Конечномерное возмущение краевой задачи Дирихле для бигармонического уравнения

Г.Е. Берикханова
Семипалатинский государственный педагогический институт, Семей, Казахстан
e-mail: gulnazezhen@mail.ru

Аннотация

В работе рассматривается задача Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения Лапласа в многосвязной области. Вычисляется резольвента данной задачи.

1 Введение

Рассмотрим задачу Дирихле для неоднородного бигармонического уравнения Лапласа в следующей не односвязной области $\Omega_0 = \Omega \backslash \{M_0\}$, где M_0 - некоторая внутренняя точка круга Ω. Ω_0 - будем называть проколотой областью. Нам удобно ввести класс функций $\tilde{W}_2^4(\Omega_0)$, который состоит из функции $h(x,y) \in W_2^4(\Omega_0)$, причем в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ имеют следующие поведения:

$$\sup_{0<\delta<\delta_0} \sup_{y_0-\delta<\eta<y_0+\delta} \left\{ \delta \left(\left| \frac{\partial h(x_0+\delta,\eta)}{\partial \xi} \right| + \left| \frac{\partial h(x_0-\delta,\eta)}{\partial \xi} \right| + |h(x_0+\delta,\eta)| + \right.\right.$$
$$+ |h(x_0-\delta,\eta)| + \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta_{\xi,\eta} h(x_0+\delta,\eta) \right| +$$
$$\left.\left. + \left| \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta_{\xi,\eta} h(x_0-\delta,\eta) \right| + |\Delta_{\xi,\eta} h(x_0+\delta,\eta)| + |\Delta_{\xi,\eta} h(x_0-\delta,\eta)| \right) \right\} \le C \qquad (1)$$

$$\sup_{0<\delta<\delta_0} \sup_{x_0-\delta<\xi<x_0+\delta} \left\{ \delta \left(\left| \frac{\partial h(\xi,y_0-\delta)}{\partial \eta} \right| + \left| \frac{\partial h(\xi,y_0+\delta)}{\partial \eta} \right| + |h(\xi,y_0-\delta)| + \right.\right.$$
$$+ |h(\xi,y_0+\delta)| + \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{\xi,\eta} h(\xi,y_0-\delta) \right| +$$
$$\left.\left. + \left| \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{\xi,\eta} h(\xi,y_0+\delta) \right| + |\Delta_{\xi,\eta} h(\xi,y_0-\delta)| + |\Delta_{\xi,\eta} h(\xi,y_0+\delta)| \right) \right\} \le C \qquad (2)$$

и существуют конечные пределы

$$\alpha = -\lim_{\delta \to +0} \left\{ \int_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \Delta_{\xi,\eta} h(x_0+\delta,\eta) - \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta_{\xi,\eta} h(x_0-\delta,\eta) \right] d\eta + \right.$$
$$\left. + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{\xi,\eta} h(\xi,y_0+\delta) - \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{\xi,\eta} h(\xi,y_0-\delta) \right] d\xi \right\} \qquad (3)$$

$$\beta = -\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0-\delta,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}h\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta \tag{4}$$

$$\gamma = -\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0-\delta\right)-\Delta_{\xi,\eta}h\left(\xi,y_0+\delta\right)\right]d\xi \tag{5}$$

$$\theta = -\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial h\left(x_0+\delta,\eta\right)}{\partial\xi}-\frac{\partial h\left(x_0-\delta,\eta\right)}{\partial\xi}\right]d\eta+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}Zd\xi\right\} \tag{6}$$

$$Z = \left[\frac{\partial h\left(\xi,y_0+\delta\right)}{\partial\eta}-\frac{\partial h\left(\xi,y_0-\delta\right)}{\partial\eta}\right]$$

$$\sigma = -\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[h\left(x_0-\delta,\eta\right)-h\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta \tag{7}$$

$$\varsigma = -\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[h\left(\xi,y_0-\delta\right)-h\left(\xi,y_0+\delta\right)\right]d\xi \tag{8}$$

