Обратные задачи для параболических уравнений с неограниченным временем

И.К. Шакенов
Казахский национальный университет им. аль–Фараби

Аннотация

В данной работе рассматривается обратная по правому краевому условию одномерная начально–краевая задача для уравнения теплопроводности с дополнительной информацией на левой границе. Эта задача сводится к оптимизационной, т.е. к задаче теории управления. Последняя задача численно решается и анализируются численные результаты.

1 Постановка задачи.

Прикладные задачи в разных областях часто сталкиваются с тем, что мы называем обратными задачами. К примеру, задача о промерзании грунта, где на поверхности известна температура, а вот что делается на глубине, совсем не ясно. Или процессы в доменных печах, когда температура на входе может быть замерена, а внутри нет. В таких случаях мы приходим к обратным краевым задачам, в которых данные изобилуют на одной границе, но совсем отсутствуют на другой.

Математическая постановка задачи. Пусть задано одномерное уравнение теплопроводности и начально–краевая задача

$$u_t = u_{xx} + f(x,t), \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \tag{2}$$

$$u_x|_{x=0} = b(x), \tag{3}$$

$$u_x|_{x=L} = y(x), \tag{4}$$

Правое краевое условие неизвестно и имеет смысл теплового потока, проходящего через границу. Для его нахождения задана дополнительная информация $u(0,t) = a(t)$. Мы сводим данную обратную задачу к оптимизационной, в которой требуется на решении (1) – (4) минимизировать следующий функционал $I(y) = \int\limits_0^T \big(u(0,t;y) - a(t)\big)^2 dt \to \min$

Если мы найдем такое управление y, что минимум функционала окажется равным нулю (отрицательным он быть не может), то тогда обеспечим выполнение дополнительного условия, т.е. результатов эксперимента.

Пусть задача (1) – (4) определяет оператор A, значением $A\big(y(t)\big)$ которого становится $u(0,t)$. Таким образом, мы решаем операторное уравнение с известной функцией $a(t)$: $A(y) = a(t)$

Обозначение $u(0,t;y)$ подразумевает решение системы (1) – (4) при правом граничном условии $y(t)$ и при $x = 0$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся известным градиентным методом [1], суть которого состоит в построении рекуррентной последовательности: $y_{n+1}(t) = y_n(t) - \alpha_n I'\big(y_n(t)\big)$, где $\alpha_n > 0$. Возникает вопрос, что такое $I'\big(y_n(t)\big)$? И как его найти?

2 Производная Гато функционала.

Производную функционала определяют исходя из следующего соотношения:

$$\lim_{\sigma\to 0}\frac{I(y+\sigma h)-I(y)}{\sigma}=\langle I'(y),\,h\rangle,$$

в котором σ – некоторое число и h – произвольная функция из области определения функционала.

Теорема 1 *Производная Гато функционала I в точке $y(t)$ равняется $\psi\big(L,t\big)$, где ψ есть решение сопряженной задачи*

$$\psi_t+\psi_{xx}=0, \tag{5}$$

$$\psi(x,T)=0, \tag{6}$$

$$\psi_x\big(L,t\big)=0, \tag{7}$$

$$\psi_x(0,t)=-2\big(u(0,t;y)-a(t)\big). \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$\frac{I(y+\sigma h)-I(y)}{\sigma}=\frac{\int\limits_0^T\Big(u(0,t;y+\sigma h)-a(t)\Big)^2dt-\int\limits_0^T\Big(u(0,t;y)-a(t)\Big)^2dt}{\sigma}=$$

$$\frac{\int\limits_0^T\delta u^2(0,t;y)dt}{\sigma}+\frac{\int\limits_0^T 2\delta u(0,t;y)\big(u(0,t;y)-a(t)\big)dt}{\sigma}, \tag{9}$$

