Асимптотика решений трехточечных краевых задач для интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром[1]

А.Н. Азанова
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы
e-mail: azanova_alina@mail.ru

Аннотация

В данной работе исследуется трехточечная краевая задача для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка. Приводится алгоритм построения равномерного относительно $t \in [0,1]$ асимптотического приближения решения $y(t,\varepsilon)$ задачи с любой степенью с точности по малому параметру.

Рассматривается на отрезке [0,1] линейное интегро-дифференциальное уравнение третьего порядка с малым параметром $\varepsilon > 0$ при старшей производной:

$$L_\varepsilon y(t,\varepsilon) \equiv \varepsilon y''' + A(t)y'' + B(t)y' + C(t)y = F(t) + \int\limits_0^1 \left(H_0(t,x)y(x,\varepsilon) + H_1(t,x)y'(x,\varepsilon)\right)dx \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$h_1 y(t,\varepsilon) \equiv y(0,\varepsilon) = \alpha, \quad h_2 y(t,\varepsilon) \equiv y(t_0,\varepsilon) \equiv \beta, \quad h_3 y(t,\varepsilon) \equiv y(1,\varepsilon) = \gamma, \qquad (2)$$

где α, β, γ - некоторые известные постоянные, не зависящие от ε, а $0 < t_0 < 1$.

Предположим, что выполнены следующие условия:

I Функции $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ и $F(t)$ достаточно гладкие на отрезке $0 \le t \le 1$.

II Функция $A(t)$ удовлетворяет неравенству $A(t) \ge \overline{\gamma} = const > 0$, $0 \le t \le 1$.

III Функции $H_0(t,x)$, $H_1(t,x)$ в области $0 \le t \le 1$, $0 \le x \le 1$ являются достаточно гладкими, то есть дифференцируемыми столько раз, сколько потребуется в ходе рассуждений.

IV Число 1 не является собственным числом ядра

$$\bar{H}(t,s) = \int\limits_s^1 \frac{1}{A(s)}\left(H_0(t,x)\bar{K}(x,s) + H_1(t,x)\bar{K}'(x,s)\right)dx,$$

где $\bar{K}(x,s)$ - известная функция Коши.

V Справедливо неравенство:

$$\bar{\omega} = \begin{vmatrix} \bar{Q}_1(t_0) & \bar{Q}_2(t_0) \\ \bar{Q}_1(1) & \bar{Q}_2(1) \end{vmatrix} \ne 0.$$

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0699/ГФ, 2012г.-2014г.

где функции $\bar{Q}_1(t), \bar{Q}_2(t)$ определяются формулами:

$$\bar{Q}_i(t) = \bar{\Phi}_i(t) + \int\limits_0^t \frac{\bar{K}(t,s)}{A(s)} \left[\bar{\varphi}_i(s) + \int\limits_0^1 \bar{R}(s,p)\bar{\varphi}_i(p)dp \right] ds, \quad i = 1,2;$$

$$\bar{\varphi}_i(t) = \int\limits_0^1 \left(H_0(t,x)\bar{\Phi}_i(x) + H_1(t,x)\bar{\Phi}_i'(x) \right) dx, \quad i = 1,2;$$

где $\bar{R}(t,s)$ - резольвента ядра $\bar{H}(t,s)$, а функции $\bar{\Phi}_i(t)$, $i = 1,2$ - граничные функции, удовлетворяющие однородному дифференциальному уравнению

$$A(t)\Phi_i''(t) + B(t)\Phi_i'(t) + C(t)\Phi_i(t) = 0, \quad i = 1,2,3,$$

и краевым условиям

$$h_2\Phi_1(t) = 1, \quad h_3\Phi_1(t) = 0, \quad h_2\Phi_2(t) = 0, \quad h_3\Phi_2(t) = 1.$$

VI $\bar{H}_1(t_0,0)\bar{\Psi}_1(0) + \bar{H}_1(1,0)\bar{\Psi}_2(0) + 1 \neq 0$, где

$$\bar{H}_1(t,0) = \int\limits_0^t \frac{\bar{K}(t,s)}{A(s)} \left[\bar{H}_1(s,0) + \int\limits_0^1 \bar{R}(s,p)\bar{H}_1(p,0)dp \right] ds,$$

функции $\bar{\Psi}_i(t)$, $i = 1,2$ выражаются формулой: $\bar{\Psi}_i(t) = \dfrac{\bar{\omega}_i(t)}{\bar{\omega}}$, $i = 1,2$. Здесь $\bar{\omega}_i(t)$ - определитель, полученный из $\bar{\omega}$ заменой его i-ой строки строкой $\bar{Q}_1(t), \bar{Q}_2(t)$.