Таким образом, задача примет следующий вид

$$\Delta^2W\left(x,y\right)=f\left(x,y\right),\Omega_0 \tag{9}$$

$$W\left(x,y\right)\big|_{\partial\Omega}-L\left(\Delta^2W\right)\left(x,y\right)\big|_{\partial\Omega}=0 \tag{10}$$

$$\left.\frac{\partial W\left(x,y\right)}{\partial\overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega}-\left.\frac{\partial L\left(\Delta^2W\right)\left(x,y\right)}{\partial\overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega}=0 \tag{11}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0+\delta,\eta\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0-\delta,\eta\right)\right]d\eta+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0+\delta\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}W\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi\right\}=$$

$$=2\lim_{\delta\to+0}\left\{\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0+\delta,\eta\right)-\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(x_0-\delta,\eta\right)\right]d\eta+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0+\delta\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta}L\left(\Delta^2W\right)\left(\xi,y_0-\delta\right)\right]d\xi\right\} \tag{12}$$

$$\lim_{\delta\to+0}\int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta}\left[\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0-\delta,\eta\right)-\Delta_{\xi,\eta}W\left(x_0+\delta,\eta\right)\right]d\eta=$$

$$= \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[\Delta_{\xi,\eta} L\left(\Delta^2 W\right)(x_0-\delta,\eta) - \Delta_{\xi,\eta} L\left(\Delta^2 W\right)(x_0+\delta,\eta)\right] d\eta \tag{13}$$

$$\lim_{\delta\to+0} \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[\Delta_{\xi,\eta} W(\xi, y_0-\delta) - \Delta_{\xi,\eta} W(\xi, y_0+\delta)\right] d\xi =$$

$$= \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[\Delta_{\xi,\eta} L\left(\Delta^2 W\right)(\xi, y_0-\delta) - \Delta_{\xi,\eta} L\left(\Delta^2 W\right)(\xi, y_0+\delta)\right] d\xi \tag{14}$$

$$\lim_{\delta\to+0} \left\{ \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[\frac{\partial W(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi} - \frac{\partial W(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right] d\eta + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[\frac{\partial W(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta} - \frac{\partial W(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}\right] d\xi \right\} =$$

$$= \lim_{\delta\to+0} \left\{ \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[\frac{\partial L(\Delta^2 W)(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi} - \frac{\partial L(\Delta^2 W)(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right] d\eta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[\frac{\partial L(\Delta^2 W)(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta} - \frac{\partial L(\Delta^2 W)(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}\right] d\xi \right\} \tag{15}$$

$$\begin{gathered} \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[W(x_0-\delta,\eta) - W(x_0+\delta,\eta)\right] d\eta = \\ \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[L(\Delta^2 W)(x_0-\delta,\eta) - L(\Delta^2 W)(x_0+\delta,\eta)\right] d\eta \end{gathered} \tag{16}$$

$$\begin{gathered} \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[W(\xi,y_0-\delta) - W(\xi,y_0+\delta)\right] d\xi = \\ \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[L(\Delta^2 W)(\xi,y_0-\delta) - L(\Delta^2 W)(\xi,y_0+\delta)\right] d\xi \end{gathered} \tag{17}$$

где функция $h(x,y)$ из $\tilde{W}_2^4(\Omega_0)$ непрерывным в смысле L_2 образом зависеть от функции $f(x,y)$ из $L_2(\Omega)$. Условия (10)-(17), накладываемые на функцию , можно интерпретировать как дополнительные условия для того, чтобы уравнение (9) при любой правой части $f(x,y)$ имела единственное решение. Чтобы переписать задачу в более компактном виде введем следующие функционалы по формулам

$$\alpha_1(W) = \lim_{\delta\to+0} \left\{ \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta} W(x_0+\delta,\eta) - \frac{\partial}{\partial\xi}\Delta_{\xi,\eta} W(x_0-\delta,\eta)\right] d\eta + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[\frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta} W(\xi,y_0+\delta) - \frac{\partial}{\partial\eta}\Delta_{\xi,\eta} W(\xi,y_0-\delta)\right] d\xi \right\} \tag{18}$$