где $\delta u(0,t;y)=u(0,t;y+\sigma h)-u(0,t;y)$. Записав систему (1) – (4) для управлений $y+\sigma h$ и y, затем вычитая друг от друга и деля на σ, получим возмущенную задачу с обозначением $z=\frac{\delta u(x,t;y)}{\sigma}$:

$$z_t=z_{xx}, \tag{10}$$

$$z|_{t=0}=0, \tag{11}$$

$$z_x|_{x=0}=0, \tag{12}$$

$$z_x|_{x=L}=h. \tag{13}$$

Умножим обе части равенства (10) на произвольную пока функцию $\psi(x,t)$ и проинтегрируем по всей области $0<x<L,\;\; 0<t<T$. Далее используя интегрирование по частям, получим следующий результат:

$$0=\int\limits_0^T\int\limits_0^L\big(z_t-z_{xx}\big)\psi(x,t)dxdt=-\int\limits_0^T\Big(z_x\big(L,t\big)\psi\big(L,t\big)-$$

$$z_x(0,t)\psi(0,t)-z\big(L,t\big)\psi_x\big(L,t\big)+z(0,t)\psi_x(0,t)\Big)dt-\int\limits_0^T\int\limits_0^L z\psi_{xx}dxdt.$$

Принимая во внимание, что $z(x,0)=0,\ \ z_x(0,t)=0,\ \ z_x(L,t)=h$, последнее равенство можно записать следующим образом:

$$0=-\int\limits_0^L\int\limits_0^T\Big(\psi_t+\psi_{xx}\Big)zdtdx+\int\limits_0^L z\big(x,T\big)\psi\big(x,T\big)dx-$$
$$\int\limits_0^T\Big(h\psi\big(L,t\big)-z\big(L,t\big)\psi_x\big(L,t\big)+z(0,t)\psi_x(0,t)\Big)dt.$$

Пусть функция $\psi(x,t)$ выбранная нами в самом начале произвольной, удовлетворяет в той же области некоторым ограничениям:

$$\psi_t+\psi_{xx}=0,\quad \psi\big(x,T\big)=0,\quad \psi_x\big(L,t\big)=0.$$

Это позволит максимально упростить последнее выражение. Второе граничное условие нам ещё предстоит выбрать для полного определения $\psi(x,t)$. С учётом сделанных предположений относительно $\psi(x,t)$ последнее выражение можно упростить $\int\limits_0^T\psi\big(L,t\big)hdt=-\int\limits_0^T z(0,t)\psi_x(0,t)dt$. Значит выбрав $\psi_x(0,t)=-2\big(u(0,t;y)-a(t)\big)$, получаем

$$\int\limits_0^T\psi\big(L,t\big)hdt=2\int\limits_0^T z(0,t)\big(u(0,t;y)-a(t)\big)dt. \tag{14}$$

С учётом выбранного $z=\frac{\delta u(x,t;y)}{\sigma}$ и равенств (9) и (14) можно заключить:

$$\frac{I(y+\sigma h)-I(y)}{\sigma}=\int\limits_0^T\psi\big(L,t\big)hdt+\sigma\int\limits_0^T z^2(0,t;y)dt.$$

Переходя к пределу при $\sigma\to 0$ получим, что $I'(y)=\psi\big(L,t\big)$. Зависимость решения краевой задачи (1) – (4) от y определяет некоторый аффинный оператор. Тогда этот оператор дифференцируем, а значит, существует предел величины z при $\sigma\to 0$. Тем самым мы нашли производную функционала. Теорема доказана.

3 Алгоритм решения.

Дадим общую схему решения задачи на основе градиентного метода.

3.1 Общая схема алгоритма.

1. Заранее задаём значение параметров: ε – малое отклонение $u(0,t;y)$ от $a(t)$ по норме L_2; $h=\frac{L}{N}$ – величина шага по x; $\tau=\frac{T}{M}$ – величина шага по времени t. Инициализируем заданные функции $f(x,t),\ \ \varphi(x),\ \ b(t),\ \ a(t)$. Выбираем начальное приближение $y_0(t)$.

2. Вычисляем значение оператора $A(y)$ с помощью прямой задачи (1) – (4), то есть $u(0,t;y)$.

3. Считаем значение функционала $I(y)$, если $I(y) < \varepsilon$, то алгоритм прерывается, и выводятся результаты. Если же $I(y) > \varepsilon$, тогда выполняем пункт **4.**

4. Решаем сопряжённую задачу, находим значение $I'(y) = \psi\big(L,t\big)$.

5. Находим значение α; вообще существует много способов, но мы будем придерживаться формулы

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\parallel I'(y) \parallel}{\parallel AI'(y) \parallel}.$$

6. Строим следующее приближение для $y(t)$ по формуле:

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) - \alpha_n I'\big(y_n(t)\big).$$

Переходим к пункту **2.**

Следующим этапом будет подробное описание некоторых пунктов алгоритма.

3.2 Прямая задача.

