Два класса условно-корректных задач для параболической системы

С.Е. Темирболат

Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы

Аннотация

Путем анализа граничных условии двух типов из числа многомерных задач для параболических по Петровскому систем выделяются некорректно поставленные, затем они сводятся к классу условно-корректных.

В работе исследуются многомерные начально-краевые задачи для параболической по Петровскому системы с граничными условиями с производными по времени и по пространственным переменным первого порядка. Из них выделяются некорректно поставленные, затем они сводятся к классу условно-корректных.

Разобран пример для системы из трех уравнений.

Дана в области $D = (t > 0,\ x > 0,\ y \in R^n,\ n \geq 3)$ параболическая по Петровскому система $U_t = A_0 \Delta U$ с матрицей простой структуры и оператором Лапласа $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$. Система легко приводится к диагональной форме

$$U_t = diag(\lambda_j)\Delta U,\ \ \lambda_j > 0,\ \ j = 1 : N,\quad N \geq 3. \tag{1}$$

Сформируем объект исследования:

Найти вектор $U \in C^{1,2}(D) \bigcap C^{1,1}(\overline{D})$, удовлетворяющий системе (1), однородному начальному условию

$$U(0, x, y) = 0,\quad x > 0,\quad y \in R^n \tag{2}$$

и граничному условию при $x = 0$

$$M\,(\partial) \equiv CU_t + AU_x + BU_y + DU = \varphi(t, y),\ t > 0,\ y \in R^n, \tag{3}$$

где ∂ – матрицы $B = (B_1, ..., B_n)$; U и $\varphi \in C^{1,1}(\overline{D})$ имеют размеров $N \times N$; и $N \times 1$ соответственно, при этом требуется выполнение условия невырожденности граничных данных

$$rang\,\|C, A, B, D\| = N. \tag{4}$$

Цель исследования:

1° Указать условие (H), при котором нарушается у задачи (1)-(3) однозначная разрешимость, тем самым, выделить некорректно-поставленные задачи.

2° Сделать выделенные задачи условно-корректными. Это значит написать условии разрешимости (У.Р.) и найти обобщенное решение $U_{\text{Н}}$, для которого справедливы система (1), начальное условие (2), а при $x = 0$ достигается минимум невязки

$$\min_H \|M(\partial)U - \varphi\| = \|M(\partial)U_{\text{Н}} - \varphi\|\,. \tag{3'}$$

Сформулируем ряд замечаний, необходимые в дальнейшем.

1. Условие (3) делим на два вида т.е. рассмотрим два класса задач

   i) если $C \equiv \phi$ (нулевая), то (1)-(3) назовем задачей с производными по пространственным переменным;

   ii) если $C \neq \phi$, то (1)-(3) становится задачей с производной по времени.

2. В случае i) требуется проверить условие дополнительности, а при ii) такое условие не имеет смысла.

3. В задачах i)достаточно изучить их главную часть, составленной путем выделения из каждой строки (1), (3) старших производных.

4. Предлагаемая методика [1] одинакова пригодна всем типам задач.

5. Пусть вектор-функциям U и φ применимы интегральные преобразования Фурье-Лапласа, такие множества обозначим через U_n и φ_n.

6. Будем говорить, что такая-то матрица из граничного условия преобладает, если ее ранг равен числу N, а ранги остальных матриц не более, чем $N-1$.

Основным результатом анализа граничных условии является следующая

Теорема 1 *а) Пусть $C \equiv \phi$, тогда задачи, когда преобладает матрица D (первая краевая) или матрица A (третья краевая) однозначно разрешимы, а задачи с касательными производными (преобладает B) некорректны.*

б) Остальные типы задач (в том числе задачи с производными по времени и с наклонными производными) могут быть однозначно разрешимы или некорректными в зависимости от набора элементов матриц, определяющих тип задач.