$$\alpha_2(W) = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[\Delta_{\xi,\eta} W(x_0-\delta,\eta) - \Delta_{\xi,\eta} W(x_0+\delta,\eta)\right] d\eta \tag{19}$$

$$\alpha_3(W) = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[\Delta_{\xi,\eta} W(\xi,y_0-\delta) - \Delta_{\xi,\eta} W(\xi,y_0+\delta)\right] d\xi \tag{20}$$

$$\alpha_4(W) = \lim_{\delta\to+0} \left\{ \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[\frac{\partial W(x_0+\delta,\eta)}{\partial\xi} - \frac{\partial W(x_0-\delta,\eta)}{\partial\xi}\right] d\eta + \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} Z_1 d\xi \right\} \tag{21}$$

$$Z_1 = \left[\frac{\partial W(\xi,y_0+\delta)}{\partial\eta} - \frac{\partial W(\xi,y_0-\delta)}{\partial\eta}\right]$$

$$\alpha_5(W) = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{y_0-\delta}^{y_0+\delta} \left[W(x_0-\delta,\eta) - W(x_0+\delta,\eta)\right] d\eta \tag{22}$$

$$\alpha_6(W) = \lim_{\delta\to+0} \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \left[W(\xi,y_0-\delta) - W(\xi,y_0+\delta)\right] d\xi \tag{23}$$

Тогда краевую задачу (9)-(17) можно переписать в удобном для дальнейших исследований виде

$$\Delta^2 W(x,y) = f(x,y), \Omega_0 \tag{24}$$

$$W(x,y)|_{\partial\Omega} - L\left(\Delta^2 W\right)(x,y)\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{25}$$

$$\left.\frac{\partial W(x,y)}{\partial \overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega} - \left.\frac{\partial L\left(\Delta^2 W\right)(x,y)}{\partial \overline{n}_{x,y}}\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{26}$$

$$\alpha_k(W) = 2\alpha_k\left(L\Delta^2 W\right), \quad (k=1,4); \quad \alpha_i(W) = \alpha_i\left(L\Delta^2 W\right), (i=2,3,5,6) \tag{27}$$

где L - непрерывный в смысле L_2 оператор, отображающий $L_2(\Omega)$ в $\tilde{W}_2^4(\Omega_0)$. Доказательство данного результата можно посмотреть в работе [1].

2 Вспомогательные утверждения и доказательство теорем

В дальнейшем нам удобно вместо $L(f)$ писать $(Lf)(x,y)$ и считать L - линейным оператором. Оператор, соответствующий задаче (24)-(27), обозначим через A_L. Тогда A_0 соответствует задаче Дирихле для бигармонического уравнения в круге. В следующей теореме дано представление резольвенты оператора A_L.

Теорема 1 *Если L - линейный непрерывный оператор задачи (24)-(27), то резольвента оператора A_L имеет вид*

$$
\begin{gathered}
(A_L-\lambda I)^{-1} f(x,y) = (A_0-\lambda I)^{-1} f(x,y) - \\
-\int\limits_{\partial\Omega}\left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} LA_0 (A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,\eta) A_L (A_L-\lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) - \right. \\
\left. - LA_0 (A_0-\lambda I)^{-1} f(\xi,\eta) A_L (A_L-\lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\right] ds_{\xi,\eta} - \\
-\alpha_1 \left(LA_0 (A_0-\lambda I)^{-1} f(x,y)\right) A_L (A_L-\lambda I)^{-1} G(x,y,x_0,y_0) - \\
-\alpha_2 \left(LA_0 (A_0-\lambda I)^{-1} f(x,y)\right) A_L (A_L-\lambda I)^{-1} \frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial \xi} - \\
-\alpha_3 \left(LA_0 (A_0-\lambda I)^{-1} f(x,y)\right) A_L (A_L-\lambda I)^{-1} \frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial \eta} - \\
-\alpha_4 \left(LA_0 (A_0-\lambda I)^{-1} f(x,y)\right) A_L (A_L-\lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0) - \\
-\alpha_5 \left(LA_0 (A_0-\lambda I)^{-1} f(x,y)\right) A_L (A_L-\lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0) - \\
-\alpha_6 \left(LA_0 (A_0-\lambda I)^{-1} f(x,y)\right) A_L (A_L-\lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0) \qquad (28)
\end{gathered}
$$