Напомним постановку задачи (1) – (4):

$$\begin{aligned} u_t &= u_{xx} + f(x,t), \;\; 0 < x < L, \;\; 0 < t < T, \\ u|_{t=0} &= \varphi(x), \\ u_x|_{x=0} &= b(x), \\ u_x|_{x=L} &= y(x). \end{aligned}$$

Нам предстоит решать эту задачу в условиях известных функций $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $b(t)$, $a(t)$, $y(t)$ и найти значение $u(0,t)$. Дифференциальные операторы в уравнении (1) аппроксимируем их разностными аналогами согласно выбранной сетке, получаем:

$$\frac{u_i^{j+1} - u_i^j}{\tau} = \frac{u_{i-1}^{j+1} - 2u_i^{j+1} + u_{i+1}^{j+1}}{h^2} + f_i^j, \tag{15}$$

где $u_i^j = u(ih, j\tau)$, $f_i^j = f(ih, j\tau)$, $i = 1, 2, \ldots, N-1$, $j = 1, 2, \ldots, M-1$. Полученная схема называется *схемой с опережением* или чисто *неявной.* [2]. Граничные условия имеют следующие значения: для (2):

$$u_i^0 = \varphi_i, \;\; i = 0, 1, \ldots, N; \tag{16}$$

для (3):

$$\frac{u_1^j - u_0^j}{h} = b_j, \;\; j = 0, 1, \ldots, M, \quad \text{взята правая производная} \tag{17}$$

для (4):

$$\frac{u_N^j - u_{N-1}^j}{h} = y_j, \;\; j = 0, 1, \ldots, M, \quad \text{взята левая производная.} \tag{18}$$

Решение этой системы находится методом прогонки. Пусть дано уравнение

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{19}$$

$$y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1, \ \ y_N = \kappa_2 y_{N-1} + \mu_2, \tag{20}$$

причём $A_i \neq 0, \ \ B_i \neq 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Надо указать простой способ решения этой системы. Основная идея заключается в том, чтобы привести разностное уравнение второго порядка к трём разностным уравнениям первого порядка. Предположим, что имеет место соотношение:

$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \tag{21}$$

где коэффициенты α_i и β_i неопределенны. Выражение $y_{i-1} = \alpha_i y_i + \beta_i$ подставим в (19):

$$\big(A_i \alpha_i - C_i\big) y_i + A_i \beta_i y_{i+1} = -F_i.$$

Воспользуемся соотношением (21):

$$\Big(\big(A_i \alpha_i - C_i\big)\alpha_{i+1} + B_i\Big) y_{i+1} + A_i \beta_i + \big(A_i \alpha_i - C_i\big)\beta_{i+1} = -F_i.$$

Это уравнение выполнено для любых y_i, если

$$\big(A_i \alpha_i - C_i\big)\alpha_{i+1} + B_i = 0, \quad A_i \beta_i + \big(A_i \alpha_i - C_i\big)\beta_{i+1} + F_i = 0.$$

Отсюда получаем рекуррентную формулу для α_{i+1}:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{22}$$

(предполагаем, что знаменатель в (22) не равен нулю) и рекуррентную формулу для β_{i+1}:

$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F}{C_i - \alpha_i A_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, N-1. \tag{23}$$

Мы опирались на соотношения (21).

Если коэффициенты α_i и β_i известны и известно значение y_N, то, двигаясь справа налево (то есть от $i+1$ к i), мы определим последовательно все y_i. Уравнения для α_i и β_i – нелинейные, они связывают значения этих функций в двух соседних точках. Для α_i и β_i задача решается слева направо, для y_i – в противоположном направлении. Для каждой из функций α, β, y надо решать задачу Коши. Чтобы найти начальные значения для этих функций, используем граничные условия. Так как формула (21) справедлива для $i = 0, 1, 2, \ldots, N-1$, то при $i = 0$ имеем

$$y_0 = \alpha_1 y_1 + \beta_1;$$

с другой стороны, $y_0 = \kappa_1 y_1 + \mu_1$. Отсюда

$$\alpha_1 = \kappa_1, \tag{24}$$

$$\beta_1 = \mu_1. \tag{25}$$

Таким образом, для функций α_i и β_i получим задачи Коши: для α – (22), (24), для β – (23), (25). Эти формулы называются *формулами прямой прогонки.* После определения функций α_i и β_i для всех $i = 1, 2, \ldots, N$, необходимо найти граничное значение y_N. Оно определяется из решения системы уравнений

$$y_N = \kappa_2 y_{N-1} + \mu_2, \quad y_{N-1} = \alpha_N y_N + \beta_N,$$

откуда, если $1 - \alpha_N \kappa_2 \neq 0$, то

$$y_N = \frac{\mu_2 + \kappa_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \kappa_2}. \tag{26}$$

Таким образом, для определения y_i получаем задачу Коши (21), (26) (*формулы обратной прогонки*).

