

Применение WENO-схемы (Weighted Essentially Non-Oscillatory) для моделирования течения много-компонентной газовой смеси

А. КАЛТАЕВ, А. АБДАЛЛА

*Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: amr.hassan1@hotmail.com*

Аннотация

Численно исследовано взаимодействие плоского сверхзвукового потока воздуха со струей водорода, вдуваемого перпендикулярно через щель со стенок канала. Построен алгоритм решения осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для течения термический совершенного многокомпонентного газа на основе WENO-схемы. Показано влияние числа Маха струй и отношений давления струй и потока на ударно-волновую структуру течения и глубину проникновения струи.

Введение

Область потока смешивания, следующая из газообразной инъекции, введенной перпендикулярно в сверхзвуковой свободный поток очень сложна, который включает головную ударную волну перед инъекцией, разделением граничного слоя и вихрями. Трудности численного решения не позволяют в полном объеме изучить структуру взаимодействия струи с поперечным потоком для многокомпонентных газов в зависимости от основных параметров (геометрических параметров выбранной схемы вдува, чисел Маха струи и основного потока, отношения удельных теплоемкостей, отношения давлений вдуваемого газа и основного потока). Трудность численного моделирования взаимодействия поперечной струи со сверхзвуковым турбулентным потоком обусловлена тем, что использование схем выше первого порядка вызывает осцилляции в решениях, разрывы в рассчитываемых функциях. При решении искомой проблемы определенные успехи были достигнуты с введением в разностные уравнения дополнительных диссипативных слагаемых, видоизменяющих разностные операторы в окрестности разрыва [1-2]. Так, например, в [1] предложен метод расчета сверхзвуковых течений на основе введения искусственной вязкости с производной четвертого порядка для подавления осцилляций вблизи сильных ударных волн. Это позволило авторам при решении задачи перпендикулярного вдува струи водорода в сверхзвуковой поток воздуха получить представление о характере смешения компонент в области, примыкающей к струе. Численный метод для расчета не только процессов смешения, но и протекания химических реакций в канале ПВРД (прямоточный воздушно-реактивный двигатель) предложен в [2]. На сегодняшний день для решения уравнений Навье - Стокса применяются квази-монотонные консервативные схемы повышенного порядка аппроксимации без введения искусственных диссипативных членов, такие как TVD-схемы (Total Variation Diminution Schemes) [3]. При этом их основной недостаток состоит в том, что в окрестности разрыва решения порядок

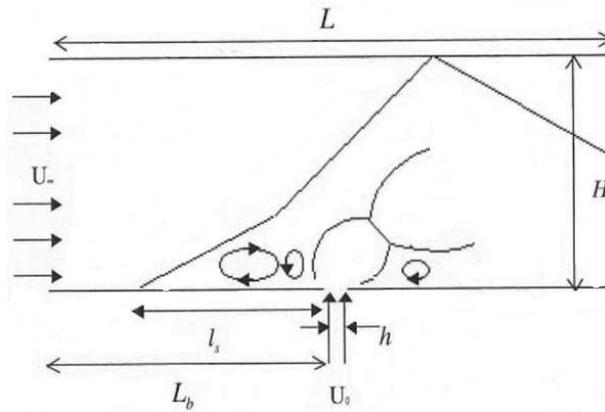


Рис. 1: Схема течения

точности понижается до первого, в результате скачки уплотнения, возникающие в течении, могут быть сильно размазаны. Один из способов решения этой проблемы - использование конечно-разностных схем высокого порядка точности, таких как ENO-схемы (Essentially Non-oscillatory Schemes) [4-6] и WENO-схемы. В настоящей работе на основе разработанной методики решения уравнений Навье - Стокса для течения многокомпонентной газовой смеси численно моделируется плоское сверхзвуковое турбулентное течение воздуха при наличии поперечного вдува водорода со стенок канала. При исследовании для удобства вычисления рассматривается вдув струи с нижней стенки. Схема течения показана на рис. 1.

1. Постановка задачи

Рассмотрим перпендикулярный вдув звуковой (сверхзвуковой) струи водорода в плоский воздушный сверхзвуковой турбулентный поток. Для удобства вычисления предположим, что вдув происходит только с нижней стенки (рис.1).