где линейные функционалы $\alpha_i(\cdot)$, $(i=1,2,3,4,5,6)$ определяются по формулам (18)-(23).

Согласно теореме 1 для вычисления резольвенты на произвольном элементе f достаточно уметь вычислять значения резольвенты на конкретных функциях $\frac{\partial G(x,y,\xi,\eta)}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}}$ при $(\xi,\eta)\in\partial\Omega$ и $G(x,y,x_0,y_0)$, $\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial \xi}$, $\frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial \eta}$, $\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0)$, $\frac{\partial}{\partial \xi}\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0)$, $\frac{\partial}{\partial \eta}\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0)$.

В данной теореме 1 вычислена резольвента нелокальной внутренне краевой задачи для бигармонического уравнения Гельмгольца в проколотой области. Однотипная запись граничных условий для сплошной и проколотой областей облегчает вычисление резольвенты при исследований нелокальных внутренне краевых задач для уравнений в проколотой области. Эти задачи не являются самосопряженными, поэтому теорема 1 обобщает известные результаты [2], [3] о резольвентах на случай нелокальных несамосопряженных краевых задач.

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1 *Пусть*

$$u(x,y) = (A_0-\lambda I)^{-1} f(x,y),$$

тогда функция $u(x,y)$ является решением задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца

$$\Delta^2 u(x,y) = \lambda u(x,y) + f(x,y),\ (x,y)\in\Omega \qquad (29)$$

$$u(x,y)|_{\partial\Omega} = 0$$

Доказательство леммы 1. Эта лемма очевидна, поскольку достаточно подействовать на функцию $u(x,y)$ оператором $(A_0 - \lambda I)$, чтобы получить соотношения (29).

Лемма 2 *Пусть*

$$v_1(x,y) = A_L (A_L - \lambda I)^{-1} g(x,y), \tag{30}$$

где $g(x,y)$ *- произвольная гармоническая функция в* Ω_0. *Тогда справедливо равенство*

$$\Delta^2 v_1(x,y) = \lambda v_1(x,y), \, (x,y) \in \Omega_0 \tag{31}$$

Доказательство леммы 2. Доказательство леммы вытекает из следующей цепочки равенств

$$v_1(x,y) = ((A_L - \lambda I) + \lambda I)(A_L - \lambda I)^{-1} g(x,y) =$$

$$= g(x,y) + \lambda (A_L - \lambda I)^{-1} g(x,y) \tag{32}$$

Остается подействовать на обе части равенства бигармоническим оператором.

$$\Delta^2 v_1(x,y) = \Delta^2 g(x,y) + \lambda \Delta^2 (A_L - \lambda I)^{-1} g(x,y)$$

Так как $g(x,y)$ - бигармоническая функция в Ω_0, то есть $\Delta^2 g(x,y) = 0$ при $(x,y) \in \Omega_0$. Отсюда следует требуемое равенство (31).