Соберём всё формулы изложенного метода и запишем их в порядке использования:

$$\alpha_{i+1} = \frac{B_i}{C_i - \alpha_i A_i}, \ \ (\rightarrow) \ \ i = 1, 2, \ldots, N-1, \ \ \alpha_1 = \kappa_1,$$
$$\beta_{i+1} = \frac{A_i \beta_i + F}{C_i - \alpha_i A_i}, \ \ (\rightarrow) \ \ i = 1, 2, \ldots, N-1, \ \ \beta_1 = \mu_1,$$
$$y_N = \frac{\mu_2 + \kappa_2 \beta_N}{1 - \alpha_N \kappa_2},$$
$$y_i = \alpha_{i+1} y_{i+1} + \beta_{i+1}, \ \ (\leftarrow) \ \ i = N-1, N-2, \ldots, 1, 0.$$

Укажем также, без доказательства, достаточные условия, при которых задача (19), (20) имеет единственное решение:

$$\left|C_i\right| > \left|A_i\right| + \left|B_i\right|, \ \ i = 1, 2, \ldots, N-1, \quad \left|\kappa_i\right| \leq 1, \ \ i = 1, 2.$$

Осталось определить значения y, A, B, C, α, β, μ, κ для нашей задачи (15) – (18). Для этого перепишем (15), (17), (18) в следующем виде:

$$\frac{1}{h^2} u_{i-1}^{j+1} - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{\tau}\right) u_i^{j+1} + \frac{1}{h^2} u_{i+1}^{j+1} = -\left(f_i^j + \frac{1}{\tau} u_i^j\right), \tag{27}$$

$$u_0^j = u_1^j - b_j h, \tag{28}$$

$$u_N^j = u_{N-1}^j + y_j h. \tag{29}$$

При сравнении с (19) и (20) сразу же видно, что:

$$y_i = u_i^{j+1}, \ \ A_i = B_i = \tfrac{1}{h^2}, \ \ C_i = \tfrac{2}{h^2} + \tfrac{1}{\tau}, \ \ F_i = f_i^j + \tfrac{1}{\tau} u_i^j, \ \ \kappa_1 = 1,$$
$$\mu_1 = -b_j h, \ \ \kappa_2 = 1, \ \ \mu_2 = y_j h.$$

Условие (28) фактически заполняет нулевой слой $j = 0$. С помощью метода прогонки мы заполняем следующий слой, причём связь с предыдущим слоем осуществляется через F_i. Таким образом, слой за слоем, находятся все значения искомой функции u_i^j. Нас же интересует значения u_0^j, отвечающие за $u(0, t)$ как значения функционала.

Следует отметить, что порядок аппроксимации задачи $O\big(\tau + h^2\big)$. Выбранная чисто неявная схема абсолютно устойчива. Согласно теореме Лакса решение дискретной задачи сходится к решению непрерывной задачи из-за линейности оператора.

Мы полностью описали процесс решения прямой задачи при заданном значении параметра y.

3.3 Значение функционала.

Подсчёт значения функционала $I(y)$ ведётся по формуле трапеций. Приводим формулу для нашего случая (вывод не представляет сложностей):

$$I(y) \approx \tau\left(\frac{\left(u_0^0 - a_0\right)^2 + \left(u_0^M - a_M\right)^2}{2} + \sum_{j=1}^{M-1}\left(u_0^j - a_j\right)^2\right).$$

3.4 Сопряженная задача.

