

Численное решение обратной задачи идентификации источника методом Фурье

Б.Г. МУКАНОВА

Казахский Национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: balgaisha.mukanova@kaznu.kz

Аннотация

Рассматривается обратная задача идентификации функции источника для уравнения теплопроводности по финальным измерениям температуры. Предполагается, что плотность источников имеет вид произведения $f(x)g(t)$, где функция $f(x)$ неизвестна. Записано необходимое условие минимума функционала невязки в виде системы уравнений, состоящей из прямой и сопряженной задач. Методом Фурье получены аналитические формулы в виде рядов. Эти ряды реализованы численно. В зависимости от характера функции $g(t)$, в ряде примеров удалось восстановить функции источника с точностью, близкой к компьютерной. Быстро осциллирующие и разрывные функции также восстанавливались с удовлетворительной точностью.

Введение

Прямые и обратные краевые задачи для уравнений параболического типа широко используются для математического моделирования диффузионных процессов [1]-[2]. В данной работе мы рассматриваем задачу идентификации правой части для уравнения теплопроводности по финальным измерениям температуры при заданных краевых условиях. Такие задачи естественно формулируются в терминах оптимального управления [3]. Впервые необходимые и достаточные условия оптимальности для этой задачи были получены методами теории управления в работе [4].

В работе [5] неизвестным является также и краевое условие, и для этого случая обосновано применение градиентного метода. В настоящее время метод квазиобращения [6] и метод регуляризации [7] стали общепринятыми для численного решения обратных задач [8]-[10]. При этом исследователи исходят из того, что в задачах оптимального управления градиент функционала может быть выражен через решение соответствующей сопряженной задачи [4],[5],[8]-[13],[14]. Это обстоятельство используется для расчета градиента целевого функционала [8]-[10].

Известно, что необходимое условие оптимальности в ряде случаев позволяет выразить оптимальное управление через решения прямой и сопряженной задач [15]-[18]. Эти же условия порождают связанную систему уравнений, состоящей из этих задач [16]-[18]. Вопросы разрешимости таких систем впервые были рассмотрены в [17],[18] для одномерного квазилинейного параболического уравнения. Более детально свойства решений аналогичных систем, названных квазипараболическими, были впервые исследованы в работе [19].

Решение такой системы (если оно существует), удовлетворяет необходимому условию оптимальности. При условии выпуклости функционала необходимое условие является также достаточным. Условия выпуклости функционала по правой части установлены в [4],[5],[17].

В литературе нам не удалось найти примеров численной реализации метода Фурье для решения системы уравнений, состоящей из прямой и сопряженной задач. В найденных нами линейных примерах решение сопряженной задачи используется лишь для численного построения градиента функционала, а совместное решение прямой и сопряженной задач методом Фурье не проводится [8]-[12].

Обоснование применения метода Фурье для решения обратной задачи для уравнения теплопроводности с неизвестной стационарной правой частью рассматривалось в работе [20]. Теоретические вопросы существования и единственности решения обратных задач для уравнений параболического типа рассматривались также в работе [14]. Работа [14] посвящена систематическому исследованию разрешимости обратной задачи для нестационарной правой части, получены необходимые условия единственности решения обратной задачи, выведена формула градиента функционала невязки и доказана его непрерывность по Липшицу.

В данной работе, в отличие от работ [8]-[12] мы не применяем итерационные методы, а находим искомую функцию из необходимого условия минимума, выражающего равенство нулю первой вариации функционала в точке минимума. Затем строится квазирешение на основе метода Фурье и численно решается обратная задача для нестационарной правой части. Метод позволил нам реализовать большое количество численных примеров и установить эмпирические значения параметров расчета, при котором задача может быть успешно решена численно. Наличие явной формулы для искомой функции через ряды Фурье позволяет детально исследовать полученные решения, что является преимуществом предлагаемого метода.