Лемма 3 *Функция*

$$v_2(x,y) = (A_L - \lambda I)^{-1} g(x,y) \tag{33}$$

где $g(x,y)$ *- произвольная функция из* $L_2(\Omega)$. *Тогда справедливы следующие граничные равенства*

$$v_2(x,y)|_{\partial\Omega} = LA_L v_2(x,y)|_{\partial\Omega} \tag{34}$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} v_2(x,y)\right|_{\partial\Omega} = \left.\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} LA_L v_2(x,y)\right|_{\partial\Omega} \tag{35}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_k(v_2) = 2\alpha_k(LA_L v_2(x,y)), \quad (k = 1,4) \\ \alpha_i(v_2) = \alpha_i(LA_L v_2(x,y)), \, (i = 2,3,5,6) \end{array} \tag{36}$$

а также верно равенство

$$\Delta^2 v_2(x,y) = \lambda v_2(x,y) + g(x,y), \, (x,y) \in \Omega_0 \tag{37}$$

Доказательство леммы 3. По определению функция $v_2(x,y)$ удовлетворяет всем граничным условиям, которые определяют область определения оператора A_L. Иначе говоря, эта функция удовлетворяет условиям (25)-(27). Уравнение (37) получено также как было доказано равенство (31). Что и доказывает лемму 3.

Доказательство теоремы 1. Введем следующие обозначения фундаментальных систем решений: $T_1(x,y,x_0,y_0) = G(x,y,x_0,y_0)$, $T_2(x,y,x_0,y_0) = \frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial \xi}$, $T_3(x,\ y,\ x_0,\ y_0) = \frac{\partial G(x,y,x_0,y_0)}{\partial \eta}$, $T_4(x,y,x_0,y_0) = \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0)$, $T_5(x,y,x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0)$, $T_6(x,y,x_0,y_0) = \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,x_0,y_0)$.

$$u(x,y) = (A_0 - \lambda I)^{-1} f(x,y) \tag{38}$$

$$v_1(x,y,\xi,\eta) = A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \tag{39}$$

$$v_2(x,y,\xi,\eta) = A_L (A_L - \lambda I)^{-1} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \tag{40}$$

$$g_1(x,y) = L A_0 (A_0 - \lambda I)^{-1} f(x,y) \tag{41}$$

$$\kappa_i(x,y) = A_L (A_L - \lambda I)^{-1} T_i(x,y,x_0,y_0), \ (i = 1,2,3,4,5,6) \tag{42}$$

Нам надо доказать, что функция $W(x,y)$, определяемая по формуле

$$W(x,y) = u(x,y) - \int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g_1(\xi,\eta)\, v_1(x,y,\xi,\eta) - \right.$$

$$\left. - g_1(\xi,\eta)\, v_2(x,y,\xi,\eta) \right] ds_{\xi,\eta} - \sum_{i=1}^{6} \alpha_i(g_1(x,y))\, \kappa_i(x,y) \tag{43}$$

является решением задачи

$$\Delta^2 W(x,y) = \lambda W(x,y) + f(x,y), \ (x,y) \in \Omega_0 \tag{44}$$

$$W(x,y)|_{\partial\Omega} - L\left(\Delta^2 W(x,y)\right)\big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{45}$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} W(x,y)|_{\partial\Omega} - \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} L\left(\Delta^2 W(x,y)\right)\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{46}$$

$$\begin{array}{l} \alpha_k(W) = 2\alpha_k(L\Delta^2 W), \quad (k = 1,4) \\ \alpha_i(W) = \alpha_i(L\Delta^2 W), \quad (i = 2,3,5,6) \end{array} \tag{47}$$

Сначала проверим, что выполняется уравнение (44). Для этого подействуем на обе части соотношения (43) бигармоническим оператором Лапласа, тогда получим

$$\Delta^2 W(x,y) = \Delta^2 u(x,y)$$

$$- \int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g_1(\xi,\eta)\, \Delta^2 v_1(x,y,\xi,\eta) - g_1(\xi,\eta)\, \Delta^2 v_2(x,y,\xi,\eta) \right] ds_{\xi,\eta} -$$

$$- \sum_{i=1}^{6} \alpha_i(g_1(x,y))\, \Delta^2 \kappa_i(x,y) \tag{48}$$

Поскольку $T_i(x,y,x_0,y_0)$, $(i = 1,2,3,4,5,6)$ являются гармоническими функциями, то к функциям $v_1(x,y,\xi,\eta)$, $v_2(x,y,\xi,\eta)$, $\kappa_i(x,y)$, $(i = 1,2,3,4,5,6)$ можно применить лемму 2, то есть справедливо соотношение (31). С другой стороны, для функций $u(x,y)$ справедливы утверждения леммы 1. Учитывая равенства (29) и (31), отсюда получаем