Разностная аппроксимация сопряженной задачи (5) – (8) выглядит следующим образом:

$$\frac{\psi_i^{j+1} - \psi_i^j}{\tau} + \frac{\psi_{i-1}^j - 2\psi_i^j + \psi_{i+1}^j}{h^2} = 0, \;\; j = M-1, M-2, \ldots, 0.$$
$$\psi_i^M = 0, \;\; i = 0, 1, 2, \ldots, N.$$
$$\frac{\psi_N^j - \psi_{N-1}^j}{h} = 0, \;\; j = M, \ldots, 0.$$
$$\frac{\psi_1^j - \psi_0^j}{h} = -2\left(u_0^j - a_j\right), \;\; j = M, \ldots, 0.$$

Эти соотношения могут быть преобразованы в соответствии с методом прогонки. После надлежащих преобразований имеем следующие соотношения (кроме второго):

$$\frac{1}{h^2}\psi_{i-1}^j - \left(\frac{2}{h^2} + \frac{1}{\tau}\right)\psi_i^j + \frac{1}{h^2}\psi_{i+1}^j = -\left(\frac{1}{\tau}\psi_i^{j+1}\right), \;\; j = M-1, M-2, \ldots, 0.$$
$$\psi_N^j = \psi_{N-1}^j, \;\; j = M, \ldots, 0.$$
$$\psi_0^j = \psi_1^j + 2h\left(u_0^j - a_j\right), \;\; j = M, \ldots, 0.$$

Откуда сразу же следует, что

$$y_i = \psi_i^j, \;\; A_i = B_i = \tfrac{1}{h^2}, \;\; C_i = \tfrac{2}{h^2} + \tfrac{1}{\tau}, \;\; F_i = \tfrac{1}{\tau}\psi_i^{j+1}, \;\; \kappa_1 = 1,$$
$$\mu_1 = 2h\left(u_0^j - a_j\right), \;\; \kappa_2 = 1, \;\; \mu_2 = 0.$$

Формулы для прямой и обратной прогонки остаются без изменения с той лишь разницей, что теперь заполнения слоёв начинаются с M-го (значение которого имеется) и идёт вниз к 0-му. Связь между слоями поддерживается по-прежнему через F_i. Таким образом находятся значения ψ_i^j. Нас же интересуют только ψ_N^j, соответствующие узловым значениям градиента функционала $I'(y)$.

4 Анализ результатов.

Приступаем к решению конкретной задачи по описанному алгоритму. Нашей целью здесь будет проверка эффективности алгоритма при разных его реализациях.

1) Прежде всего, зная точное решение в виде аналитической функции, мы сравним значения, доставляемые алгоритмом и точные значения.

2) Далее, делая шаги по временной и пространственной переменной всё мельче, исследуем влияние на точность получаемых решений.

3) Уменьшая значение ε, то есть всё более уточняя уравнение $I(y) = \int\limits_0^T \big(u(0,t;y) - a(t)\big)^2 dt = 0$, проследим, насколько при этом получаемые $y(t)$ приближаются к точным значениям.

4) Сравнение численного решения и точного осуществляется по следующим характеристикам:

а) $\max\limits_{i=0,N}\Big(\big|y_i - y_i^*\big|\Big)$, где y_i – найденное численное решение, y_i^* – точное решение; то есть находим отклонение по норме C^1.

б) $\sqrt{\sum\limits_{i=0}^{N}\big(y_i - y_i^*\big)^2}$ – отклонение численного решения от точного по норме L_2.

в) значение $I(y)$ – значение минимизируемого функционала;

г) количество проделанных итераций n;

5) Если возникнут дополнительные эффекты, исследуем их!

Итак, конкретная задача взята со следующими параметрами, которые не меняются (в отличие от тех, которые будут варьироваться и чьё влияние подвергается исследованию): $u(x,t) = \exp(2x - t)$ – функция - решение системы (1) – (4), $f(x,t) = -5\exp(2x - t)$ – свободный член уравнения (1), $\varphi(x) = \exp(2x)$ – температура в начальный момент времени, $b(t) = 2\exp(-t)$ – левое граничное условие, $a(t) = \exp(-t)$ – дополнительная информация, $L = 1$, $[0, L]$ – область изменения пространственной переменной.

При реализации последующих экспериментов условимся придерживаться вышеуказанных параметров.

Изменяющиеся параметры: ε – отклонение целевого функционала от нуля, N – количество делений отрезка $[0, L]$, M – количество делений отрезка $[0, T]$, T – конечное значение интервала, $y_0(t)$ – начальное приближение искомой функции.

Для расчётов используем: 1) метод простой итерации, то есть фиксированное значение α, в таблицах условимся обозначать данный выбор через "МПИ"и писать конкретное значение. 2) метод наискорейшего спуска, то есть расчёт ведётся по формуле $\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{\|I'(y)\|}{\|AI'(y)\|}$, в таблицах условимся обозначать данный выбор через "МНС".

