К проблеме трех тел-точек с переменными массами

М.Дж. Минглибаев, Г.М. Маемерова
Казахский национальный университет имени аль-Фараби, Алматы,
Астрофизический институт имени В.Г.Фесенкова, Алматы,
e-mail: minglibayev@gmail.com, e-mail: mayemerova@gmail.com

Аннотация

В работе рассмотрены вековые возмущения задачи трех тел с массами, изменяющимися изотропно в различных темпах. Аналитические решения вековых возмущений задачи трех тел с переменными массами получены с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica.*

1 Введение

Реальные космические тела - нестационарные. Со временем изменяются их массы, размеры, формы и структура распределения масс внутри тел [1–3]. Эти процессы особенно интенсивно происходят в двойных и кратных системах [4]. В связи с этим, исследуется задача трех тел с массами, изменяющимися в различных темпах изотропно. Тела предполагаются как материальные точки. На основе теории возмущений на базе апериодического движения по квазиконическому сечению [5] исследуются вековые возмущения задачи трех тел-точек с переменными массами.

2 Постановка задачи

Рассмотрим движения взаимогравитирующих трех тел с переменными массами, изотропно изменяющиеся в различных темпах:

$$m_0 = m_0(t), \quad m_1 = m_1(t), \quad m_2 = m_2(t), \quad \frac{\dot{m}_i}{m_i} \neq \frac{\dot{m}_j}{m_j}, \quad i \neq j. \tag{2.1}$$

в системе координат Якоби [5–6]:

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \mathrm{grad}_{\vec{r}_1} U, \quad \mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \mathrm{grad}_{\vec{r}_2} U - \mu_2 (2\dot{\nu}_1 \dot{\vec{r}}_1 + \ddot{\nu}_1 \vec{r}_1), \tag{2.2}$$

здесь

$$\mu_1 = \mu_1(t) = \frac{m_1 m_0}{m_0 + m_1} \neq const, \quad \mu_2 = \mu_2(t) = \frac{m_2(m_1 + m_0)}{m_0 + m_1 + m_2} \neq const, \tag{2.3}$$

$$U = f\left(\frac{m_0 m_1}{r_{01}} + \frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right), \tag{2.4}$$

$$r_{01}^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = r_1^2, \quad r_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2, \tag{2.5}$$

$$r_{01}^2 = (x_2 + \nu_1 x_1)^2 + (y_2 + \nu_1 y_1)^2 + (z_2 + \nu_1 z_1)^2, \tag{2.6}$$

$$r_{02}^2 = (x_2 - \nu_0 x_1)^2 + (y_2 - \nu_0 y_1)^2 + (z_2 - \nu_0 z_1)^2, \tag{2.7}$$

$$\nu_1 = \nu_1(t) = \frac{m_1}{m_0 + m_1} \neq const, \quad \nu_0 = \nu_0(t) = \frac{m_0}{m_0 + m_1} \neq const, \tag{2.8}$$

а f – гравитационная постоянная.

3 Уравнения движения в оскулирующих элементах

Исследуем задачу, которая описывается уравнениями движения (2.2) используя теорию возмущения на базе апериодического движения по квазиконическому сечению [5].

$$\mu_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \mathrm{grad}_{\vec{r}_1}\left(f\frac{m_1 m_0}{r_1}\right) + b_1\vec{r}_1 + \mathrm{grad}_{\vec{r}_1} R_1, \tag{3.1}$$

$$\mu_2 \ddot{\vec{r}}_2 = \mathrm{grad}_{\vec{r}_2}\left(f\frac{m_2(m_1+m_0)}{r_2}\right) + b_2\vec{r}_2 + \mathrm{grad}_{\vec{r}_2} R_2, \tag{3.2}$$

где

$$b_1 = b_1(t) = \mu_1\frac{\ddot{\gamma}_1}{\gamma_1}, \quad \gamma_1 = \gamma_1(t) = \frac{m_0(t_0)}{m_0(t)}, \tag{3.3}$$

$$b_2 = b_2(t) = \mu_2\frac{\ddot{\gamma}_2}{\gamma_2}, \quad \gamma_2 = \gamma_2(t) = \frac{m_0(t_0)+m_1(t_0)}{m_0(t)+m_1(t)}, \tag{3.4}$$

$$R_1 = -\frac{1}{2}b_1 r_1^2 + W, \quad R_2 = -\frac{1}{2}b_2 r_2^2 + W - V, \tag{3.5}$$

$$W = f\left(\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0+m_1)}{r_2}\right), \tag{3.6}$$