Доказательство. Применив к (1)-(3) интегральные преобразования Лапласа ($\Lambda_t^+(p)$) и Фурье ($\Phi_y^+(\omega)$) придем к краевой задаче для ОДУ второго порядка по x

$$\vartheta_j'' = \left(\frac{p}{\lambda_j} + \omega^2\right)\vartheta_j,\ x > 0,\ \omega^2 = \sum_{j=1}^{n} \omega_j^2,\ \vartheta_j \equiv \tilde{u}_j\left(p, x, \omega\right), \tag{5}$$

$$M(d_x) \equiv AV_x + (pC + i\mathrm{B} * \omega + D)\, V = \tilde{\varphi}(p, \omega) \text{ при } x = 0, \tag{6}$$

где $B*$ матрицы размеров $n \times N$.

Беря часть фундаментальной матрицы решений

$$\tilde{\phi}(x) = diag(e^{-x\sigma_j}), \quad \sigma_j = \sqrt{\frac{p}{\lambda_j} + \omega^2}, \quad j = 1 : N,$$

напишем общее ограниченное решение системы (5)

$$V(p, x, \omega) = \tilde{\phi}(x)\tilde{C}(p, \omega), \quad \tilde{C} = (\tilde{C}_1, \ldots, \tilde{C}_N). \tag{7}$$

В силу граничного условия (6) получаем СЛАУ

$$F\tilde{C} = \tilde{\varphi}, \quad F = M\,(d_x)\,\tilde{\phi}(0). \tag{8}$$

Для некорректности необходимо, чтобы имело место условие (равенство)

$$H: \quad \Delta(p,\omega) \equiv \det\ F = |F| = 0, \tag{9}$$

а существование у равенства (9) хотя бы одного p-корня с положительной реальной частью является достаточным условием, причем если $Rep \le a_0$, то нарушается условие устойчивости, а если $Rep \gg 1$ (неограничена), то - однозначная разрешимость [1]. Естественно когда $|F| \neq 0$ задача однозначно разрешима.

Введем множество нулей

$$P_0 = \left\{p_s/\Delta(p_s,\omega) = 0, \ \text{ при этом } \ Rep_s \gg 1\right\}.$$

Теперь анализируем задачи, указанные в теореме 1.

Первая краевая задача, это когда $A = B = \phi$, а $rangD = N$, тем самым $|F| = |D| \neq 0$.

При третьей задаче $B = \phi$, $rang\ A = N$, $D-$любая, потому

$$|F| = \left|d_x\tilde{\phi}(0)\right| = |\sigma_j I| \neq 0, \ \ (A = I).$$

В задачах с касательными производными достаточно полагать $A \equiv \phi$, $rang\,B = N$, $D-$любая, следовательно имеем $|F| = i\omega\,|B*| = 0$ при $\omega = 0$, для любых p.

Итак, утверждение а) доказано.

б) Пусть имеет место следующее условие о рангах

$$rang(A,B) = 1, \quad rang(A,B,D) = N, \tag{4'}$$

которое входит в (4).

Значит A и B_j-векторы строки, D-квадратная матрица. Теперь (3) можно переписать в виде [2]

$$A'U\,(t,0,y) = \varphi\,(t,y)\,, \ \ t > 0, \ \ x = 0, \ \ y \in R^n \tag{10}$$

$$\left(b^{(0)}, U_x\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(b^{(k)}, U_{y_k}\right) + (b,U) = \varphi_N(t,y), \tag{11}$$

где векторы такие $\varphi = (\varphi_1,...,\varphi_{N-1})$, $b = (b_{N_1},...,b_{NN})$, $b^{(k)} = \left(b_1^{(k)},...,b_N^{(k)}\right)$, $k = 0:n$; $rang(A') = N-1$, а размер ее $A'(N-1)\times N$.

Здесь присутствуют два типа независимых задач.

Задача А. Пусть дано условие при $x = 0$ в виде

$$u_k + a_k u_N = \varphi_k(t,y), \quad k = 1:N-1 \tag{3.1'}$$

$$\left(b^{(0)}, U_x\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(b^{(k)}, U_{y_k}\right) + (b,U) = \varphi_N(t,y). \tag{12}$$

Условие (12) представляет задачу с наклонной производной, а если положим $b^{(k)} = 0$ для всех $k = 1 : n$, то задача относится к типу с нормальной производной, но матрица $b^{(0)}$ не преобладает.