4.1 Исследование поведения на правой границе.

Пусть варьируемые параметры указаны в таблице.

Таблица 1. Первый вычислительный эксперимент.

ε	N	M	T	$y_0(t)$	α
0.01	100	100	1	0	МПИ, $\alpha = 0.5$
Отклонение $\\|\cdot\\|_{\mathrm{C}^1}$		Отклонение $\\|\cdot\\|_{\mathrm{L}_2}$	$I(y)$	$I'(y)$	n
5.478		17.442	0.0099968	6.054E-8	1513

Сразу видно, что первый же эксперимент даёт неудовлетворительные результаты. Применяемый нами градиентный метод основан на следующей формуле:

$$y_{n+1}(t) = y_n(t) - \alpha_n I'\big(y_n(t)\big), \quad \alpha_n > 0.$$

В этой формуле $I'(y)$ определяется с помощью сопряженной задачи, а именно $I'(y) = \psi\big(L,t\big)$, однако одним из краевых условий той же сопряженной задачи было $\psi\big(x,T\big) = 0$, то есть значение градиента функционала в конечной точке $t = T$ всегда оказывается равным нулю. В конечный момент времени значения искомой функции не уточняются. Как оказалось, данную проблему можно обойти следующим способом. Результаты экспериментов показали, что в начале временного интервала, то есть на левом конце $[0,T]$ численное решение даёт весьма неплохое приближение точного решения. Поэтому при численных расчётах мы увеличиваем искусственно интервал $[0,T]$, но при этом нас интересует только его часть, от 0 до некоторого момента, пока численный алгоритм даёт хорошие результаты.

Ставим наш эксперимент снова, увеличив значение T до 2, но при расчётах отклонений норм, считаем как будто $T = 1$. Результаты в таблице. Значение α увеличено.

Таблица 2. Увеличение временного интервала с $T = 1$ до $T = 2$.

ε	N	M	T	$y_0(t)$	α
0.01	100	100	2(1)	0	МПИ, $\alpha = 0.6$
Отклонение $\|\cdot\|_{C^1}$		Отклонение $\|\cdot\|_{L_2}$	$I(y)$	$I'(y)$	n
0.246		0.733	0.0099954	2.494E-7	611

Приводим серию экспериментов, результаты сводим в таблицы.

Таблица 3. Варьирование параметра T.

T	$\|\cdot\|_{C^1}$	$\|\cdot\|_{L_2}$	$I'(y)$	n	α
1.00	5.529	0.385	6.05E-8	1513	1
1.25	0.576	0.046	8.27E-8	1064	1
1.50	0.156	0.009	1.18E-7	743	1
1.75	0.207	0.003	1.7E-7	577	0.9
2.00	0.255	0.004	2.49E-7	524	0.7
2.50	0.345	0.006	5.45E-7	504	0.4
3.00	0.430	0.011	1.03E-6	466	0.3
3.50	0.509	0.016	1.43E-6	609	0.2
4.00	0.589	0.021	1.58E-6	803	0.15

Видно, что чрезмерное увеличение значения T для расчётов не приводит к улучшению результатов. Скорее всего, это происходит в связи с постоянной величиной M. В доказательство этого предположения приведём эксперимент с увеличенным значением M.

Таблица 4. Влияние параметра M.

ε	N	M	T	$y_0(t)$	α
0.01	100	400	4(1)	0	МПИ, $\alpha = 0.15$
Отклонение $\|\cdot\|_{C^1}$		Отклонение $\|\cdot\|_{L_2}$	$I(y)$	$I'(y)$	n
0.757		0.0002	0.0099	3.0084E-6	496

Чего и следовало ожидать, результаты гораздо лучше!

4.2 Влияние параметра ε.

Проведём серию экспериментов, уменьшая значение параметра ε, $\alpha = 0.7$.

Таблица 5. Результаты эксперимента № 2.

ε	$\|\cdot\|_{C^1}$	$\|\cdot\|_{L_2}$	$I'(y)$	n	T
0.01	0.231	0.00413	2.49E-7	524	2
0.005	0.323	0.00375	1.43E-8	1807	2
0.001	1.111	0.00378	9.5E-12	50497	2
0.0005	1.436	0.00379	1.93E-13	296005	2

Дальнейшие уменьшения параметра приводят к слишком долгому счёту с помощью метода простых итераций, это видно и из количества проделанных итераций. Причём к каким-либо улучшениям точности это вовсе не приводит. Делаем вывод, что параметр не обязательно брать очень маленьким.