$$\Delta^2 W(x,y) = \lambda u(x,y) + f(x,y)$$

$$-\lambda \int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g_1(\xi,\eta) v_1(x,y,\xi,\eta) - g_1(\xi,\eta) v_2(x,y,\xi,\eta) \right] ds_{\xi,\eta} -$$

$$-\lambda \sum_{i=1}^{6} \alpha(g_1(x,y)) \kappa_i(x,y)$$

Поскольку выражение

$$u(x,y) - \int\limits_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g_1(\xi,\eta) v_1(x,y,\xi,\eta) - g_1(\xi,\eta) v_2(x,y,\xi,\eta) \right] ds_{\xi,\eta} -$$

равно $W(x,y)$, то из последнего равенства получаем требуемое соотношение (44).

Теперь проверим справедливость выполнения краевого условия (45). Рассмотрим разность

$$W(x,y)|_{\partial\Omega} - L\left(\Delta^2 W(x,y)\right)\big|_{\partial\Omega} = \left[u(x,y) - L\left(\Delta^2 u(x,y)\right)\right]\big|_{\partial\Omega} -$$

$$- \left[\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g_1(\xi,\eta) \left[v_1(x,y,\xi,\eta) - L\Delta^2 v_1(x,y,\xi,\eta) \right] ds_{\xi,\eta} \right] \Bigg|_{\partial\Omega} +$$

$$+ \left[\int\limits_{\partial\Omega} g_1(\xi,\eta) \left[v_2(x,y,\xi,\eta) - L\Delta^2 v_2(x,y,\xi,\eta) \right] ds_{\xi,\eta} \right] \Bigg|_{\partial\Omega} -$$

$$- \sum_{i=1}^{6} \alpha_i(g_1(x,y)) \left[\kappa_i(x,y) - L\Delta^2 \kappa_i(x,y) \right]\big|_{\partial\Omega}$$

Для доказательства граничного условия (45) учитываем, что выполняются следующие граничные равенства при $(x,y) \in \partial\Omega$ и $(\xi,\eta) \in \partial\Omega$:

$$u(x,y) = 0 \tag{49}$$

$$v_1(x,y,\xi,\eta) = LA_L v_1(x,y,\xi,\eta) \tag{50}$$

$$v_2(x,y,\xi,\eta) = LA_L v_2(x,y,\xi,\eta) + \delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta)) \tag{51}$$

$$\kappa_i(x,y) = LA_L \kappa_i(x,y), \quad (i = 1,2,3,4,5,6) \tag{52}$$

где $\delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta))$ дельта-функция Дирака на внешней границе $\partial\Omega$. При выводе соотношений (49)-(52) существенно использовались свойства функции Грина, которые были доказаны в работе [1].

$$\Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta) \Bigg|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = \delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta))$$

$$T_i(x,y,x_0,y_0)|_{(x,y)\in\partial\Omega,(x_0,y_0)\in\Omega_0} = 0, \quad (i = 1,2,3,4,5,6)$$

Из выше сказанного следует, что разность

$$W(x,y)|_{\partial\Omega} - L\left(\Delta^2 W(x,y)\right)\Big|_{\partial\Omega} = -\,L(\lambda u(x,y)+f(x,y))|_{\partial\Omega} + g_1(x,y)|_{\partial\Omega} =$$

$$= -\,L(\lambda u(x,y)+f(x,y))|_{\partial\Omega} + L(\lambda u(x,y)+f(x,y))|_{\partial\Omega} = 0$$

Здесь использовано, что $g_1(x,y) = LA_0(A_0-\lambda I)^{-1} f(x,y) = L(\lambda u(x,y)+f(x,y))$. Справедливость граничного условия (45) доказана.