Задача Б. Граничные равенства имеют вид

$$u_j(t,0,y) = \varphi_j(t,y), j = 1 : S; \;\; u_k + a_k u_N = \varphi_k(t,y), \;\; k = S+1 : N \tag{3.1''}$$

условие (12) остается без изменения.

Определив первые S компоненты с помощью потенциалов двойного слоя $\phi_{2\lambda_j}(\varphi_j, x)$ с плотностью φ_j можно уменьшить размер задачи

$$\partial_t u_j = \lambda_j \Delta u_j, \;\; u_j(0,x,y) = 0, \quad j = 1 : N_0, \quad N_0 < N,$$

$$u_j + a_j \; u_{N_0} = \varphi_j(t,y), \quad j = 1 : (N_0 - 1),$$

$\sum_{k=1}^{n} \left(b^{(k)}, U_{y_k}\right) + (b,U) = \varphi_{N_0}(t,y)$ при $x = 0$.

Далее после линейной замены

$$u_j = \phi_{2,\lambda_j}(\varphi_j, x) - a_j u_{N_0}, \quad j = 1 : (N_0 - 1) \;\text{ и }\; u_{N_0} = u_{N_0}$$

последняя преобразуется к задаче с касательной производной для одного уравнения теплопроводности. Тем самым, задача Б относится к группе а) из теоремы 1.

Задача В. В случае $C = 0$ к каждому из перечисленных граничных условий добавляется элемент вида (C, U_t'). Полученные, таким образом, задачи именуем через АТ и БТ. Задачи типа БТ изучены в ранних работах. Таким образом, далее изучаем задачи А и АТ.

Добавим к системе (5) граничные равенства, у которых первые $(N-1)$ равенства совпадают и имеют вид

$$\vartheta_k + a_k \vartheta_k = \varphi_k(p,\omega), \;\; k = 1 : \;\; (N-1). \tag{13}$$

Укажем отличающиеся последние равенства.

Задача "А": • с наклонной производной

$$\left(b^{(0)}, V_x\right) + i\,(B^*\omega, V) = \varphi_N(p,\omega), \tag{14}$$

где $B^* = \left(b^{(1)}, \ldots, b^{(n)}\right)$ – матрицы размеров $n \times N$.

• с нормальной производной

$$\left(b^{(0)}, V_x\right) = \varphi_N(p,\omega). \tag{15}$$

Задача "АТ":

$$\begin{cases} (C,V)\,p + \left(b^{(0)}, V_x\right) + i\,(B^*\omega, V) = \varphi_N(p,\omega) \\ (C,V)\,p + \left(b^{(0)}, V_x\right) = \varphi_N(p,\omega) \end{cases}, \tag{14.т}$$

Из граничных равенств сперва, в силу общего решения (7), получаем СЛАУ относительно $\tilde{C}_j$, а затем путем метода исключения из них придем соответственно к иррациональным уравнениям:

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \left[b_k^{(0)} \sigma_k + i\,(b_k^*, \omega) \right] \tilde{C}_N = \tilde{f}\,(p,\omega)\,, \tag{14'}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N} a_k b_k^{(0)} \sigma_k\right) \tilde{C}_N = \tilde{f}\,(p,\omega)\,, \tag{15$'$}$$

$$\left\{\left(-p\sum_{k=1}^{N}\left(C^{(k)},a\right)\right) + \sum_{k=1}^{N} a_k \left[b_k^{(0)}\sigma_k + i\,(b_k^*,\omega)\right]\right\} \tilde{C}_N = \tilde{f}\,(p,\omega)\,, \tag{14$'$.т}$$

$$\left\{\left(-p\sum_{k=1}^{N}\left(C^{(k)},a\right)\right) + \left(\sum_{k=1}^{N} a_k b_k^{(0)}\sigma_k\right)\right\} \tilde{C}_N = \tilde{f}\,(p,\omega)\,, \tag{14$'$.т}$$

здесь $C^{(k)} = (C_{k1},\dots,C_{kN})$ – вектор-строки матрицы C, $a = (a_1,\dots,a_{N-1},-1)$ – вектор коэффициент, $b_k^* = \left(b_k^1,\dots,b_k^{(n)}\right), k = 1:N$.