4.3 Влияние параметров N и M.

Следующие эксперименты будут связаны с влиянием параметров N и M на скорость сходимости. То есть мы сравним одинаковые увеличения величины дробления отрезков $[0, T]$ и $[0, L]$. Вот что у нас получилось:

Таблица 6. Влияние параметров N и M.

M	N	$\|\cdot\|_{C^1}$	$\|\cdot\|_{L_2}$	$I'(y)$	n
100	100	0.323	0.0038	1.44E-8	1807
100	200	0.618	0.0067	1.36E-8	1930
100	400	0.791	0.0083	1.3E-8	2018
100	800	0.880	0.0090	1.27E-8	2069
100	1600	0.926	0.0094	1.26E-8	2097
200	100	0.250	0.00091	2.69E-8	1297
400	100	0.485	0.00186	3.38E-8	1149
800	100	0.586	0.00173	3.67E-8	1097
1600	100	0.651	0.00137	3.81E-8	1077
200	200	0.157	0.00115	2.64E-8	1336
400	400	0.108	0.00031	3.46E-8	1169
800	800	0.173	0.00005	3.91E-8	1098

Анализ данной таблицы показывает, что более мелкое дробление интервала времени оказывается более эффективным. Достаточно сравнить показатели основных параметров. Ну и конечно же одновременное дробление и времени и пространства более эффективно по сравнению с ещё более мелким дроблением только лишь одного из интервалов.

4.4 Влияние начального приближения.

Следующим объектом нашего исследования будет начальное приближение $y_0(t)$. Во всех предыдущих экспериментах этот параметр брался равным нулю. Мы высказываем предположение, вполне естественное, что чем менее функция первого приближения отличается от искомого решения, тем более быстро сходится алгоритм. Результаты эксперимента как всегда сведены в таблицу.

Таблица 7. Результаты эксперимента № 4.

y_0	$\|\cdot\|_{C^1}$	$\|\cdot\|_{L_2}$	$I'(y)$	n
0	0.323	0.0037	1.44E-8	1807
1	0.141	0.0036	5.3E-8	675
2	0.234	0.0042	2.8E-7	252
4	0.293	0.0042	1.9E-8	1346
10	0.935	0.0385	5.1E-10	25315
$\exp(-t)$	0.314	0.0036	1.6E-8	1594
$\exp(1-t)$	0.290	0.0034	2.2E-8	1262
$\exp(2-t)$	0.243	0.0039	5.9E-8	559
$3\exp(1-t)$	0.231	0.0040	7.3E-8	472
$\exp(t)$	0.664	0.0040	1.8E-9	8891
5t	0.891	0.0037	5.48E-10	23709

Здесь совершенно отчётливо прослеживается сделанный вывод. Чем ближе по форме начальное приближение (то есть чем меньше отклонение по норме пространства), тем быстрее алгоритм сходится к искомому решению. Если же начальное приближение совсем не похоже на решение (отличие по норме больше), это требует значительных ресурсов компьютера.

4.5 Влияние выбора параметра α.

Таблица 8. Метод наискорейшего спуска.

ε	N	M	T	$y_0(t)$	α
0.13	100	100	2(1)	$3\exp(1-t)$	МНС
Отклонение $\|\cdot\|_{C^1}$		Отклонение $\|\cdot\|_{L_2}$	$I(y)$	$I'(y)$	n
1.214		0.035	0.13	0.00525	61759

До сих пор мы использовали метод простой итерации, это означает, что значение фиксируется. Заменим этот метод на метод наискорейшего спуска. При таком выборе мы заменяем фиксированное значение на значение, вычисляемое по формуле $\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{\|I'(y)\|}{\|AI'(y)\|}$.

Первый же вычислительный эксперимент показал, что МНС крайне не эффективен. Помня о том, что выбор α всё-таки зависит от исследователя, мы искусственно переделываем данный метод и добавляем туда некоторую постоянную. В нашем эксперименте это добавка равняется 0.1. Выведем значения новой α на экран после каждой итерации и посмотрим, насколько меняется значение. Оказалось, что в таком случае значения практически не отличается от 0.1 и алгоритм мало отличается от того, если бы использовался МПИ со значением 0.1.