Исходными уравнениями для рассматриваемой задачи является система двумерных осредненных по Фавру уравнений Навье-Стокса для многокомпонентах газов [7]:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \frac{\partial(\vec{E} - \vec{E}_v)}{\partial x} + \frac{\partial(\vec{F} - \vec{F}_v)}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

$$\vec{U} = (\rho, \rho u, \rho w, E_t, \rho Y_k)^T,$$

$$\vec{E} = (\rho, \rho u^2 + P, \rho u w, (E_t + P)u, \rho u Y_k)^T, \vec{F} = (\rho, \rho u w, \rho w^2 + P, (E_t + P)w, \rho w Y_k)^T$$

$$\vec{E}_v = (0, \tau_{xx}, \tau_{xz}, u\tau_{xx} + w\tau_{xz} - q_x, J_{kx})^T, \vec{F}_v = (0, \tau_{xz}, \tau_{zz}, u\tau_{xz} + w\tau_{zz} - q_z, J_{kz})^T$$

$$P = \frac{\rho T}{\gamma_\infty M^2}, W = \left(\sum_{k=1}^{N_p} \frac{Y_k}{W_k}\right)^{-1}, \sum_{k=1}^{N_p} Y_k = 1 \tag{2}$$

$$E_t = \frac{\rho}{\gamma_\infty M_\infty^2} h - P + \frac{1}{2} \rho (u^2 + w^2), h = \sum_{k=1}^{N_p} Y_k h_k, h_k = h_k^0 + \int_{T_0}^T c_{pk} dT,$$

$$c_{pk} = \frac{C_{pk}}{W_k} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= \frac{\mu}{Re}(2u_x - \frac{2}{3}(u_x + w_z)), \tau_{zz} = \frac{\mu}{Re}(2w_z - \frac{2}{3}(u_x + w_z)), \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\mu}{Re}(u_z + w_x), \\ q_x &= (\frac{\mu}{PrRe} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^{N_p} h_k J_{kx}), q_z = (\frac{\mu}{PrRe} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{1}{\gamma_\infty M_\infty^2} \sum_{k=1}^{N_p} h_k J_{kz}), \\ J_{kx} &= -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial x}, J_{kz} = -\frac{\mu}{ScRe} \frac{\partial Y_k}{\partial z}.\end{aligned}$$

Система (1) записана в безразмерном виде в общепринятых обозначениях, в качестве определяющих приняты параметры потока $(u_\infty, \rho_\infty, T_\infty)$; давление (ρ) и полная энергия (E_t) отнесены к значению $\rho_\infty u_\infty^2$; удельная энтальпия отнесена к $R^0 T_\infty / W_\infty$; молярные удельные теплоемкости (C_{pk}) отнесены к R^0 ; характерным параметром длины является ширина щели. Величина Y_k - массовая концентрация k -ой компоненты; индекс массовой концентрации $k = 1$ соответствует O_2 , $k = 2 - H_2$, $k = 3 - N_2$; $N_p = 3$ - число компонент смеси газов. В искомый вектор системы (1) входят массовые концентрации O_2 и H_2 , W_k - молекулярный вес k -ой компоненты; Re, Pr, Sc - числа Рейнольдса, Прандтля и Шмидта; $\tau_{xx}, \tau_{zz}, \tau_{xz}, \tau_{zx}$ - тензоры вязких напряжений; q_x, q_z, J_{kx}, J_{kz} - тепловые и диффузионные потоки (диффузионные потоки вычисляются по закону Фика); $\mu = \mu_l + \mu_t$ - коэффициенты ламинарной и турбулентной вязкости. Для определения μ_t используется модель Болдуина-Ломакса. Молярные удельные теплоемкости C_{pk} - полиномы четвертой степени относительно температуры, значения эмпирических констант взяты из таблицы JANAF [8].