$$V = \mu_2\left[\left(2\dot{\nu}_1\dot{x}_1 + \ddot{\nu}_1 x_1\right)x_2 + \left(2\dot{\nu}_1\dot{y}_1 + \ddot{\nu}_1 y_1\right)y_2 + \left(2\dot{\nu}_1\dot{z}_1 + \ddot{\nu}_1 z_1\right)z_2\right]. \tag{3.7}$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{2}\mu_1\left(\dot{x}_1^2+\dot{y}_1^2+\dot{z}_1^2\right), \quad K_2 = \frac{1}{2}\mu_2\left(\dot{x}_2^2+\dot{y}_2^2+\dot{z}_2^2\right), \\ U_1 &= f\frac{m_1 m_0}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}} + \frac{1}{2}b_1\left(x_1^2+y_1^2+z_1^2\right) + R_1, \\ U_2 &= f\frac{m_2(m_0+m_1}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}} + \frac{1}{2}b_2\left(x_2^2+y_2^2+z_2^2\right) + R_2, \end{aligned} \tag{3.8}$$

и переходя к новым переменным:

$$x_i = \gamma_i\rho_i\cos\varphi_i\cos\theta_i, \quad y_i = \gamma_i\rho_i\cos\varphi_i\sin\theta_i, \quad z_i = \gamma_i\rho_i\sin\varphi_i, \tag{3.9}$$

тогда уравнения движения в переменных:

$$\begin{aligned} \rho_i, \quad P_{\rho_i} &= \frac{\partial K_i}{\partial\dot{\rho}_i} = \mu_i\gamma_i^2\dot{\rho}_i + \mu_i\gamma_i\dot{\gamma}_i\rho_i, \\ \varphi_i, \quad P_{\varphi_i} &= \frac{\partial K_i}{\partial\dot{\varphi}_i} = \mu_i\gamma_i^2\rho_i^2\dot{\varphi}_i, \\ \theta_i, \quad P_{\theta_i} &= \frac{\partial K_i}{\partial\dot{\theta}_i} = \mu_i\gamma_i^2\rho_i^2\cos^2\varphi_i\dot{\theta}_i, \end{aligned} \tag{3.10}$$

можно написать в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{\rho}_i = \frac{\partial H_i}{\partial P_{\rho_i}}, \quad \dot{P}_{\rho_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial \rho_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} P_{\rho_i}, \\
&\dot{\varphi}_i = \frac{\partial H_i}{\partial P_{\varphi_i}}, \quad \dot{P}_{\varphi_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial \varphi_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} P_{\varphi_i}, \\
&\dot{\theta}_i = \frac{\partial H_i}{\partial P_{\theta_i}}, \quad \dot{P}_{\theta_i} = -\frac{\partial H_i}{\partial \theta_i} + \frac{\dot{\mu}_i}{\mu_i} P_{\theta_i},
\end{aligned}\right\} \tag{3.11}$$

соответственно

$$\begin{aligned}
U_1^* &= f\frac{m_1 m_0}{\gamma_1 \rho_1} + \frac{1}{2}\left(b_1\gamma_1^2 + \mu_1\dot{\gamma}_1^2\right)\rho_1^2 + R_1, \\
U_2^* &= f\frac{m_2(m_0+m_1)}{\gamma_2 \rho_2} + \frac{1}{2}\left(b_2\gamma_2^2 + \mu_2\dot{\gamma}_2^2\right)\rho_2^2 + R_2, \\
H_i &= \frac{1}{2\mu_i\gamma_i^2}\left[\left(P_{\rho_i} - \mu_i\gamma_i\dot{\gamma}_i\rho_i\right)^2 + \frac{P_{\varphi_i}^2}{\rho_i^2} + \frac{P_{\theta_i}^2}{\rho_i^2\cos^2\varphi_i}\right] - U_i^*, \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Вводя новые импульсы:

$$\begin{aligned}
&P_{\rho_i} = \psi_i\tilde{P}_{\rho_i}, \quad P_{\varphi_i} = \psi_i\tilde{P}_{\varphi_i}, \quad P_{\theta_i} = \psi_i\tilde{P}_{\theta_i}, \\
&\psi_i = \psi_i(t) = \frac{\mu_i}{\mu_{i0}} = \frac{\mu_i(t)}{\mu_i(t_0)}, \quad i = 1, 2,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