Формула для расчёта α подсказывает почему такое развитие событий возможно. Числитель в формуле крайне мал, а действие оператора на малую величину (в знаменателе) приводит к увеличению нормы результата по сравнению с числителем. Отсюда и получаются малые значения для α.

4.6 Увеличение интервала времени.

Следующий вопрос, интересующий нас, связан с постепенным увеличением длины интервала времени, на котором рассматривается задача. Мы естественно ожидаем, что решение будет стремиться к какому-то постоянному стационарному значению, так как внешнее влияние также постепенно угасает, $f(x,t) = -5\exp(2x - t)$ убывает с ростом времени. Также ожидается, что при вычислениях нам придётся увеличивать параметр N, так как того требует мелкий шаг τ. Приводим результаты серии экспериментов:

Таблица 9. Увеличение интервала времени. $\varepsilon = 0.05$. $y_0 = 0$.

M	T(algorithm)	T(needed)	Отклонение $\|\cdot\|_{L_2}$	n	α
100	2	1	0.0037	1807	0.7
200	4	2	0.0013	1151	0.16
250	5	3	0.0005	1704	0.1
350	7	4	0.0001	3367	0.05
400	8	5	6.94E-5	4809	0.035
550	11	8	3.45E-6	8415	0.02
1000	20	14	8.56E-9	27588	0.0061

При проведении таких экспериментов можно наблюдать как стабилизируется решение задачи. То есть при неограниченном увеличении времени решение стремится к некоторому своему постоянному значению.

5 Заключение.

В данной работе была рассмотрена начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Для нахождения правого граничного условия требуется минимизировать некоторый функционал. Для данного функционала был построен градиент с помощью сопряженной задачи. Оказалось, что градиент выражается через решение сопряженной задачи. Поэтому стало возможным применить один из градиентных методов для минимизации. Был избран метод простой итерации и метод наискорейшего спуска. Далее была построена программа на языке программирования $C++$ для выполнения вычислительных экспериментов. Анализ результатов вычислительных экспериментов дал следующие результаты.

1) Существует проблема уточнения решения на правом конце рассматриваемого интервала. Проблема решается путём расширения рассматриваемого интервала, но при этом результаты рассматривались лишь на его части.

2) Не обязательно параметр ε уменьшать очень сильно.

3) Более мелкое дробление интервала времени оказывается более эффективным по сравнению с дроблением интервала пространственной переменной.

4) Большую роль в количестве вычислений играет начальное приближение. Чем менее начальное приближение отклоняется по норме от точного решения, тем быстрее сходится алгоритм.

5) Метод наискорейшего спуска оказался совершенно неэффективным.

6) С увеличением интервала времени наблюдается стабилизация решения к определённому значению.

Список литературы

[1] *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Новосибирск, Сибирское Научное Издательство, 2009. С. 349–354.

[2] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М., Наука, 1983.

[3] *Серовайский С.Я.* Оптимизация и дифференцирование. Алматы, Издательство Print–S, 2006.

[4] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М., Наука, ГРФМЛ, 1977.

[5] *Васильев Ф.П.* Численные методы решения экстремальных задач. М., Наука, ГРФМЛ, 1977.

[6] *Дейтел Х.М., Дейтел П.Дэж.* Как программировать на С++. М., 4-ое издание, "Бином", 2005.

I.K. Shakenov, *Inverse problems for parabolic equations with infinite horizon of time.* The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №3(70), 36 – 48

In this work we consider one-dimensional initial-boundary value inverse problem with unknown right boundary function for heat conduction equation and additional information on the left edge. It is transformed to optimization problem, that is control theory. The latter is solved numerically and the results are analyzed.

И. К. Шакенов, *Шексiз уақыттағы параболалық теңдеулердiң керi есептерi* ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №3(70), 36 – 48

Бұл жұмыста жылу өткiзгiштiк теңдеулерiнiң сол жақ шекарасында қосымша мәлiметi бар оң жақ шекаралық шарты бойынша бiр өлшемдi бастапқы-шекаралық керi есебi қарастырылады. Бұл есеп оптималдық есепке келтiрiледi, яғни басқару теориясы есебiне келтiрiледi. Соңғы есебi сандық шешiлiп, оның сандық нәтижелерi талданады.