2. Граничные условия

На входе $P = P_\infty, T = T_\infty, u = M_\infty \sqrt{\frac{\gamma_\infty R_0 T_\infty}{W_\infty}}, w = 0, Y_k = Y_{k\infty}, x = 0, 0 \leq z \leq H$; во входном сечении вблизи стенки задается пограничный слой, при этом скорость и температура аппроксимируются степенным законом;

на щели: $P = nP_\infty, T = T_0, w = M_0 \sqrt{\frac{\gamma_0 R_0 T_0}{W_0}}, u = 0, Y_0 = Y_{k0}, z = 0, L_b \leq x \leq L_b + h$; ($n = P_0 / P_\infty$ степень нерасчетности, P_0, P_∞ - давление в струе и в потоке, M_0, M_∞ - число Маха струи и потока, - относиться к параметрам струи и потока), на нижней стенке задается условие прилипания и теплоизоляции; на верхней границе - условие симметрии; на выходной границе задаются условия не-отражения [9].

3. Метод решения

В областях больших градиентов, т.е. в пограничном слое, вблизи стенки и на уровне щели, вводится сгущение сетки. Тогда система уравнений (1) в преобразованной системе координат запишется в виде

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \eta} = \frac{\partial \tilde{E}_{v2}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{E}_{vm}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{F}_{v2}}{\partial \eta} + \frac{\partial \tilde{F}_{vm}}{\partial \eta} \quad (4)$$

где $\tilde{U} = \vec{U} / J, \tilde{E} = \xi_x \vec{E} / J, \tilde{F} = \eta_z \vec{F} / J, \tilde{E}_{v2} = \xi_x \vec{E}_{v2} / J, \tilde{E}_{vm} = \xi_x \vec{E}_{vm} / J, \tilde{F}_{v2} = \eta_z \vec{F}_{v2} / J, \tilde{F}_{vm} = \eta_z \vec{F}_{vm} / J, J = \partial(\xi, \eta) / \partial(x, z)$ Якобиан преобразования. Параметры преобразования координат следующие:

$$\eta(z) = H [(\beta + 1) - (\beta - 1) \frac{(\beta + 1)^{1 - \frac{z}{a}}}{(\beta - 1)^{1 - \frac{z}{a}}} / [(\frac{\beta + 1}{\beta - 1})^{1 - \frac{z}{a}} + 1]],$$

$$\xi(x) = K + \frac{1}{\tau} \operatorname{arsh}[(\frac{x}{x_c} - 1) \operatorname{sh}(\tau K)], \quad K = \frac{1}{2\tau} \ln[(1 + (e^\tau - 1) \frac{x_c}{L})],$$

β, τ -коэффициенты сгущения, $\beta, \tau > 1$, авысота расчетной области в новой системе координат, x_c точка, относительно которой производится сгущение.

Как известно, при построении схемы Годунова на каждом малой длины h начальные данные функции $u(x, t_n)$. Шаг по времени должен выбирается настолько малым, чтобы решения, полученные для каждых двух соседних стыков, не взаимодействовали. Чтобы совершить следующий шаг по времени, необходимо снова иметь кусочно-постоянные функции. Таким образом, при найденных $v_j^0 = \bar{u}_0(x)$ рассматриваемая задача коши в полосе $t_n < t < t_{n+1}$ для $\lambda > 0$ примет вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad w(x, t_n) = R(x, w_j) \tag{5}$$

Тогда $w(x, t) = R(x - \lambda t; \bar{w}^n)$

$$\bar{w}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} R(x - \lambda t; \bar{w}^n) dx, \tag{6}$$

Где $w_j^n = R^{-1}v^n$ -инвариант Римана.

Из (6) следует, что необходимо знание функции $R(x, w_j^n)$. Согласно методу RP [4] примем ее в виде $R(x, \bar{w}) = \frac{d}{dx} H_m(x, W)$, где $H_m(x, W)$ ест кусочно-полиномиальная функция степени m ; $W(x)$ - первообразная для функции $w(x)$. Тогда (6) запишется как

$$\bar{w}_j^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{i-\frac{1}{2}}^{i+\frac{1}{2}} R(x - \lambda t; \bar{w}^n) dx = \frac{1}{h} (H_m(x_{j+\frac{1}{2}} - \lambda t, W) - H_m(x_{j-\frac{1}{2}} - \lambda t, W)). \tag{7}$$