Постановка обратной задачи

Требуется восстановить пространственную плотность источников тепла $f(x)$ в следующей краевой задаче для уравнения теплопроводности:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + f(x)g(t), x \in (0, 1), t \in (0, T) \\ u(x, 0) = 0, \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) + \mu u(1, t) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где функция $g(t) \in L_2[0, T]$ задана, а функция $f(x) \in L_2[0, 1]$ подлежит определению. При этом известна дополнительная информация (финальные измерения температуры):

$$u(x, T) = u_1(x) \quad (2)$$

Допустим, что выполнены условия согласования

$$u_1'(0) = 0, u_1'(1) + \mu u_1(1) = 0 \quad (3)$$

Известно [20], что решение краевой задачи (1) при каждом $f(x) \in L_2[0, 1]$ и $g(t) \in L_2[0, T]$ существует, единственно в классе $W_2^{2,1}(\overline{Q_T})$ и непрерывно зависит от правой части. Будем решать задачу (1)-(3) методом квазирешения [6], а именно, в качестве приближения к функции $f(x)$ используем решение минимизационной задачи:

$$J[f] = \int_0^1 (u(x, T) - u_1(x))^2 dx + \beta \int_0^1 f^2(x) dx \quad (4)$$

где $u(x, T)$ есть решение задачи (1) для заданной правой части, взятое при $t = T$. Здесь параметр $\beta > 0$ есть регуляризационный параметр [7].

Решение прямой задачи

Для решения минимизационной задачи (4) на решениях прямой задачи (1) - (3) нам понадобится при каждом $f(x)$ получать ее решение. Опуская технические детали, выпишем формулу для решения прямой задачи, полученную методом Фурье:

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} f_k \left[\int_0^t g(s) \exp(\lambda_k^2(s - t)) ds \right] \cos(\lambda_k x), \quad (5)$$

здесь значения λ_k являются положительными корнями уравнения

$$-\lambda_k \sin(\lambda_k) + \lambda \cos(\lambda_k) = 0. \quad (6)$$

Формула (5) будет использована в численных расчетах для синтеза значений $u_1(x) = u(x, T)$.

Необходимое условие минимума

Пусть теперь функция $v(x, t) \in W_2^{2,1}(\overline{Q_T})$ удовлетворяет краевой задаче:

$$\begin{cases} v_t = -v_{xx}, x \in (0, 1), t \in (0, T) \\ v(x, T) = 2(u(x, T) - u_1(x)), \\ v_x(0, t) = 0, v_x(1, t) + \mu v(1, t) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

И пусть функция $f(x)$ такова, что

$$f(x) = -(2\beta)^{-1} \int_0^T v(x, s)g(s)ds \quad (8)$$

Выписывая вариацию функционала J аналогично [17],[4], убеждаемся, что вариация функционала будет равняться нулю для таких функций $f(x)$.

А это означает, что решение рассматриваемой ниже связанной системы уравнений будет удовлетворять необходимому условию минимума функционала - равенству нулю первой вариации:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} - \frac{g(t)}{2\beta} \int_0^T v(x, s)g(s)ds, \\ v_t = -v_{xx}, \quad x \in (0, 1), t \in (0, T) \\ u(x, 0) = 0, \quad v(x, T) = 2(u(x, T) - u_1(x)), \\ u_x(0, t) = 0, u_x(1, t) + \mu u(1, t) = 0 \\ v_x(0, t) = 0, v_x(1, t) + \mu v(1, t) = 0 \end{cases} \quad (9)$$

Разрешимость аналогичной системы уравнений для квазилинейного уравнения теплопроводности была впервые рассмотрена в диссертации [18], затем результаты были обобщены в [19]. Следуя терминологии [17]-[19], мы будем далее называть задачу (9) "завязанной". В [4] было показано, что функционал невязки (4) является выпуклым при $\beta = 0$, а при $\beta > 0$ функционал (4) образован суммой выпуклого и сильно

выпуклого функционала, что гарантирует его сильную выпуклость [16]. Это означает, что существует единственная точка минимума, которая удовлетворяет необходимому условию минимума - равенству нулю первой вариации функционала. С другой стороны, решение задачи (9), если оно существует, вместе с (8) дает функцию $f(x)$, удовлетворяющую необходимому условию минимума. Поэтому эта функция и даст единственное решение задачи минимизации (1)-(4).

