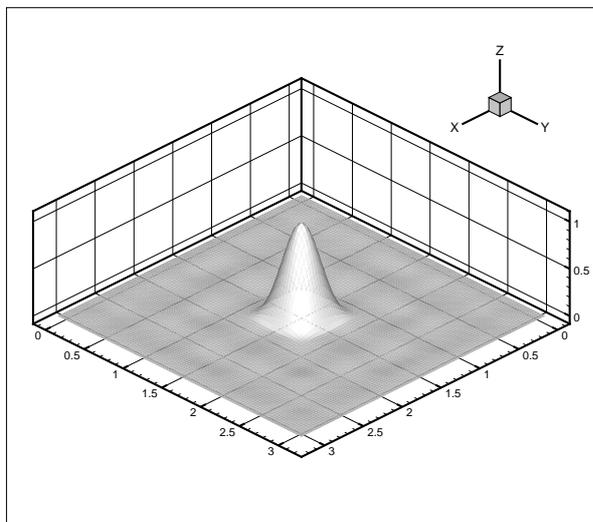
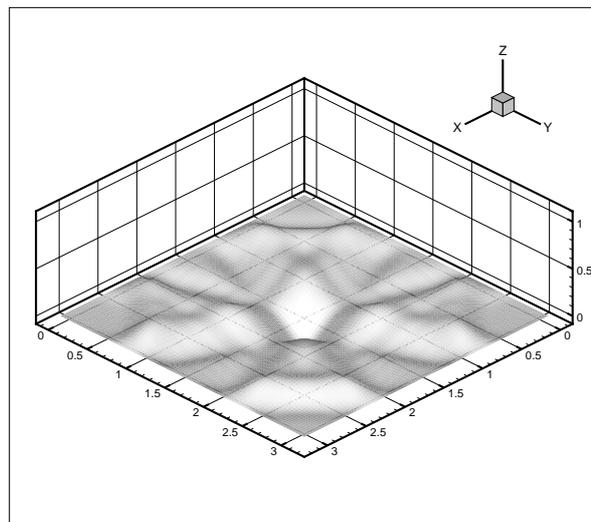
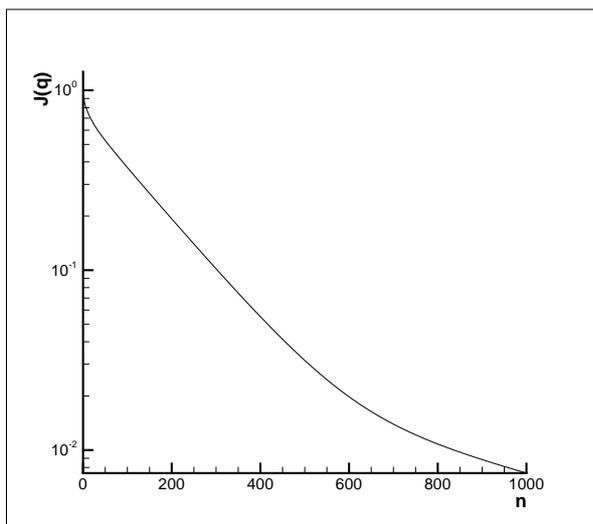
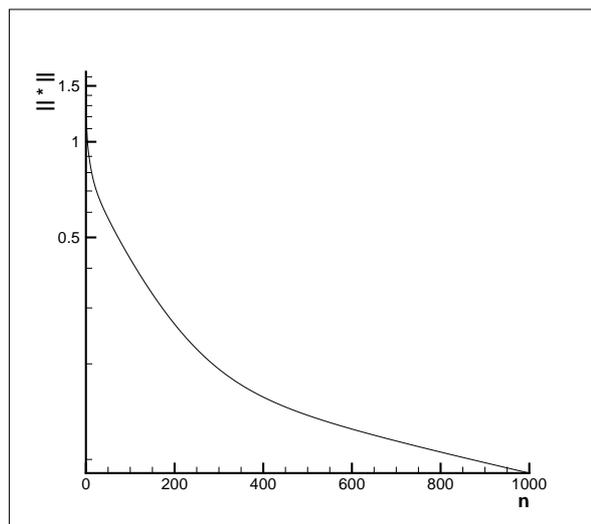


Рис. 11: График функции q_T

Рис. 12: График функции q_n Рис. 13: График функции f Рис. 14: График функционала $J(q)$ Рис. 15: График $\|q - q_T\|_{L_2}$

Перепишем формулы (37) – (41) в удобном для вычислений виде:

$$u_{i,j}^{k+1} = \frac{\tau^2}{h^2} (u_{i+1,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k - 4u_{i,j}^k) + 2u_{i,j}^k - u_{i,j}^{k-1} \quad (42)$$

$$u_{0,j}^k = u_{N,j}^k = 0, \quad (43)$$

$$u_{i,0}^k = u_{i,N}^k = 0, \quad (44)$$

$$u_{i,j}^0 = q_{i,j}, \quad (45)$$

$$u_{i,j}^1 = u_{i,j}^0. \quad (46)$$

Решив задачу получаем след решения f

$$u_{i,j}^{N_t} = f_{i,j}. \quad (47)$$

3.3 Описание численного эксперимента

Расчеты тестовой задачи проводились для $N = 100$, $N_t = 3000$, $h = \frac{\pi}{N}$, $\tau = 0,001$, параметр спуска $\alpha = 1$, точное решение которой известно:

$$q_T(x, y) = \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(8x)}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos(8y)}{2} \right), \quad (48)$$

начальное приближение:

$$q_0(x, y) = 0 \quad (49)$$

На графиках отображены результаты численного решения прямой задачи (6) – (10) при разных значениях N_t

Список литературы

- [1] *Бурский В.П.* Методы исследования граничных задач для общих дифференциальных уравнений. - Киев: Наукова думка, 2002.
- [2] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. - Киев: Наукова думка, 1984.
- [3] *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. - Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009.
- [4] *Кабанихин С.И., Бектемесов М.А., Нурсейтова А.Т.* Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. - Алматы-Новосибирск: ОФ «Международный фонд обратных задач», 2006.
- [5] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. - Москва: Наука, 1988.
- [6] *Тихонов А.Н., Самарский А.* Уравнения математической физики. - Москва: Наука, 1972.