Задача Коши для одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

А. Тунгатаров, Д. К. Ахмед-Заки
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы, Казахстан
E-mail: mdina84@mail.ru

Аннотация

В работе найдено общее решение одного класса обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка и решена задача Коши для этого класса.

1 Введение

Пусть $0 < R < \infty$ и $S[0, R]$- класс существенно ограниченных и измеримых в $[0, R]$ функций. Норма в $S[0, R]$ определяется по формуле $\|f\|_{S[0,R]} = \mathrm{supvrai}_{x\in[0,R]}|f(x)| = \lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_{L_p[0,R]}$. Через $W_1^2[0, R]$ обозначим класс функций $f(x)$, для которых $f''(x) \in L_1[0, R]$. Рассмотрим в $[0, R]$ уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u = f(x), \tag{1}$$

где $a(x),\ f(x) \in S[0, R]$.

Уравнение (1) называется при $a(x) = a\cos(2x) + b,\ f(x) \equiv 0$ уравнением Матье, при $a(x) = a\exp(2x) + b\exp(x) + c,\ f(x) \equiv 0$ уравнением Хилла, а при $a(x) = -Ap(x) + B,\ f(x) \equiv 0$ уравнением Ламе, которые используются при решении различных задач физики и техники [1, 2]. Здесь $a,\ b,\ A, B$ - заданные действительные числа, $p(x)$ - периодическая функция. В [2] при достаточно гладких коэффициентах исследованы асимптотические свойства решений уравнения (1). В настоящей работе найдено общее решение уравнения (1) и решена задача Коши для этого уравнения из класса

$$W_\infty^2[0, R] \bigcap C^1[0, R]. \tag{2}$$

Следует отметить, что в общеизвестном справочнике Э. Камке [1] не приведены решения уравнения (1).

2 Построение общего решения уравнения (1)

Дважды интегрируя уравнение (1), получим

$$u(x) = -(Bu)(x) + g(x) + c_1 x + c_2, \tag{3}$$

где $c_1,\ c_2$ - произвольные действительные числа,

$$(Bu)(x) = -\int_0^x \int_0^y a(t)u(t)dtdy, \ g(x) = -\int_0^x \int_0^y f(t)dtdy.$$

Действуя оператором B к уравнению (3), имеем

$$(Bu)(x) = (B^2u)(x) + (Bg)(x) + c_1a_1(x) + c_2b_1(x), \tag{4}$$

где

$$(B^2u)(x) = (B(Bu)(x))(x), \ \ a_1(x) = -\int_0^x \int_0^y ta(t)dtdy, \ \ b_1(x) = -\int_0^x \int_0^y a(t)dtdy.$$

Из (3) и (4) следует

$$u(x) = (B^2u) + c_1(x + a_1(x)) + c_2(1 + b_1(x)) + g(x) + (Bg)(x). \tag{5}$$

Далее, используем следующие функции и операторы:

$$(B^nu)(x) = (B(B^{n-1}u)(x))(x), (n = 2, 3, ...), \ (B^1u)(x) = (Bu)(x),$$

$$a_k(x) = -\int_0^x \int_0^y a(t)a_{k-1}(t)dtdy, \ \ b_k(x) = -\int_0^x \int_0^y a(t)b_{k-1}(t)dtdy, (k = 2, 3, ...).$$

Действуя к уравнению (5) оператором B, получим

$$(Bu)(x) = (B^3u) + c_1(a_1(x) + a_2(x)) + c_2(b_1(x) + b_2(x)) + (Bg)(x) + (B^2g)(x). \tag{6}$$

Из (3) и (6) вытекает

$$u(x) = (B^3u) + c_1(x + a_1(x) + a_2(x)) + c_2(1 + b_1(x) + b_2(x)) + g(x) + (Bg)(x) + (B^2g)(x).$$

Продолжая эту процедуру n раз, получим интегральное представление решений уравнения (1):

$$u(x) = (B^nu) + c_1(x + \sum_{k=1}^{n-1} a_k(x)) + c_2(1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k(x)) + \sum_{k=0}^{n-1}(B^kg)(x), \tag{7}$$

где $(B^0g)(x) = g(x)$.

Пусть $u(x) \in C[0, R]$. Имеют место следующие, легко проверяемые неравенства

$$|(B^nu)(x)| \leq |u|_1 \cdot \frac{(|a|_0 \cdot x^2)^n}{n!} \cdot \frac{1}{(n+1)...2n}, \tag{8}$$

$$|a_k(x)| \leq |a|_0^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad |b_k(x)| \leq |a|_0^k \cdot \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

где $|f|_0 = \text{supvrai}_{x\in[0,\infty)}|f(x)|, \ |f|_1 = \max\limits_{x\in[0,R]}|f(x)|$.