Решение "завязанной" задачи методом Фурье

Обращая внимание на то, что задача (9) линейна по отношению к неизвестным функциям $u(x, t), v(x, t)$, применим к ее решению метод Фурье. Представим решение задачи (9) в виде ряда, аналогично (5)

$$u(x, t) = \sum_1^{\infty} u_k(t) \cos(\lambda_k x), \quad v(x, t) = \sum_1^{\infty} v_k(t) \cos(\lambda_k x). \quad (10)$$

Формально подставляем (10) в уравнения (9) и приравниваем коэффициенты при одинаковых k . Получим, следующую двухточечную краевую задачу для каждого k :

$$\begin{cases} u'_k = -\lambda_k^2 u_k - \frac{g(t)}{2\beta} \int_0^T v_k(s) g(s) ds, \\ v'_k = \lambda_k^2 v_k^2, \end{cases} \quad (11)$$

$$u_k(0) = 0, \quad v_k(T) = 2(u_k(T) - b_k) \quad (12)$$

где b_k есть коэффициенты разложения Фурье измеренной функции $u_1(x)$:

$$u_1(x) = \sum_1^{\infty} b_k \cos(\lambda_k x). \quad (13)$$

Решая задачу (11)-(12), получаем, что функции $v_k(t), u_k(t)$, выражаются по формулам

$$v_k(t) = v_k(T) \exp(-\lambda_k^2(T-t)) = 2(u_k(T) - b_k) \exp(-\lambda_k^2(T-t)). \quad (14)$$

$$u_k(t) = -\frac{\eta_k}{2\beta} v_k(T) \int_0^T g(s) \exp(\lambda_k^2(s-t)) ds, \quad (15)$$

где мы введем обозначение

$$\eta_k = \int_0^T \exp(-\lambda_k^2(T-s)) g(s) ds. \quad (16)$$

Записывая (14), (15) при $t = T$ и подставляя в краевое условие (12), получаем линейное уравнение для определения $u_k(T)$, решение которого имеет вид:

$$u_k(T) = \eta_k^2 b_k / (\beta + \eta_k^2) \quad (17)$$

Зная $u_k(T)$, $k = 1, \dots, M$, мы можем вычислить $v_k(T)$, $k = 1, \dots, M$ по формуле (14) и по формулам (8), (10) приближенно рассчитать $f(x)$:

$$f(x) = -\frac{1}{2\beta} \int_0^T v(x, s)g(s)ds \approx -\frac{1}{2\beta} \sum_1^M \cos(\lambda_k x) \int_0^T v_k(s)g(s) = \sum_1^M \frac{b_k \eta_k \cos(\lambda_k x)}{\beta + \eta_k^2} \quad (18)$$

Устремляя в формуле (18) параметр β к нулю, учитывая обозначение (16), мы получаем формулу для искомой функции в отсутствие регуляризующего слагаемого в функционале невязки:

$$f(x) = \sum_1^M b_k \cos(\lambda_k x) / \eta_k \quad (19)$$

5 Численные результаты

Была исследована точность численного решения обратной задачи, получаемой по формуле (18) или (19) в зависимости от числа гармоник M , значения T , параметра β , а также для разных функций $g(t)$. Изложенный выше метод был реализован для значений параметра $\mu = 1$ в краевом условии (1). Мы рассмотрели случаи, когда функция источника имеет локализованный по пространству характер, либо моделируется несколькими локализованными во времени и пространстве источниками и может быть не гладкой. Предложенный алгоритм решения задачи был реализован в пакете Mathcad. Для синтеза измеренных данных по формуле (5) мы ограничились числом гармоник равным 40. Относительное изменение синтезированного решения в равномерной норме при дальнейшем увеличении числа гармоник до 50 для описанного ниже варианта а) не превысило 1.610^{-7} . Расчеты показали также, что если функция $g(s)$ в среднем не слишком мала, то допустимо принять значение параметра $\beta = 0$, т.к. уменьшение параметра вело к систематическому уменьшению невязки (4).

Мы рассмотрели варианты функцию $f(x)$, задаваемые следующими аналитическими выражениями:

$$a) f(x) = A \sum_{j=0}^M \psi\left(\frac{x - x_j}{\delta}\right), \text{ где } \psi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

для значений параметров $\delta = 0.2$, $x = 0.2j$, $j = 0, 1, \dots, 4$

$$b) f(x) = 2 \sum_{j=0}^1 \exp\left(-\left(\frac{x - x_j}{\delta}\right)^2\right),$$

для значений параметров $x_1 = 0.3$, $x_2 = 0.7$, $g(t) = 1 + t^2$, $T = 0.5$.