Теперь ищем p-корни у множителя коэффициента $\tilde{C}_N$. Разберем самое сложное выражение (14$'$.т)

$$\sum_{k=1}^{N} a_k \left[b^{(0)}\sigma_k + i\,(b_k^*,\omega)\right] = p\sum_{k=1}^{N}\left(C^{(k)},a\right). \tag{16}$$

В частности, в правой части оставив один вектор $C^{(k_0)}$, подберем его ортогональным к вектору a: т.е. $\left(C^{(k_0)},a\right) = 0$; затем найдем p–корни равенства

$$\sum_{k=1}^{N} a_k b_k^{(0)}\sigma_k = 0, \tag{17}$$

теперь достаточно указать вектор $b_{\bar{k}}^*$ ортогональный вектору $\bar{\omega}$, присутствующему в корнях (17). Доказательство теоремы завершено. □

Пример $(N = 3)$:

$$u_t = a\Delta u,\quad \upsilon_t = b\Delta\upsilon,\quad w_t = c\Delta w,\quad 0 < a < b < c < \infty, \tag{1$'$}$$

$$U(0,x,y) = 0,\quad x > 0,\quad y \in R^n, \tag{2$'$}$$

$$u + a_1 w = \varphi_1,\quad \upsilon + a_2 w = \varphi_2,\quad (b^{(0)},U_x) = \varphi_3(t,y), t > 0, x = 0, y \in R^n. \tag{3$'$}$$

Здесь $A = b^{(0)} = (b_1,b_2,b_3)$, $C \equiv B_k \equiv \phi$, $rangD = 2$, $rangM = rang\,\|A,D\| = 3$.

Нет преобладающей матрицы, задача относится к типу с нормальной производной.

Задаче для ОДУ

$$\tilde{u}'' = \lambda_a\tilde{u},\quad \tilde{\upsilon}'' = \lambda_b\tilde{\upsilon},\quad \tilde{w}'' = \lambda_c\tilde{w},\quad x > 0,\quad \lambda_a = \sqrt{\frac{p}{a} + \omega^2} \tag{5$'$}$$

$$\tilde{u} + a_1\tilde{w} = \varphi_1,\quad \tilde{\upsilon} + a_2\tilde{w} = \varphi_2,\quad \left(b^{(0)},\tilde{u}'\right) = \tilde{\varphi}_3 \text{ при } x = 0 \tag{6$'$}$$

отвечает СЛАУ:

$$\tilde{c}_1 + a_1\tilde{c}_3 = \tilde{\varphi}_1,\quad \tilde{c}_2 + a_2\tilde{c}_3 = \tilde{\varphi}_2,\quad b_1\lambda_a\tilde{c}_1 + b_2\lambda_b\tilde{c}_2 + b_3\lambda_c\tilde{c}_3 = -\tilde{\varphi}_3. \tag{8$'$}$$

Равенство

$$\alpha\lambda_a + \beta\lambda_b = b_3\lambda_c,\quad \alpha = a_1b_1,\ \beta = a_2b_2 \tag{9$'$}$$

определяет условие некорректности. Из него придем к квадратному уравнению

$$Ap^2 + 2B\omega^2 p + C\omega^4 = 0$$

с коэффициентами

$$A = \lambda^2 - 4\frac{\beta^2 b_3^2}{bc}, \quad B = \gamma\lambda - \frac{\beta^2 b_3^2}{bc}(b+c), \quad C = \gamma^2 - 4\beta^2 b_3^2,$$

где $\gamma = \alpha^2 - \beta^2 - b_3^2$, $\lambda = \frac{\alpha^2}{a} - \frac{\beta^2}{b} - \frac{b_3^2}{c}$.

Находим p-корни

1° при $A = 0$ имеем $(p, 0)$;

2° при $C = 0$ имеем $p_1 = 0, \; p_2 = -2B\omega^2/A$;

3° при $B = 0$ имеем $p = \omega^2\sqrt{-C/A}$;

4° при $ABC \neq 0$ имеем $p_{1,2} = \omega^2\left(-B \pm \sqrt{D}\right)/A, \quad D = B^2 - AC$.