Теперь проверим справедливость краевого условия (46) на внешней границе $\partial\Omega$. Рассмотрим разность

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} W(x,y)|_{\partial\Omega} - \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} L\left(\Delta^2 W(x,y)\right)\Big|_{\partial\Omega} = \left[\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} u(x,y) - \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} L\left(\Delta^2 u(x,y)\right)\right]\Big|_{\partial\Omega} -$$

$$-\left[\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g_1(\xi,\eta)\left[\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} v_1(x,y,\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} L\Delta^2 v_1(x,y,\xi,\eta)\right] ds_{\xi,\eta}\right]\Bigg|_{\partial\Omega} +$$

$$+\left[\int\limits_{\partial\Omega} g_1(\xi,\eta)\left[\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} v_2(x,y,\xi,\eta) - \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} L\Delta^2 v_2(x,y,\xi,\eta)\right] ds_{\xi,\eta}\right]\Bigg|_{\partial\Omega} -$$

$$-\sum_{i=1}^{6} \alpha_i(g_1(x,y))\left[\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} \kappa_i(x,y) - \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} L\Delta^2 \kappa_i(x,y)\right]\Bigg|_{\partial\Omega}$$

Для доказательства граничного условия (46) учитываем, что выполняются следующие граничные равенства при $(x,y)\in\partial\Omega$ и $(\xi,\eta)\in\partial\Omega$:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} u(x,y) = 0 \tag{53}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} v_1(x,y,\xi,\eta) = \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} LA_L v_1(x,y,\xi,\eta) - \delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta)) \tag{54}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} v_2(x,y,\xi,\eta) = \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} LA_L v_2(x,y,\xi,\eta) \tag{55}$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} \kappa_i(x,y) = \frac{\partial}{\partial \bar{n}_{x,y}} LA_L \kappa_i(x,y), \quad (i=1,2,3,4,5,6) \tag{56}$$

где $\delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta))$ дельта-функция Дирака на внешней границе $\partial\Omega$. При выводе соотношений (53)-(56) существенно использовались свойства функции Грина, которые были доказаны в работе [1].

$$\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = -\delta_{\partial\Omega}((x,y),(\xi,\eta))$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} \Delta_{\xi,\eta} G(x,y,\xi,\eta)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \overline{n}_{x,y}} T_i\left(x,y,x_0,y_0\right)\Big|_{(x,y)\in\partial\Omega,(x_0,y_0)\in\Omega_0} = 0$$

Из выше сказанного следует, что разность

$$W\left(x,y\right)\big|_{\partial\Omega} - L\left(\Delta^2 W\left(x,y\right)\right)\big|_{\partial\Omega} = -\,L\left(\lambda u\left(x,y\right)+f\left(x,y\right)\right)\big|_{\partial\Omega} + g_1\left(x,y\right)\big|_{\partial\Omega} =$$

$$= -\,L\left(\lambda u\left(x,y\right)+f\left(x,y\right)\right)\big|_{\partial\Omega} + L\left(\lambda u\left(x,y\right)+f\left(x,y\right)\right)\big|_{\partial\Omega} = 0$$

Справедливость граничного условия (46) доказана.

Теперь проверим справедливость краевого условия (47) во внутренней точечной границе проколотой области Ω_0. Рассмотрим разность

$$\alpha_1\left(W\right) - 2\alpha_1\left(L\Delta^2 W\right) = \left[\alpha_1\left(u\left(x,y\right)\right) - 2\alpha_1\left(L\left(\Delta^2 u\left(x,y\right)\right)\right)\right] -$$

$$-\int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \overline{n}_{\xi,\eta}} g_1\left(\xi,\eta\right)\left[\alpha_1\left(v_1\left(x,y,\xi,\eta\right)\right) - 2\alpha_1\left(L\Delta^2 v_1\left(x,y,\xi,\eta\right)\right)\right] ds_{\xi,\eta} +$$

$$+\int\limits_{\partial\Omega} g_1\left(\xi,\eta\right)\left[\alpha_1\left(v_2\left(x,y,\xi,\eta\right)\right) - 2\alpha_1\left(L\Delta^2 v_2\left(x,y,\xi,\eta\right)\right)\right] ds_{\xi,\eta} -$$

$$-\sum_{i=1}^{6} \alpha_i\left(g_1\left(x,y\right)\right)\left[\alpha_1\left(\kappa_i\left(x,y\right)\right) - 2\alpha_1\left(L\Delta^2 \kappa_i\left(x,y\right)\right)\right] \tag{57}$$