Относительную ошибку восстановления мы рассчитывали по формуле:

$$\varepsilon = \|f_{recovered} - f_{exact}\|_2 / \|f_{exact}\|_2. \quad (20)$$

Квадратичную норму в (20) мы рассчитывали численно на сетке с шагом $1/128$. Наилучшие результаты были получены, когда функция $g(t)$ "не слишком мала особенно в случае,

если она может быть отделена по модулю от нуля величиной порядка 1. На рисунке 1 показан результат расчета в варианте а) для $T = 0.5, \beta = 0$. Здесь относительная ошибка в норме $L_2[0, 1]$ при восстановлении составила 0.175. Здесь мы взяли $g(t) = t^2$, аналогичный результат получается при $g(t) = 1 + t^2$.

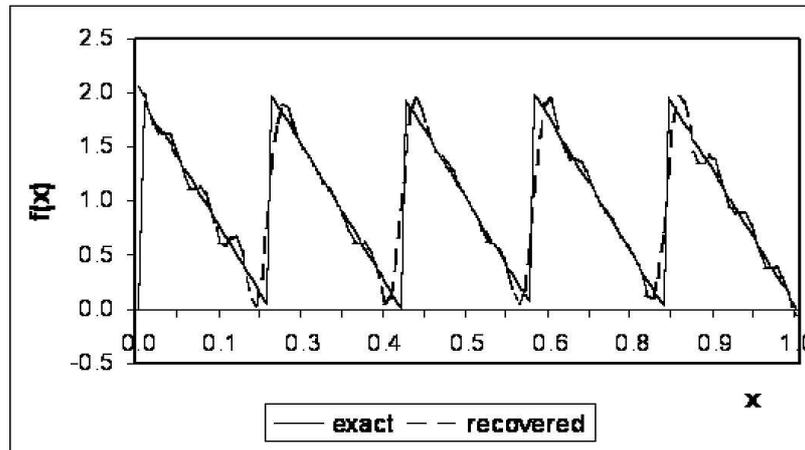


Рис. 1. Восстановление пилообразной функции

В варианте б) функция гладкая и качество восстановления для функций $g(t)$ не обращающихся в нуль, оказалось значительно лучше. В этом случае относительная ошибка восстановления в норме $L_2[0, 1]$ составила 6.8×10^{-5} . Мы не стали показывать эти результаты на рисунке, так как во всех случаях гладкой $f(x)$ и "не слишком малой" $g(t)$ результат восстановления визуально не отличается от искомой функции. Вариант б) был рассчитан также для случая $g(t) = t^2$. В этом случае нам потребовалось принять $\beta > 0$. На рисунке 2 показан результат расчета с $\beta = 5 \times 10^{-9}$, 5×10^{-8} , дальнейшее уменьшение параметра привело к численным осцилляциям в решении.

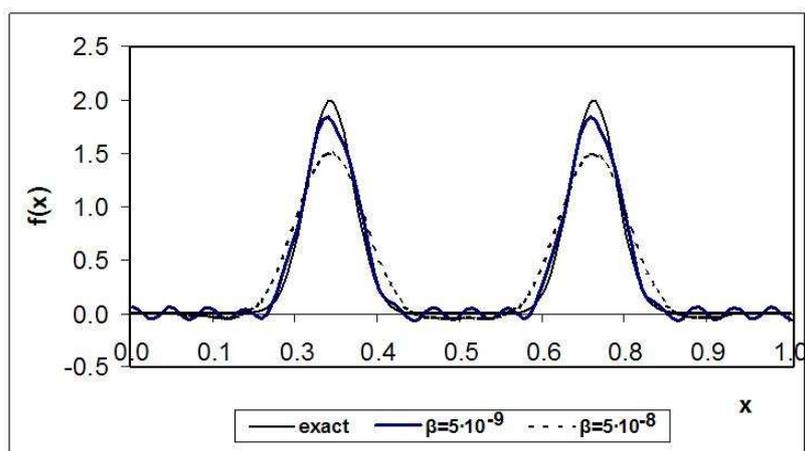


Рис. 2. Восстановление функции, с $g(t) = t^2$.