Напишем множество корней иррационального уравнения (9')

$$\mathrm{P}_0 = \begin{cases} p - \text{любое}, \;\; \omega = 0, \;\; \text{если} \;\; \frac{\alpha}{\sqrt{a}} + \frac{\beta}{\sqrt{b}} = \frac{b_3}{\sqrt{c}}; \\ p = -2\beta\omega^2/A, \;\; \omega \neq 0, \;\; \text{когда} \;\; \alpha\beta A < 0, \;\; (\alpha-\beta)^2 = b_3^2; \\ p = \omega^2\sqrt{-C/A}, \;\; \omega \neq 0, \quad \text{когда} \;\; AC < 0 \;\; \text{и} \;\; B = 0; \\ p = -B\omega^2/A, \quad \omega \neq 0, \quad \text{когда} \quad AB < 0. \end{cases}$$

Условие Н - корневого типа [1].

Теорема $1'$. Задача (1')-(3') - некорректна на множество P_0.

Продолжим изучение задачи беря одно из условии множества P_0, а именно, пусть $H: \left(\frac{a_1 b_1}{\sqrt{a}} + \frac{a_2 b_2}{\sqrt{b}} = \frac{b_3}{\sqrt{c}}; \;\; \omega = 0, \;\; p - \text{любое}\right)$, тогда имеем задачу

$$\tilde{u}'' = \sqrt{\frac{p}{a}}\tilde{u}, \quad \tilde{v}'' = \sqrt{\frac{p}{b}}\tilde{v}, \quad \tilde{w}'' = \sqrt{\frac{p}{c}}\tilde{w}, \;\; x > 0 \tag{5''}$$

$$\tilde{u} + a_1\tilde{w} = \tilde{\varphi}_1, \quad \tilde{v} + a_2\tilde{w} = \tilde{\varphi}_2, \;\; \left(b^{(0)}, \tilde{u}'\right) = \tilde{\varphi}_3(p, 0) \;\; \text{при} \;\; x = 0 \tag{6''}$$

и соответствующей ей СЛАУ:

$$\tilde{C}_1 + a_1\tilde{C}_3 = \tilde{\varphi}_1, \quad \tilde{C}_2 + a_2\tilde{C}_3 = \tilde{\varphi}_2, \;\; b_1\sqrt{b}\tilde{C}_1 + b_2\sqrt{a}\tilde{C}_2 + \left(a_1 b_1\sqrt{b} + a_2 b_2\sqrt{a}\right)\tilde{C}_3 = -\sqrt{\frac{ab}{p}}\tilde{\varphi}_3.$$

При условии разрешимости

$$\frac{b_1}{\sqrt{a}}\tilde{\varphi}_1(p, 0) + \frac{b_2}{\sqrt{b}}\tilde{\varphi}_2(p, 0) = -\tilde{\varphi}_3(p, 0)/\sqrt{p} \tag{У.Р.}$$

СЛАУ имеет "нормальное решение"

$$\tilde{C}_1^H = \frac{(1 + a_2^2)\,\tilde{\varphi}_1 - a_1 a_2\tilde{\varphi}_2}{\delta}, \;\; \tilde{C}_2^H = \frac{(1 + a_1^2)\,\tilde{\varphi}_2 - a_1 a_2\tilde{\varphi}_1}{\delta}, \;\; \tilde{C}_3^H = \frac{\tilde{a}_1\tilde{\varphi}_1 + \tilde{a}_2\tilde{\varphi}_2}{\delta},$$

где $\delta = 1 + a_1^2 + a_2^2 \neq 0$.

Ему отвечает "нормальное решение" краевой задачи

$$\tilde{u}_H = \tilde{C}_1^H \ell^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}, \quad \tilde{v}_H = \tilde{C}_2^H \ell^{-x\sqrt{\frac{p}{b}}}, \quad \tilde{w}_H = \tilde{C}_3^H \ell^{-x\sqrt{\frac{p}{c}}}, \tag{7'}$$

удовлетворяющее системе $(5'')$ и граничному условию $(6'')$, когда имеют место условия Н и (У.Р).

Исходя из нестандартных вычислении [1].