в качестве полинома $H_m(x, W)$ принимается выпуклая комбинация, которая состоит из m кусочно-полиномиальные функции, каждая функция из этих принимается формула Ньютона третьей степени, алгоритм построения которого приведен в работе[10]. Эта выпуклая комбинация сделана, назначая соответствующие веса, который в зависимости от индикатора гладкости решения IS_j, IS_{j+1}, IS_{j+2} в каждом трафарете S_j, S_{j+1}, S_{j+2} соответственно в $I_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$. индикатор гладкости решения определен как суммирование всех средних чисел квадратных ценностей того же самого порядка различий [11]. Где

$$IS_j = (\Delta^2[w_{j-2}])^2 + \frac{1}{2}[(\Delta[w_{j-1}])^2 + (\Delta[w_{j-2}])^2]. \tag{8}$$

Окончательное решение для $\lambda > 0, \lambda < 0$ запишется в виде

$$\begin{aligned} w_j^{n+1} = w_j^n - \sigma^+ \Delta_- w_j^n - \frac{\sigma^+}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \left[\frac{(1 - \sigma^+)}{2} (\alpha_{0j} \Delta_- w_j^n + \right. \\ \left. w_j^{n+1} = w_j^n - \sigma^+ \Delta_- w_j^n - \frac{\sigma^+}{\sum_{L=0}^2 \alpha_{Lj}} \Delta_- \left[\frac{(1 - \sigma^+)}{2} (\alpha_{0j} \Delta_- w_j^n + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \alpha_{1j} (\Delta_- w_j^n + \Delta_+ w_j^n) + \alpha_{2j} \Delta_+ w_j^n \right) + \right. \\ \left. + \frac{(1 - (\sigma^+)^2)}{6} \left(\frac{1}{2} \alpha_{1j} \Delta_- \Delta_+ w_j^n + \alpha_{2j} \Delta_+ \Delta_+ w_j^n \right) + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(2 - 3\sigma^+ + (\sigma^+)^2)}{6} (\alpha_{0j} \Delta_- \Delta_- w_j^n + \frac{1}{2} \alpha_{1j} \Delta_+ \Delta_+ w_j^n) - \\
& - \sigma^- \Delta_+ w_j^n + \frac{\sigma^-}{\sum_{L=0}^2 \bar{\alpha}_{Lj}} \Delta_+ \left[\frac{(1 + \sigma^-)}{2} (\bar{\alpha}_{0j} \Delta_- w_j^n + \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{1j} (\Delta_- w_j^n + \Delta_+ w_j^n) + \bar{\alpha}_{2j} \Delta_+ w_j^n) + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(1 - (\sigma^-)^2)}{6} (\bar{\alpha}_{0j} \Delta_- \Delta_- w_j^n + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{1j} \Delta_- \Delta_+ w_j^n) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{(2 + 3\sigma^- + (\sigma^-)^2)}{6} (\frac{1}{2} \bar{\alpha}_{1j} \Delta_- \Delta_+ w_j^n + \bar{\alpha}_{2j} \Delta_+ \Delta_+ w_j^n) \right]
\end{aligned} \tag{9}$$

Где

$$\sigma^\pm = \frac{\lambda^\pm \tau}{h}, \lambda^\pm = \frac{\lambda^\pm |\lambda|}{2}, \Delta_+ w_j = w_{j+1} - w_j, \Delta_- w_j = w_j - w_{j-1},$$

$$\alpha_{kj} = \frac{C_{kj}}{(\gamma + IS_{j+k})^3}, \bar{\alpha}_{kj} = \frac{\bar{C}_{kj}}{(\gamma + IS_{j+k})^3}$$

и из [11] $C_{0j} = \frac{1}{12}, C_{1j} = \frac{1}{2}, C_{2j} = \frac{1}{4}, \bar{C}_{0j} = \frac{1}{4}, \bar{C}_{1j} = \frac{1}{2}, \bar{C}_{2j} = \frac{1}{12}$. После осуществления перехода от переменных \bar{w}^n - инвариантов Римана - к переменным \bar{v}^n схема (9) будет иметь вид

$$v_j^{n+1} = v_j^n - \frac{\Delta t}{h} \hat{A}_{j-\frac{1}{2}}^+ \Delta_- f_j^m - \frac{\Delta t}{h} \hat{A}_{j+\frac{1}{2}}^- \Delta_+ f_j^m = 0 \tag{10}$$