напишем уравнения движения в канонической форме:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\rho}_i &= \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\rho_i}}, \quad \dot{\varphi}_i = \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\varphi_i}}, \quad \dot{\theta}_i = \frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \tilde{P}_{\theta_i}}, \\
\dot{\tilde{P}}_{\rho_i} &= -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \rho_i}, \quad \dot{\tilde{P}}_{\varphi_i} = -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \varphi_i}, \quad \dot{\tilde{P}}_{\theta_i} = -\frac{\partial \tilde{H}_i}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2,
\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

где

$$\tilde{H}_i = \tilde{H}_{i0} + \tilde{H}_{i1}, \quad i = 1, 2, \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{H}_{10} &= \frac{\psi_1}{2\mu_1\gamma_1^2}\left[\left(\tilde{P}_{\rho_1} - \frac{\mu_1\gamma_1\dot{\gamma}_1}{\psi_1}\rho_1\right)^2 + \frac{\tilde{P}_{\psi_1}^2}{\rho_1^2} + \frac{\tilde{P}_{\theta_1}^2}{\rho_1^2\cos^2\varphi_1}\right] - \\
&\quad - f\frac{m_1 m_0}{\psi_1\gamma_1\rho_1} - \frac{1}{\psi_1}\left(b_1\gamma_1^2 + \mu_1\dot{\gamma}_1^2\right)\rho_1^2, \\
\tilde{H}_{20} &= \frac{\psi_2}{2\mu_2\gamma_2^2}\left[\left(\tilde{P}_{\rho_2} - \frac{\mu_2\gamma_2\dot{\gamma}_2}{\psi_2}\rho_2\right)^2 + \frac{\tilde{P}_{\psi_2}^2}{\rho_2^2} + \frac{\tilde{P}_{\theta_2}^2}{\rho_2^2\cos^2\varphi_2}\right] - \\
&\quad - f\frac{m_2(m_0+m_1)}{\psi_2\gamma_2\rho_2} - \frac{1}{\psi_2}\left(b_2\gamma_2^2 + \mu_2\dot{\gamma}_2^2\right)\rho_2^2,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\tilde{H}_{11} = -\frac{1}{\psi_1} R_1, \quad \tilde{H}_{21} = -\frac{1}{\psi_2} R_2. \tag{3.17}$$

При $R_1 = R_2 = 0$ уравнения (3.14)-(3.16) интегрируются методом Гамильтона-Якоби [5, 6], причем постоянные интегрирования:

$$\alpha_{1i}, \quad \alpha_{2i}, \quad \alpha_{3i}, \quad \beta_{1i}, \quad \beta_{2i}, \quad \beta_{3i}, \quad i = 1, 2, \tag{3.18}$$

есть аналоги соответствующих элементов Якоби в классической задаче двух тел (точек) постоянной массы. Каждая система уравнений (3.14)-(3.16) определяет апериодическое движение по квазиконическому сечению:

$$\rho_i = \rho_i(t) = \frac{p_i}{1 + e_i \cos \upsilon_i}, \quad \upsilon_i = u_i - \omega_i, \quad p_i = a_i(1 - e_i^2), \quad i = 1, 2, \tag{3.19}$$

$$\dot{\rho}_i = \dot{\rho}_i(t) = \frac{1}{\mu_{i0}\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_i}{\sqrt{p_i}} e_i \sin \upsilon_i, \quad \dot{u}_i = \frac{1}{\mu_{i0}\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_i \sqrt{p_i}}{\rho_i^2}, \quad i = 1, 2, \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_1^2 &= \tilde{\beta}_1^2(t) = f \cdot \mu_1(t_0) m_1(t_0) m_0(t_0), \\ \tilde{\beta}_2^2 &= \tilde{\beta}_2^2(t) = f \cdot \mu_2(t_0) m_2(t_0) \left[m_0(t_0) + m_1(t_0) \right], \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\upsilon_i}{2} = \frac{\sqrt{1 + e_i}}{\sqrt{1 - e_i}} \operatorname{tg} \frac{E_i}{2}, \quad e_i < 1, \quad i = 1, 2,$$

$$E_i - e_i \sin E_i = M_i, \quad i = 1, 2, \tag{3.22}$$

$$M_i = n_i \left[\phi_i(t) - \phi_i(\tau_i) \right], \quad n_i = \frac{\tilde{\beta}_i}{\mu_{i0} a_i^{3/2}}, \quad i = 1, 2, \tag{3.23}$$

где $\phi_1(t)$, $\phi_2(t)$ первообразные функции соответственно $\gamma_1^{-2}(t)$ и $\gamma_2^{-2}(t)$,

$$a_i, \quad e_i, \quad \omega_i, \quad \Omega_i, \quad i_i, \quad \phi_i(\tau_i), \quad i = 1, 2, \tag{3.24}$$