Был рассмотрен также случай со знакопеременной функцией $g(t) = \cos(\pi t)$, $T = 1$, $\beta = 0$ для варианта б). Ошибка восстановления функции $f(x)$ составила $\varepsilon = 9 \times 10^{-5}$ для

$T=1$ и $\varepsilon = 2 \times 10^{-4}$ для $T=0.5$. Вариант, когда промежуток времени между финальным наблюдением и начальным мал, оказался весьма неблагоприятным. На рисунке 3 показан результат расчета для случая $g(t) = 1 + t^2$, $T = 0.01$, $\beta = 0$ и $\beta = 5 \times 10^{-8}$. Ошибка восстановления при этом составила 0.1 и 0.4 соответственно, тогда как при $T = 1$ составляла всего лишь 6.8×10^{-5} .

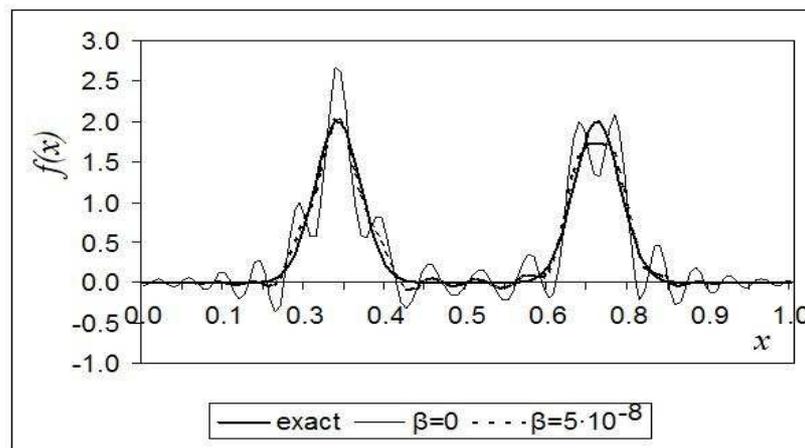


Рис. 3. Восстановление $f(x)$ при $T = 0.01$.

Самым неблагоприятным для восстановления оказались варианты, когда функция $g(t)$ была в среднем близка к нулю или обращалась в нуль на некотором подинтервале $(0, 1)$. Результат в этом случае зависели также от выбора $f(x)$, как в описанных выше примерах на рисунках 1 и 2 с $g(t) = t^2$. В этих случаях не всегда удавалось получить удовлетворительное численное решение даже с $\beta > 0$. Например, не удалось получить приемлемого результата для $g(t) = 2 \exp(-((t - 0.5)/0.05)^2)$ ни при одном разумном выборе β . Таким образом, если исключить из рассмотрения варианты с обращающейся в нуль, либо с малой $g(t)$, а также варианты с малым значением времени T , то описанный здесь метод Фурье решения обратной задачи дает достаточно точные результаты. Поэтому метод может быть рекомендован для решения рассмотренной задачи и широкого круга функций $f(x) \in L_2[0, 1]$ как альтернатива или дополнение к широко применяемым в настоящее время градиентным методам.

Благодарности. Автор выражает свою признательность участникам городского семинара г. Алматы "Теория линейных операторов и ее приложения" за полезное обсуждение и ценные замечания.

Список литературы

- [1] Алифанов О.М. Обратные задачи теплообмена.-М.: Машиностроение, 1988.- 280 с.
- [2] Бек Дж., Блакуэлл Б., Сент-Клэр Ч. Некорректные обратные задачи теплопроводности. - М.: Мир, 1989. - 309 с.