Где f_j^m - модифицированный поток на узловых точках j , состоящий из исходного конвективного вектора f_j и добавочных членов высокого порядка точности, а именно:

$$f_j^m = f_j + E_j + D_j$$

при этом векторы E_j, D_j определяются следующим образом:

$$E_j = \frac{1}{(\alpha_{0j} + \alpha_{1j} + \alpha_{2j})} [\alpha_{0j} \bar{E}_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \alpha_{1j} (\bar{E}_{j-\frac{1}{2}} + \bar{E}_{j+\frac{1}{2}}) + \alpha_{2j} \bar{E}_{j+\frac{1}{2}}]$$

$$D_j = \frac{1}{(\alpha_{0j} + \alpha_{1j} + \alpha_{2j})} [\alpha_{0j} \Delta_- \hat{D}_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \alpha_{1j} (\Delta_+ \hat{D}_{j-\frac{1}{2}} + \Delta_- \bar{D}_{j+\frac{1}{2}}) + \alpha_{2j} \Delta_+ \bar{D}_{j+\frac{1}{2}}], \lambda > 0$$

$$D_j = \frac{1}{(\bar{\alpha}_{0j} + \bar{\alpha}_{1j} + \bar{\alpha}_{2j})} [\bar{\alpha}_{0j} \Delta_- \bar{D}_{j-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \bar{\alpha}_{1j} (\Delta_+ \bar{D}_{j-\frac{1}{2}} + \Delta_- \hat{D}_{j+\frac{1}{2}}) + \bar{\alpha}_{2j} \Delta_+ \hat{D}_{j+\frac{1}{2}}], \lambda < 0$$

где

$$\bar{E}_{j+\frac{1}{2}} = \text{sgn}(A_{j+\frac{1}{2}}) (I - \frac{\tau}{h} |A_{j+\frac{1}{2}}|) \Delta + \frac{f_j}{2}$$

$$\bar{D}_{j+\frac{1}{2}} = \text{sgn}(A_{j+\frac{1}{2}}) [(\frac{\tau}{h} |A_{j+\frac{1}{2}}|)^2 - I] \Delta + \frac{f_j}{6}$$

$$\hat{D}_{j+\frac{1}{2}} = \text{sgn}(A_{j+\frac{1}{2}}) [2I - 3\frac{\tau}{h} |A_{j+\frac{1}{2}}| + (\frac{\tau}{h} |A_{j+\frac{1}{2}}|)^2] \Delta + \frac{f_j}{6}$$

$\hat{A}^+ + \hat{A}^- = I, A^\pm = R \Lambda^\pm R^{-1} = R (\frac{\Lambda^\pm |\Lambda|}{2}) R^{-1}; I$ - единичная матрица, матрицы A^\pm рассматриваются как A^\pm / A .

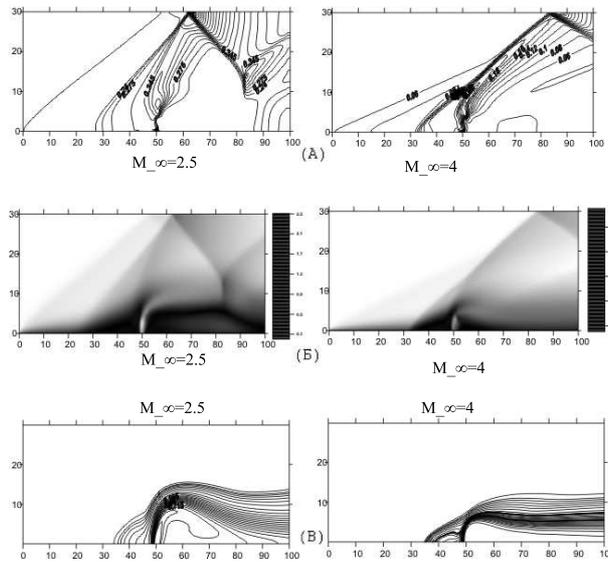


Рис. 2: Изолинии: а - изобары, б - распределение местного числа Маха, в - массовая концентрация водорода

Из (10) следует, что величина модифицированного потока f_j^m совпадает с выражением потока, полученным в работе [12] на основе построения решений вдоль характеристических направлений. Аналогично этой работе уравнения (10) можно формально рассматривать как одностороннюю схему с разностями против потока первого порядка аппроксимации для следующего уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (A^+ + A^-) \frac{\partial f^m}{\partial x} = 0. \tag{11}$$

В уравнении (4) содержащиеся вторые $(\tilde{E}_{v2}, \tilde{F}_{v2})$ и смешанные производные $(\tilde{E}_{vm}, \tilde{F}_{vm})$.