элементы орбиты – аналоги соответствующих кеплеровских элементов, причем

$$\begin{aligned} -2\alpha_{1i} = \frac{\tilde{\beta}_i^2}{\mu_{i0} a_i}, \quad \alpha_{2i} &= \tilde{\beta}_i \sqrt{p_i}, \quad \alpha_{3i} = \tilde{\beta}_i \sqrt{p_i} \cos i_i, \\ \beta_{1i} = -\phi(\tau_i), \qquad \beta_{2i} &= \omega_i, \qquad \beta_{3i} = \Omega_i, \qquad\qquad i = 1, 2, \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \gamma_i \rho_i \left[\cos u_i \cdot \cos \Omega_i - \sin u_i \cdot \sin \Omega_i \cdot \cos i_i \right], \\ y_i &= \gamma_i \rho_i \left[\cos u_i \cdot \sin \Omega_i + \sin u_i \cdot \cos \Omega_i \cdot \cos i_i \right], \\ z_i &= \gamma_i \rho_i \left[\sin u_i \cdot \sin i_i \right], \quad r_i = \gamma_i \rho_i, \quad i = 1, 2, \end{aligned} \right\} \tag{3.26}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) x_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i \cdot \left[-\sin u_i \cdot \cos \Omega_i - \cos u_i \cdot \sin \Omega_i \cdot \cos i_i \right], \\ \dot{y}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) y_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i \cdot \left[-\sin u_i \cdot \sin \Omega_i + \cos u_i \cdot \cos \Omega_i \cdot \cos i_i \right], \\ \dot{z}_i &= \left(\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} + \frac{\dot{\rho}_i}{\rho_i} \right) z_i + \gamma_i \rho_i \dot{u}_i \cdot \left[\cos u_i \cdot \sin i_i \right], \quad i = 1, 2, \end{aligned} \right\} \tag{3.27}$$

Уравнения (3.14)-(3.17) в системе переменных (3.18) как уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{k1} &= \frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial \beta_{k1}}, \quad \dot{\beta}_{k1} = -\frac{\partial \tilde{R}_1}{\partial \alpha_{k1}}, \quad k = 1, 2, 3, \\ \dot{\alpha}_{k2} &= \frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial \beta_{k2}}, \quad \dot{\beta}_{k2} = -\frac{\partial \tilde{R}_2}{\partial \alpha_{k2}}, \quad k = 1, 2, 3,\end{aligned} \tag{3.28}$$

где

$$\tilde{R}_i = \frac{1}{\psi_i} R_i(t,\, \alpha_{k1},\, \beta_{k1},\, \alpha_{k2},\, \beta_{k2}), \quad i = 1, 2, \tag{3.29}$$

4 Уравнения возмущенного движения в аналогах элементов Делоне

Введем аналоги элементов Делоне:

$$L_i, \quad G_i, \quad H_i, \quad l_i, \quad g_i, \quad h_i, \quad i = 1, 2, \tag{4.1}$$

посредством формул:

$$\begin{array}{llll} -2\alpha_{1i} = \frac{\tilde{\beta}_i^4}{\mu_{i0} L_i^2}, & \alpha_{2i} = G_i, & \alpha_{3i} = H_i, & \\ \beta_{1i} = \frac{l_i}{n_i} - \phi_i(t), & \beta_{2i} = g_i, & \beta_{3i} = h_i, & i = 1, 2, \end{array} \tag{4.2}$$

уравнения возмущенного движения в аналогах элементов Делоне (4.1) имеют вид:

$$\left.\begin{array}{llll} \dot{L}_i = \dfrac{\partial R_i^*}{\partial l_i}, & \dot{G}_i = \dfrac{\partial R_i^*}{\partial g_i}, & \dot{H}_i = \dfrac{\partial R_i^*}{\partial h_i}, & \\ \dot{l}_i = -\dfrac{\partial R_i^*}{\partial L_i}, & \dot{g}_i = -\dfrac{\partial R_i^*}{\partial G_i}, & \dot{h}_i = -\dfrac{\partial R_i^*}{\partial H_i}, & i = 1, 2, \end{array}\right\} \tag{4.3}$$

где

$$R_i^* = \frac{1}{\gamma_i^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_i^4}{2\mu_{i0} L_i^2} + \tilde{R}_i, \quad i = 1, 2. \tag{4.4}$$