Для доказательства граничного условия (57) учитываем, что выполняются следующие граничные равенства:

$$\alpha_1\left(u\left(x,y\right)\right) = 0 \tag{58}$$

$$\alpha_1\left(v_1\left(x,y,\xi,\eta\right)\right) = 2\alpha_1\left(LA_L v_1\left(x,y,\xi,\eta\right)\right) \tag{59}$$

$$\alpha_1\left(v_2\left(x,y,\xi,\eta\right)\right) = 2\alpha_1\left(LA_L v_2\left(x,y,\xi,\eta\right)\right) \tag{60}$$

$$\alpha_1\left(\kappa_i\left(x,y\right)\right) = -2\delta_{i1}, \quad \left(i=1,2,3,4,5,6\right) \tag{61}$$

где δ_{i1} - символ Кронекера равен единице, если $i = 1,4$, равен нулю, если $i \neq 1,4$. При выводе соотношений (58)-(59) существенно использовались свойства функции Грина, которые были доказаны в работе [1].

$$\Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) = 0$$

$$\Delta^2_{x,y}\Delta_{\xi,\eta} G\left(x,y,\xi,\eta\right) = 0$$

$$\Delta^2_{x,y}\Delta_{\xi,\eta} T_i\left(x,y,x_0,y_0\right) = 0$$

$$\alpha_1\left(T_i\left(x,y,x_0,y_0\right)\right) = -2\delta_{i1}$$

Из выше сказанного следует, что разность

$$\alpha_1\left(W\right) - 2\alpha_1\left(L\Delta^2 W\right) = -2\alpha_1\left(L\left(\lambda u\left(x,y\right)+f\left(x,y\right)\right)\right) + 2\alpha_1\left(g_1\left(x,y\right)\right) = 0$$

Справедливость граничного условия (47) доказана.

При $j = 2,3,4,5,6$ проверка граничных условий $\alpha_j\left(W\right) - \alpha_j\left(L\Delta^2 W\right) = 0$ проводится точно так же, как проверялось граничное равенство $\alpha_1\left(W\right) - 2\alpha_1\left(L\Delta^2 W\right) = 0$. **Теорема 1 полностью доказана.**

Список литературы

[1] Берикханова Б.Е., Кангужин Б.Е Резольвенты конечномерных возмущенных корректных задач для бигармонического оператора // Уфимский математический журнал, Т - 2, № 1, 2010. - С.17-34.

[2] Крейн М.Г. Теория самосопряженных расширений полуограниченных операторов и ее приложения, 1, II, Матем. сб., 20 (62) (1947), 431-498; 21 (63) (1947), 365-404.

[3] Павлов Б.С. Теория расширений и явнорешаемые модели. // УМН, Т.42, 6(258), 1987. - С.99-131.

G.E. Berikhanov, *Finite-dimensional perturbation Dirichlet problem for biharmonic equation.*

The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №3(70), 3 – 13

In this paper we consider the Dirichlet problem for an inhomogeneous biharmonic equation in a multiply Laplace domain. Calculate the resolvent of this problem.

Г.Е. Берікханова, *Бигармониялық теңдеу үшін шекаралық Дирихле есебінің ақырлы өлшемді ауытқуы.*

ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №3(70), 3 – 13

Мақалада біртекті емес бигармониялық Лаплас теңдеуі үшін көп байланысты облыста Дирихле есебі қарастырылады. Аталған есептің резольвентасы есептелінеді.