- [3] Лионс Ж.-Л. *Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.* - М.: Мир, 1972. - 416 с.
- [4] Егоров А.И. *Об условиях оптимальности в одной задаче управления процессом теплопроводности.* // Жур. вычис. матем. и матем. физики. - 1972- Т.12, №3, - С. 791-799.
- [5] Hasanov A., *Simultaneous determination of source terms in a linear parabolic problem from the final overdetermination: weak solution approach* // *J Math. Anal. Appl.* - 2007, v. 330. - P. 766-779.
- [6] Иванов В.К. *О некорректно поставленных задачах* // Матем. сборник, 1963 - Т.61. - №2. - С. 211-223.
- [7] Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач.* - М.: Наука, 1974. - 142 с.
- [8] Jingzhi Li, Jianli Xie and Jun Zou. *An adaptive finite element reconstruction of distributed fluxes.* // *Inverse Problems*, 2011.- Vol. 27, - P. 1-25.
- [9] Xie J and Zou J 2005 *Numerical reconstruction of heat fluxes* // *SIAM J. Numer. Anal.* - Vol. 43, - P. 1504-1535.
- [10] Zabaras N and Liu J, *An analysis of two-dimensional linear inverse heat transfer problems using an integral method* // *Heat Transfer*, 1988.- Vol. 13, - P. 527-33.
- [11] А.А. Самарский, П.Н. Вабищевич, В.И. Васильев. *Итерационное решение ретроспективной обратной задачи теплопроводности* // *Математическое моделирование*, 1997. - Т. 5, № 5, - С. 119-127.
- [12] П.Н. Вабищевич. *Численное решение задачи идентификации правой части параболического уравнения.* // *Известия вузов*, 2003.- Т. 488, №1- С.30-37.
- [13] A.Hasanov, P.Duchateau and B. Pektas. *An adjoint problem approach and coarse-fine mesh method for identification of the diffusion coefficient in a linear parabolic equation.* *Journal of Inverse and Ill-posed Problems.* // 2011,- Vol. 14, Iss.5 - P. 435-463.
- [14] Alemdar Hasanov, Muhtarbay Otelbaev and Bakytzhan Akpayev, *Inverse heat conduction problems with boundary and final time measured output data* // *Inverse Problems in Science and Engineering*, 2011. - Vol. 19, № 7 - P. 985-1006.
- [15] Л.С.Понтрягин. В.Г.Болтянский, Р.В.Гамкрелидзе, Е.Ф.Мищенко. *Математическая теория оптимальных процессов.* - М.: Наука, 1983. - 393 с.
- [16] Васильев Ф.П. *Лекции по методам решения экстремальных задач* // *Изд-во Московского университета.* - 1974. - 374 с.
- [17] Б.Д. Тажибаев, *Об условиях оптимальности в одной задаче управления.* // *Управляемые системы.* - Новосибирск, 1988 - вып. 28, - С. 65 - 78.

- [18] Б.Д. Тажигаев, *Задачи оптимального управления для параболических уравнений: Канд. диссертация: 01.01.02 // Новосиб. ун-т, 1990 - 80 с.*
- [19] В. С. Белоносов, *Внутренние оценки решений квазипараболических систем. // Сиб. матем. журн, 1996. - Т. 37, №1 - С.20-35.*
- [20] Калиев И.А., Сабитова М.М. *Задачи определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам // Сибирский журнал индустриальной математики.- 2009.- Т.12, № 1.- С. 89-97.*
- [21] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уралъцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - М.:Наука, 1967, - 736 с.*

B.G.Mukanova, Numerical solution of a source identification problem by Fourier method The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №3(70), 14 – 22

A source identification problem for heat transfer equation in the case of given final observation data is considered. The source density has the form $f(x)g(t)$, where the function $g(t)$ is given, and the function $f(x)$ is to be determined. The necessary condition of the minimum of the residual functional, which consists of related direct and adjoint problem, is written. The analytical representation of the solution in the form of Fourier series is obtained. Then the series are calculated numerically. In several cases depending on the behavior of the function $g(t)$ a recovery of the unknown solution have been obtained with machine accuracy. Discontinuous and oscillating functions are recovered with sufficiently accuracy as well.

Б.Г. Муканова, Жылу көзді табу кері есебін Фурье амалымен сандық түрде шешу, ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №3(70), 14 – 22

Жылу өткізгіш теңдеуі үшін соңғы уақыттағы өлшемдер арқылы жылу көздерін анықтауға арналған кері есеп қарастырылған. Жылу көздерінің тығыздығы $f(x)g(t)$ түрде қабылданған, және $f(x)$ функциясы белгісіз. Қате функционалының қажетті минимум шарты тура және түйіндес есептерден тұратын жүйе арқылы жазылған. Фурье амалы негізінде қатар түрдегі аналитикалық шешімдер алынған. Бұл қатарлар сандық түрде жуықтап есептелген. Есептеу нәтижесі $g(t)$ функцияның түріне тәуелді және кейбір жағдайларда компьютерлік дәлдікпен есептелген. Жылдам осцилляциялық және секірмелі функциялар да қанағаттандырылғық дәлдікпен табылған.