В явном виде, учитывая формулы (4.4), (3.27), (3.5) - (3.7), получим:

$$R_1^* = \frac{1}{\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_1^4}{2\mu_{10} L_1^2} + \frac{1}{\psi_1}\left[-\frac{b_1}{2} r_1^2 + f\left(\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0 + m_1)}{r_2}\right)\right], \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} R_2^* = {} & \tfrac{1}{\gamma_2^2(t)} \cdot \tfrac{\tilde{\beta}_2^4}{2\mu_{20} L_2^2} + \tfrac{1}{\psi_2}\left[-\tfrac{b_2}{2} r_2^2 + f\left(\tfrac{m_0 m_2}{r_{02}} + \tfrac{m_1 m_2}{r_{12}} - \tfrac{m_2(m_0+m_1)}{r_2}\right)\right] - \\ & - \tfrac{\mu_2}{\psi_2}\left[\left(2\dot{\nu}_1 \dot{x}_1 + \ddot{\nu}_1 x_1\right) x_2 + \left(2\dot{\nu}_1 \dot{y}_1 + \ddot{\nu}_1 y_1\right) y_2 + \left(2\dot{\nu}_1 \dot{z}_1 + \ddot{\nu}_1 z_1\right) z_2\right], \end{aligned} \tag{4.6}$$

Вековые возмущения определяются уравнениями (4.3), если осреднить возмущающие функции (4.5)-(4.6) по средним аномалиям l_1, l_2:

$$R_{1sec} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} R_1^* dl_1 dl_2, \quad R_{2sec} = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\!\!\int_0^{2\pi} R_2^* dl_1 dl_2, \tag{4.7}$$

тогда

$$\dot{L}_1 = 0, \quad \dot{L}_2 = 0, \tag{4.8}$$

поэтому вековые возмущения в рассматриваемой задаче определяются системой дифференциальных уравнений восьмого порядка:

$$\left.\begin{array}{lll} \dot{G}_i = \dfrac{\partial R_{isec}}{\partial g_i}, & \dot{g}_i = -\dfrac{\partial R_{isec}}{\partial G_i}, & \\ \dot{H}_i = \dfrac{\partial R_{isec}}{\partial h_i}, & \dot{h}_i = -\dfrac{\partial R_{isec}}{\partial H_i}, & i = 1, 2, \end{array}\right\} \tag{4.9}$$

5 Уравнения возмущенного движения в аналогах второй системы элементов Пуанкаре

Как и в классическом случае в нашей задаче предпочтительны аналоги второй системы элементов Пуанкаре [5, 6, 9]:

$$\Lambda_i, \quad \lambda_i, \quad \xi_i, \quad \eta_i, \quad p_i, \quad q_i, \quad i = 1, 2, \tag{5.1}$$

которые определяются формулами:

$$\left.\begin{array}{lll} \Lambda_i = L_i, & \lambda_i = l_i + g_i + h_i, & \\ \xi_i = \sqrt{2(L_i - G_i)}\cos(g_i + h_i), & \eta_i = -\sqrt{2(L_i - G_i)}\sin(g_i + h_i), & \\ p_i = \sqrt{2(G_i - H_i)}\cos h_i, & q_i = -\sqrt{2(G_i - H_i)}\sin h_i, & i = 1, 2. \end{array}\right\} \tag{5.2}$$

Уравнения возмущенного движения имеют вид:

$$\left.\begin{array}{llll} \dot{\Lambda}_i = \dfrac{\partial R_i^*}{\partial \lambda_i}, & \dot{\xi}_i = \dfrac{\partial R_i^*}{\partial \eta_i}, & \dot{p}_i = \dfrac{\partial R_i^*}{\partial q_i}, & \\ \dot{\lambda}_i = -\dfrac{\partial R_i^*}{\partial \Lambda_i}, & \dot{\eta}_i = -\dfrac{\partial R_i^*}{\partial \xi_i}, & \dot{q}_i = -\dfrac{\partial R_i^*}{\partial p_i}, & i = 1, 2. \end{array}\right\} \tag{5.3}$$

Соответственно вековые возмущения определяются уравнениями:

$$\dot{\Lambda}_1 = 0, \quad \dot{\Lambda}_2 = 0, \tag{5.4}$$

$$\left.\begin{array}{lll} \dot{\xi}_i = \dfrac{\partial R_{isec}}{\partial \eta_i}, & \dot{p}_i = \dfrac{\partial R_{isec}}{\partial q_i}, & \\ \dot{\eta}_i = -\dfrac{\partial R_{isec}}{\partial \xi_i}, & \dot{q}_i = -\dfrac{\partial R_{isec}}{\partial p_i}, & i = 1, 2, \end{array}\right\} \tag{5.5}$$