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} + (\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \frac{\partial E^m}{\partial \xi} + (\hat{B}^+ + \hat{B}^-) \frac{\partial F^m}{\partial \eta} - \left[\frac{\partial(\tilde{E}_{v2}, \tilde{E}_{vm})}{\partial \xi} + \frac{\partial(\tilde{F}_{v2}, \tilde{F}_{vm})}{\partial \eta} \right] = 0 \tag{12}$$

Здесь модифицированные векторы потоков имеют вид $E^m = \tilde{E} + E_\xi + D_\xi$ и $F^m = \tilde{F} + E_\eta + D_\eta$. Одношаговая конечно-разностная схема для интегрирования по времени системы (12) будет иметь следующий вид:

$$\Delta \tilde{U}^{n+1} + \Delta t \left[(\hat{A}^+ + \hat{A}^-) \frac{\partial(E^{n+1} + (E_\xi + D_\xi)^n)}{\partial \xi} + (\hat{B}^+ + \hat{B}^-) \frac{\partial(F^{n+1} + (E_\eta + D_\eta)^n)}{\partial \eta} - \left[\frac{\partial(\tilde{E}_{v2}, \tilde{E}_{vm})}{\partial \xi} + \frac{\partial(\tilde{F}_{v2}, \tilde{F}_{vm})}{\partial \eta} \right] \right] = 0 \tag{13}$$

Численное решение осуществляется согласно принципу расщепления методом матричной Прогонки [13]. На каждом шаге по времени в системе уравнений (13) конвективные слагаемые линейризуются с известными значениями на предыдущем слое с номером n : $\tilde{E}^{n+1} = \xi_x A^n \tilde{U}^{n+1}$, $\tilde{F}^{n+1} = \eta_z B^n \tilde{U}^{n+1}$, где $B = \frac{\partial F}{\partial U}$ - матрица Якоби. После этого они записываются как односторонние схемы с разностями против потока первого порядка аппроксимации аналогично (10). Диффузионные члены аппроксимируются с точностью второго порядка, в смешанные производные - по явной схеме со вторым порядком точности.

4. Анализ результатов

Анализ влияния числа Маха потока рассмотрен на примере истечения звуковой струи водорода с нерасчетностью $n = 4$ через щель шириной $h = 0.1$ см и $L = 10, H = 3, L_b = 5$ в поток воздуха с параметрами $M_\infty = 2...4, Pr = 0.9, Re = 10^6$. На рис. 2, а представлено распределение давлений для двух значений числа Маха потока. Как следует из рисунка, общая картина ударно-волновой структуры для этих значений схожа. Перед струей наблюдаются головной, косой и замыкающий скачки уплотнения, которые, пересекаясь в одной точке, образуют сложную А-образную систему скачков уплотнения. Видно, что с увеличением числа Маха потока угол наклона головного скачка уплотнения существенно уменьшается. Это объясняется тем, что с ростом числа Маха потока происходит ускорение основного потока, соответственно для расширяющейся струи появляется добавочное сопротивление. При этом размеры бочки, которую можно наблюдать из рис. 2, б, где представлено распределение местного числа Маха ($M = \sqrt{U^2 + w^2}/c$, c - местная скорость звука), заметно уменьшаются. Влияние числа Маха на дальнобойности вдуваемого водорода можно увидеть из распределения массовой концентрации водорода (рис. 2, в). Численные эксперименты показывают, что при числе Маха потока $M_\infty = 2.5$ линия однопроцентной концентрации водорода максимально поднялась на высоту 1.8 см от стенки канала, в то время как для $M_\infty = 4$ максимальная высота однопроцентной концентрации водорода располагается на высоте 1.125 см. При этом четко наблюдается уменьшение линии перетекания водорода перед струей. В соответствии с этим увеличивается не только дальнобойность вдуваемой струи (глубина проникновения водорода на рис. 2, в), но и длина отрывной зоны перед струей. Описанная в работе численная модель на основе WENO-схемы позволяет моделировать течение многокомпонентных газовых смесей и учитывать такие сложные физические явления, как возникновение скачков уплотнения и вихревых зон. Изучено влияние числа Маха потока на длину отрывной зоны и дальнобойность вдуваемой водородной струи. Разработанная модель может быть распространена на пространственный случай и горение газоздушных смесей.