Если переходим к пределу при $n \to \infty$ в (7), то с учетом (8), получим

$$u(x) = c_1 I(x) + c_2 J(x) + F(x), \tag{9}$$

где

$$I(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x), \ \ J(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k(x), \ \ F(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(B^k g)(x).$$

Используя неравенства (8), имеем

$$|I(x)| \leq \cosh(\sqrt{|a|_0}\cdot x), \ |J(x)| \leq x + \frac{1}{\sqrt{|a|_0}}\sinh(\sqrt{|a|_0}\cdot x), \tag{10}$$

$$|F(x)| \leq |g|_1 \cosh(\sqrt{|a|_0}\cdot x).$$

Из вида функций $I(x), \ \ J(x) \ \ F(x)$ также следует

$$I'(x) = 1 - \int\limits_0^x a(t)I(t)dt, \ \ J'(x) = -\int\limits_0^x a(t)J(t)dt, \tag{11}$$

$$F'(x) = \int\limits_0^x f(t)dt - \int\limits_0^x a(t)F(t)dt,$$

$$I''(x) = -a(x)I(x), \ \ J''(x) = -a(x)J(x), \tag{12}$$

$$F''(x) = f(x) - a(x)F(x), \tag{13}$$

$$I(0) = F(0) = F'(0) = J'(0) = 0, \ \ J(0) = I'(0) = 1. \tag{14}$$

Из (12) и (13) следует, что функции $I(x), \ J(x)$ являются частными решениями из класса (2) однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a(x)u = 0,$$

а функция $F(x)$ - неоднородного уравнения (1). Из (11) и вида функций $I(x), \ J(x)$ следует, что вронскиан этих функций $W(x)$ отличен от нуля в точке $x = 0 : W(0) = -1$. Поэтому функции $I(x)$ и $J(x)$ линейно независимы в $[0, R]$ и формула (9) определяет общее решение уравнения (1) из класса (2). Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Общее решение уравнения (1) из класса (2) находится по формуле (9).*

3 Задача типа Коши

Для уравнения (1) рассмотрим задачу типа Коши в следующем виде.

Задача K. *Требуется найти решение уравнения (1) из класса (2), удовлетворяющее начальным условиям*

$$\alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0) = \gamma_1,\ \alpha_2 u(0) + \beta_2 u'(0) = \gamma_2, \tag{15}$$

где $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \gamma_1\ \gamma_2$ - заданные действительные числа.

Решение задачи.

Для решения задачи используем общее решение уравнения (1), заданное по формуле (9). Подставив функцию, заданную по формуле (9), в начальные условия (15), с учетом (14) имеем

$$\beta_1 c_1 + \alpha_1 c_2 = \gamma_1,\ \beta_2 c_1 + \alpha_2 c_2 = \gamma_2 \tag{16}$$

Отсюда при $\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1 \neq 0$, получим

$$c_1 = \frac{\gamma_1\beta_2 - \gamma_2\beta_1}{\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1},\ c_2 = \frac{\gamma_2\alpha_1 - \gamma_1\alpha_2}{\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1} \tag{17}$$

Если $\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1 = 0$, то для разрешимости системы (16) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \tag{18}$$

При выполнении равенства (18) система (16) имеет бесконечное множество решений, которые находятся по формулам

$$c_1 = \frac{\gamma_1 - \alpha_1 c}{\beta_1},\ c_2 = c,\ \text{если } \beta_1 \neq 0 \tag{19}$$

и

$$c_1 = c,\ c_2 = \frac{\gamma_1 - \beta_1 c}{\alpha_1},\ \text{если } \alpha_1 \neq 0 \tag{20}$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. *При $\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1 \neq 0$ задача K имеет единственное решение, которое находится по формулам (9) и (17). При $\beta_1\alpha_2 - \beta_2\alpha_1 = 0$ для разрешимости задачи K необходимо и достаточно выполнения равенства (18). В этом случае задача K имеет бесконечное множество решений, которые находятся по формулам (9), (19) и (20).*

Список литературы

[1] *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. – М.: Наука, 1965. – 703 с.

[2] *Федорюк М.Ф.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1983. – 352 с.

A. Tungatarov, D. K. Akhmed-Zaki, *Cauchy problem for one class of second order ordinary differential equations*, The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №3(70), 31 – 35

In this article the general solution of one class of second order ordinary differential equation is received. The Cauchy problem for this class is solved.

Ә. Түнғатаров, Д. К. Ахмед-Заки, *Екінші ретті жай дифференциалдық теңдеулердің бір классы үшін Коши есебі*, ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №3(70), 31 – 35

Мақалада екінші ретті жай дифференциалдық теңдеулердің бір классының жалпы шешімі табылған және осы класс үшін Коши есебі шешілген.