где R_{1sec}, R_{2sec} – соответствующая вековая часть следующих выражений:

$$R_{1sec} = \frac{1}{\gamma_1^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_1^4}{2\mu_{10}L_1^2} + \frac{1}{\psi_1}\left[-\frac{b_1}{2}\gamma_1^2\rho_1^2 + f\left(\frac{m_0m_2}{r_{02}} + \frac{m_1m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0+m_1)}{\gamma_2\rho_2}\right)\right], \tag{5.6}$$

$$\begin{array}{rl} R_{2sec} = & \frac{1}{\gamma_2^2(t)} \cdot \frac{\tilde{\beta}_2^4}{2\mu_{20}L_2^2} + \frac{1}{\psi_2}\left[-\frac{b_2}{2}\gamma_2^2\rho_2^2 + f\left(\frac{m_0m_2}{r_{02}} + \frac{m_1m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0+m_1)}{\gamma_2\rho_2}\right)\right] - \\ & -\frac{\mu_2}{\psi_2}\left[(2\dot{\nu}_1\dot{x}_1 + \ddot{\nu}_1x_1)\,x_2 + (2\dot{\nu}_1\dot{y}_1 + \ddot{\nu}_1y_1)\,y_2 + (2\dot{\nu}_1\dot{z}_1 + \ddot{\nu}_1z_1)\,z_2\right], \end{array} \tag{5.7}$$

6 Разложение возмущающей функции

Для вычисления вековых частей возмущенных функций необходимо вычислить вековую часть следующих величин:

$$F_{sec} = \left[\frac{m_0 m_2}{r_{02}} + \frac{m_1 m_2}{r_{12}} - \frac{m_2(m_0+m_1)}{\gamma_2 \rho_2}\right]_{sec} = \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right]_{sec}, \tag{6.1}$$

$$F_{\rho sec} = \left[\frac{b_1\gamma_1^2}{2\psi_1}\rho_1^2 + \frac{b_2\gamma_2^2}{2\psi_2}\rho_2^2\right]_{sec}, \tag{6.2}$$

$$V_{sec} = \frac{\mu_2}{\psi_2}\left[\left(2\dot{\nu}_1\dot{x}_1 + \ddot{\nu}_1 x_1\right)x_2 + \left(2\dot{\nu}_1\dot{y}_1 + \ddot{\nu}_1 y_1\right)y_2 + \left(2\dot{\nu}_1\dot{z}_1 + \ddot{\nu}_1 z_1\right)z_2\right]_{sec}. \tag{6.3}$$

В настоящей работе ограничимся случаем:

$$\nu_1 = const, \tag{6.4}$$

который приводит к

$$V_{sec} = 0, \tag{6.5}$$

и следовательно, в аналогах второй системы элементов Пуанкаре упрощаются вековые выражения для R_{1sec}, R_{2sec}:

$$R_{1sec} = \frac{1}{\gamma_1^2(t)}\cdot\frac{\tilde{\beta}_1^4}{2\mu_{10}\Lambda_1^2} + \frac{1}{\psi_1}\left[-\frac{b_1}{2}\frac{\gamma_1^2\mu_0^2}{\Lambda_1^4}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\xi_1^2+\eta_1^2}{\Lambda_1}\right) + F_{sec}\right], \tag{6.6}$$

$$R_{2sec} = \frac{1}{\gamma_2^2(t)}\cdot\frac{\tilde{\beta}_2^4}{2\mu_{20}\Lambda_2^2} + \frac{1}{\psi_2}\left[-\frac{b_2}{2}\frac{\gamma_2^2\mu_0^2}{\Lambda_2^4}\left(1+\frac{3}{2}\frac{\xi_2^2+\eta_2^2}{\Lambda_2}\right) + F_{sec}\right], \tag{6.7}$$

$$F_{sec} = \left[\frac{m_1 m_2}{r_{12}}\right]_{sec}, \tag{6.8}$$

Выражения $F_{sec} = F_{sec}(t,\, \xi_1,\, \eta_1,\, p_1,\, q_1,\, \xi_2,\, \eta_2,\, p_2,\, q_2)$ полученные с помощью системы MATHEMATICA [7, 8] очень громоздкие. В связи с этим выражение (6.8) можно записать в виде:

$$F_{sec} = \sum_{i=1}^{534}\Pi_i^*(t)P_i(\ni_k) + \sum_{j=1}^{3}\tilde{\Pi}_j(\Lambda_1, \Lambda_2, t), \tag{6.9}$$