Список литературы

- [1] *Драммонд Дж. Ф.*, Численный расчет вдува звуковой струи водорода перпендикулярного потоку воздуха в канале // *Ракетная техника и космонавтика.* - 1976. - Т.17, №5. - С. 95-97.
- [2] *Шунь Дж. Ш., Юнь С.*, Численное исследование течений с химическими реакциями на основе LU- факторизованной схемы, построенной методом симметричной последовательной верхней релаксации // *Аэрокосмическая техника.* 1976. №.10.- С. 102-113.
- [3] *IGrasso F., Magi V.* , Simulation of Transverse Gas Injection in Turbulent Supersonic Air Flows// *AIAA Journal* - 1995. - Vol. 33, No 1. - P. 56-62.
- [4] *Harten A., Engquist B., Osher S., Chakravarthy S. R.* Uniformly high order accurate non-oscillatory schemes. III//*J. of Comp. Phys.* 1987. Vol. 71. P. 231-303.

- [5] *HARTEN A., and OSHER S.*, Uniformly high order accurate non-oscillatory schemes. I//*SIAM. J. Numer. Analysis.* 1987. Vol. 24, N 2. P.279-309.
- [6] *Harten A., Osher S., Engquist B., Chakravarthy S. R.*, A new continuation method for complementarity problems with uniform p-functions, *Tech. Report B-194, Tokyo Inst. of Technology, Tokyo, 1987, Dept. of Information Sciences.*
- [7] *Williams F.A.* Combution Theory (Second Edition)., *The Benjamin/Cummings publishing Company, Inc., Menlo Park, USA, 1985, 680p.*
- [8] *Kee R. J., Rupley F. M., Miller J. A.* CHEMKIN-II: a FORTRAN chemical kinetic package for the analysis of gass-phase chemical kinetics, *SANDIA Report SAND89-8009, 1989.*
- [9] *Poinsot T. J., Lele S. K.*, Boundary Conditions for Direct Simulation of Compressible Viscous Flow, *J. of Comput. Phys.* 1992. Vol. 101. P. 104-129.
- [10] *Xu-Dong L., Osher S., Chan T.*, Weighted Essentially Non- Oscillatory Schemes, *J. of Comput. Phys.* 1994. Vol. 115. P. 200-212.
- [11] *Yang J. Y.*,Third Order Non- Oscillatory Schemes for the Euler Equations,*AIAA Journal.* 1991. Vol. 29, No 10. P. 1611-1618.
- [12] *Бекетаева А.О., Найманова А.Ж.*, Численное моделирование сверхзвукового течения с поперечным вдувом струй,*Прикл. механика и Техн. Физика.* 2004. Vol. 45, No 3. С. 367-374.

A. Kaltayev, A. Abdalla , The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №3(70), 70 – 77

The interaction of a planar supersonic air flow with the hydrogen jet injected perpendicularly across the slot from the duct walls is studied numerically. An algorithm is constructed for solving the Favre-averaged Navier - Stokes equations for the flow of a thermally perfect multicomponent gas based on the WENO scheme. The influence of the jet Mach number and the ratio of the jet and flow pressures on the shockwave structure of the flow and the jet penetration depth is shown.

А. Калтаев, А. Абдалла, ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №3(70), 70 – 77

Дыбыс жылдамдығынан жоғары жазық ауа ағынның канал қабырғасындағы қуыстан перпендикуляр шығатын сутегі ағынымен өзара әсері сандық әдіспен зерттелді. Термиалық қаныққан көп компонентті газдың WENO-схема негізінде ағыны үшін Фавр бойынша орташаланған Навье-Стокс теңдеуінің шешу алгоритмы құрылған. Мах санының және қысымның соқпа толқын ағысының құрылымына және кіру тереңдігіне әсері көрсетілді.