1. $\tilde{\varphi}(p,0) \overset{\bar{p}(t)}{\Rightarrow} \tilde{\varphi}(t,0) \underset{\Phi_y^+(0)}{\overset{\Delta}{\Rightarrow}} \int\limits_{R^n} \varphi(t,y)\ell^{i(\omega,y)}dy\,|_{\omega=0} = \int\limits_{R^n} \varphi(t,y)dy = \varphi^0(t),$

2. $\frac{\tilde{\varphi}(p,0)}{\sqrt{p}} \overset{\bar{p}(t)}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\bar{\varphi}(\tau,0)d\tau}{\sqrt{t-\tau}} \underset{\Phi_y^+(\omega)}{\overset{\Delta}{\Rightarrow}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_R dy \int_0^t \frac{\varphi(\tau,y)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau$

напишем оригинал (У.Р) в виде

$$\frac{b_1}{\sqrt{a}}\varphi_1(t,y) + \frac{b_2}{\sqrt{b}}\varphi_2(t,y) = \frac{-1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\varphi_3(\tau,y)}{\sqrt{t-\tau}} d\tau = -\partial_t^{1/2}\varphi_3(t,y). \tag{У.Р'}$$

В силу формулы обращения

$$\ell^{-x\sqrt{\frac{p}{a}}}\tilde{\varphi}(p,0) \Rightarrow -2a\partial_x \int_0^t \varphi^0(\tau)\mathrm{E}_a(t-\tau,x)\,d\tau \equiv q_a\left(\varphi^0\right),$$

здесь $\mathrm{E}_a(t,x)$ – фундаментальное решение одномерного уравнения теплопроводности, определим оригинал нормального решения (7')

$$\begin{aligned} u_H(t,x,y) &= \frac{1+a_2^2}{\delta} q_a\left(\varphi_1^0\right) - \frac{a_1a_2}{\delta} q_a\left(\varphi_2^0\right), \\ v_H(t,x,y) &= \frac{1+a_1^2}{\delta} q_b\left(\varphi_2^0\right) - \frac{a_1a_2}{\delta} q_b\left(\varphi_2^0\right), \\ w_H(t,x,y) &= \frac{a_1}{\delta} q_c\left(\varphi_1^0\right) + \frac{a_2}{\delta} q_c\left(\varphi_2^0\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Легко проверить, что нормальное решение (18) удовлетворяет системе $(1')$, начальному условию $(2')$, а так же справедливости равенств:

$$q_a\left(\varphi^0\right)|_{x=0} = \varphi^0(t) \quad \text{и} \quad \partial_x q_a\left(\varphi^0\right)|_{x=0} = \partial_t^{1/2}\left(\varphi^0(t)\right)/\sqrt{a}.$$

С учетом условии H и (У.Р') вычислим граничные равенства

$$u_H + a_1 w_H = \varphi_1^0(t), \quad v_H + a_2 w_H = \varphi_2^0(t), \quad \left(b^{(0)}, U_H'\right) = \partial_t^{1/2}\varphi_3(t,y). \tag{3''}$$

Теорема 2 *Задача $(1')$-$(3')$, H-условно-корректна: при условии (У.Р') существует "нормальное" решение* (18) *на множестве U_n, оно единственно и устойчиво.*

Список литературы

[1] *Темирболат С.Е.* Конструирование и решение некорректных краевых задач. - Алматы, "Қазақ университеті" 2003. - 128 с.

[2] *Базарбаева С.Е.* О разрешимости смешанных задач для системы дифференциальных уравнений тепло и массообмена. Дис. Канд.физ-мат наук. Алма-Ата, 1982, 144 с.

Temirbolat S.E., *Conditionally well-posed two problems for parabolic system*, The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №3(70), 23 – 30

By analyzing boundary conditions of two types from number of multidimensional problems for parabolic by Petrovskii systems ill-posed ones are selected. Then these problems are reduced to the conditionally well-posed ones.

Темірболат С.Е., *Параболалық жүйеге қойылган шартты-қисынды екі түрлі есептер*, ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №3(70), 23 – 30

Шекаралық шарттарды талдау арқылы Петровскийше параболалық жүйелерге қойылған екі түрлі көп өлшемді есептерден қисынсыздары бөліп алынады, олар шартты қисындылар санатына жеткізіледі.