здесь $P_i(\eta_i)$ - квадратичная функция переменных ξ_i, η_i, p_i, q_i. Подставляя уравнения (6.6)-(6.7) в (5.5) получаем:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \Pi_1(t)\eta_1 + \Pi_2(t)\eta_2, & \dot{\eta}_1 &= \Pi_1(t)\xi_1 + \Pi_2(t)\xi_2,\\ \dot{\xi}_2 &= \Pi_1(t)\eta_1 + \Pi_3(t)\eta_2, & \dot{\eta}_2 &= \Pi_1(t)\xi_1 + \Pi_3(t)\xi_2, \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{p}_1 &= \Pi_4(t)q_1 + \Pi_5(t)q_2, & \dot{q}_1 &= \Pi_4(t)p_1 + \Pi_5(t)p_2,\\ \dot{p}_2 &= \Pi_5(t)q_1 + \Pi_6(t)q_2, & \dot{q}_2 &= \Pi_5(t)p_1 + \Pi_6(t)p_2, \end{aligned}\right\} \tag{6.11}$$

где

$$\Pi_1(t) = -\frac{fk_2 m_1 m_2\Big\{6(k_1^3\Lambda_1^4 + k_2^2\Lambda_2^4)(6C_0 - C_2) - k_1\Lambda_1^2\Lambda_2^2\big[2k_1(B_2+18B_0) + 3k_2C_1(4+3k_1)\big]\Big\}}{32k_1^2\Lambda_1^{5/2}\Lambda_2^{5/2}\psi_1},$$

$$\Pi_2(t)=\frac{-24\Lambda_2^4\mu_0^2\mu_1\gamma_1\ddot{\gamma}_1+f\Lambda_1^4m_1m_2\left\{12k_1\Lambda_1^2\left[k_1\Lambda_1^2C_0-\Lambda_2^2\left(B_0+k_2C_1\right)\right]+k_2\Lambda_2^4\left[3k_2(10C_0-3C_2)-4B_1\right]\right\}}{16\Lambda_1^5\Lambda_2^4\psi_1},$$

$$\Pi_3(t)=\frac{-24k_1^4\Lambda_1^4\mu_0^2\mu_2\gamma_2\ddot{\gamma}_2+fk_2\Lambda_2^4m_1m_2\left\{12k_2\Lambda_2^2\left[k_2^2\Lambda_2^2C_0-k_1^2\Lambda_1^2(B_0+k_2C_1)\right]-k_1^4\Lambda_1^4\left[4B_1+3k_2(3C_2-10C_0)\right]\right\}}{16\Lambda_1^5\Lambda_2^4\psi_1},$$

$$\Pi_4(t)=-\frac{fk_2B_1m_1m_2}{8\Lambda_1\psi_1},\quad \Pi_5(t)=-\frac{fk_2B_1m_1m_2}{8sqrt\Lambda_1 sqrt\Lambda_2\psi_1},\quad \Pi_6(t)=-\frac{fk_2B_1m_1m_2}{8\Lambda_2\psi_2},$$

а величины

$$A_0=\frac{4\mu_0}{\pi\Lambda_2^2}F(\alpha),\quad A_1=\frac{4\mu_0}{\pi\alpha\Lambda_2^2}\left[F(\alpha)-E(\alpha)\right],\quad A_2=\frac{2}{3}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)A_1-\frac{1}{3}A_0,$$

$$B_0=\frac{(1+\alpha^2)\alpha}{(1-\alpha^2)^2}A_0-\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}A_1,\ B_1=\frac{2\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}A_0-\frac{(1+\alpha^2)\alpha}{(1-\alpha^2)^2}A_1,\ B_2=\frac{(1+\alpha^2)\alpha}{(1-\alpha^2)^2}A_0-\frac{2(1+\alpha^2)^2-6\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}A_1,$$

$$C_0=\frac{(3+10\alpha^2+3\alpha^4)\alpha^2}{(1-\alpha^2)^2}A_0-\frac{2\alpha^2(1+\alpha+\alpha^3)}{(1-\alpha^2)^2}A_1,\quad C_1=\frac{8\alpha^3(1+\alpha^2)}{3(1-\alpha^2)^4}A_0-\frac{\alpha^2(1+14\alpha^2+\alpha^4)}{3(1-\alpha^2)^4}A_1,$$

$$C_2=\frac{(1+22\alpha^2+\alpha^4)\alpha^2}{3(1-\alpha^2)^4}A_0-\frac{2\alpha^2(1+5\alpha^2+5\alpha^4+\alpha^6)}{3(1-\alpha^2)^4}A_1,$$

есть коэффициенты Лапласа [6], причем $F(\alpha)$ – эллиптический интеграл первого рода, $E(\alpha)$ – эллиптический интеграл второго рода, и

$$\alpha=\alpha(t)=\alpha_0\cdot m_{00}\cdot\frac{m_1}{m_0(m_0+m_1)},\quad \alpha_0=\frac{a_{10}}{a_{20}}=const,\quad m_{00}=m_0(t_0),\quad m_{10}=m_1(t_0),$$

$$k_1=k_1(t)=m_{00}\cdot\frac{m_1}{m_0(m_0+m_1)},\quad k_2=k_2(t)=\frac{m_1}{m_0}\cdot\frac{m_{00}}{m_{00}+m_{10}},$$

Пользуясь методом Пикара напишем полные вековые возмущения первого порядка

$$\ni_k(t)-\ni_{k0}(t_0)=\sum_i\ni_i(t_0)\int_{t_0}^{t}\Pi_i(t)dt, \tag{6.12}$$

где $\ni_k$ – элементы ξ_i, η_i, p_i, q_i, а $\ni_{k0}=$ $const$. Приближенно-аналитические решения (6.12), системы дифференциальных уравнений вековых возмущений (6.10)–(6.11) дают возможность анализировать изменения эксцентриситетов e_1, e_2, наклонностей i_1, i_2, аргумента перицентров ω_1, ω_2 и движения долготы восходящих узлов Ω_1, Ω_2, долготы перицентров π_1, π_2 [5, 6]:

$$e_i^2=\frac{\xi_i^2+\eta_i^2}{\Lambda_i},\quad \sin^2 i_i=\frac{p_i^2+q_i^2}{\Lambda_i},\quad i=1,2, \tag{6.13}$$

$$\Omega_i=-\operatorname{arctg}\frac{q_i}{p_i},\quad \pi_i=-\operatorname{arctg}\frac{\eta_i}{\xi_i},\quad \omega_i=\pi_i-\Omega_i,\quad i=1,2. \tag{6.14}$$

Список литературы

[1] *Омаров Т. Б.* Динамика гравитирующих систем Метагалактики - Алматы: Наука, (1975).

[2] *Omarov T. B. (Editor).* Non-Stationary Dynamical Problems in Astronomy - New-York: Nova Science Publ. Inc., (2002).

[3] *Bekov A. A., Omarov T. B.* The theory of Orbits in Non-Stationary Stellar Systems // Astron. and Astrophys. Transactions, T. 22, (2003), c.145.

[4] *Лукъянов Л. Г.* Динамическая эволюция орбит звезд в тесных двойных системах с консервативным обменом масс // Астрон. ж., Т. 85, № 8, (2008), с.755-768.

[5] *Минглибаев М.Ж.* Динамика нестационарных гравитирующих систем - Алматы: изд. Казахского НациональногоУниверситета, (2009), 209 с.

[6] *Шарлье К.* Небесная механика - Москва, (1966), 628 с.

[7] *Гребеников Е.А.* Математические проблемы гомографической динамики - Москва: МАКС Пресс, (2010), 256 с.

[8] *Прокопеня А.Н.* Решение физических задач с использованием системы MATHEMATICA - Брест: Издательство БГТУ, (2005), 260с.

[9] *Minglibayev M., Mayemerova G.* Secular perturbations in the three-body problem with variable masses // The Sixth International Workshop. Computer algebra systems in teaching and research - Poland, Siedlce: Wydawnictwo Collegium Mazovia, (2011), c. 198-204.

M.Zh. Minglibayev, G.M. Mayemerova, To the problem of three-body-points with variable masses, The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №3(70), 78 – 86

In given article are considered secular perturbations in the three-body problem with masses, changing isotropically by different specific rates. The analytical expressions of secular perturbations in the three-body problem with variable masses are obtained with the computer algebra system Mathematica.

М.Ж. Минглибаев, Г.М. Маемерова, Массалары айнымалы үш дене-нүкте мәселесі туралы, ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №3(70), 78 – 86

Бұл мақалада массалары әр түрлі қарқында изотропты түрде өзгеретін үш дене мәселесінің ғасырлық ұйытқулары қарастырылған. Массалары айнымалы үш дене мәселесіндегі ғасырлық ұйытқудың аналитикалық шешімдері Mathematica компьютерлік алгебра жүйесінің көмегімен алынды.