В работе [1] получена асимптотическая оценка решения трехточечной краевой задачи для линейных интегро-дифференциальных уравнений третьего порядка и показано, что при $\varepsilon \longrightarrow 0$ значения $y'(0,\varepsilon), y''(0,\varepsilon)$ имеют порядок роста $O\left(\dfrac{1}{\varepsilon}\right), O\left(\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right)$. Отсюда заключаем, что асимптотическое разложение решения задачи (1), (2) следует искать в виде суммы:

$$y(t,\varepsilon) = y_\varepsilon(t) + w_\varepsilon(\tau), \qquad \tau = \frac{t}{\varepsilon}, \tag{3}$$

где $y_\varepsilon(t)$ - регулярная часть решения, а $w_\varepsilon(\tau)$ - погранслойная часть решения, представимые в виде:

$$\begin{aligned} &y_\varepsilon(t) = y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots, \\ &w_\varepsilon(\tau) = w_0(\tau) + \varepsilon w_1(\tau) + \varepsilon^2 w_2(\tau) + \ldots, \qquad \tau = \frac{t}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{4}$$

Подставляя (3) в уравнение (1) и учитывая (4), выписываем члены, зависящие от t и τ отдельно, сделав в интеграле замену $s = \dfrac{x}{\varepsilon}$. Получим два типа уравнений:

$$\varepsilon \left(y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots \right)''' + A(t) \left(y_0(t) + \varepsilon y_1(t) + \varepsilon^2 y_2(t) + \ldots \right)'' +$$

$$+B(t)\left(y_0(t)+\varepsilon y_1(t)+\varepsilon^2 y_2(t)+\ldots\right)'+C(t)\left(y_0(t)+\varepsilon y_1(t)+\varepsilon^2 y_2(t)+\ldots\right)=$$

$$=F(t)+\int\limits_0^1\Big(H_0(t,x)\left(y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots\right)+$$

$$+H_1(t,x)\left(y_0(x)+\varepsilon y_1(x)+\varepsilon^2 y_2(x)+\ldots\right)'\Big)\,dx+$$

$$+\int\limits_0^\infty\Big(\varepsilon H_0(t,\varepsilon s)\left(w_0(s)+\varepsilon w_1(s)+\varepsilon^2 w_2(s)+\ldots\right)+$$

$$+H_1(t,\varepsilon s)\left(\dot w_0(s)+\varepsilon\dot w_1(s)+\varepsilon^2\dot w_2(s)+\ldots\right)\Big)\,ds,$$

$$\left(\dddot w_0(\tau)+\varepsilon\dddot w_1(\tau)+\varepsilon^2\dddot w_2(\tau)+\ldots\right)+A(\varepsilon\tau)\left(\ddot w_0(\tau)+\varepsilon\ddot w_1(\tau)+\varepsilon^2\ddot w_2(\tau)+\ldots\right)+$$

$$+\varepsilon B(\varepsilon\tau)\left(\dot w_0(\tau)+\varepsilon\dot w_1(\tau)+\varepsilon^2\dot w_2(\tau)+\ldots\right)+$$

$$+\varepsilon^2 C(\varepsilon\tau)\left(w_0(\tau)+\varepsilon w_1(\tau)+\varepsilon^2 w_2(\tau)+\ldots\right)=0.$$

Функции $A(\varepsilon\tau), B(\varepsilon\tau), C(\varepsilon\tau), H_0(t,\varepsilon\tau), H_1(t,\varepsilon\tau)$ раскладываем в ряд Тейлора в окрестности точки $\varepsilon\tau=0$. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, получим следующие уравнения при ε^0:

$$\begin{aligned}&A(t)y_0''(t)+B(t)y_0'(t)+C(t)y_0(t)=F(t)+\int\limits_0^1\left(H_0(t,x)y_0(x)+H_1(t,x)y_0'(x)\right)dx+\\&+\int\limits_0^\infty H_1(t,\varepsilon s)\dot w_0(s)ds,\end{aligned}\tag{5}$$

$$\dddot w_0(\tau)+A(\varepsilon\tau)\ddot w_0(\tau)=0.\tag{6}$$

При ε^k получаем:

$$\begin{aligned}&A(t)y_k''(t)+B(t)y_k'(t)+C(t)y_k(t)=F(t)_k+\int\limits_0^1\left(H_0(t,x)y_k(x)+H_1(t,x)y_k'(x)\right)dx+\\&+\int\limits_0^\infty H_1(t,\varepsilon s)\dot w_k(s)ds,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\dddot w_k(\tau)+A(\varepsilon\tau)\ddot w_k(\tau)=\tilde\Phi_k(\tau).\tag{8}$$

где $F(t)_k$, $\tilde\Phi_k$ - известные функции, зависящие от $y_{k-1}(t)$ и $w_0(\tau)$, $w_1(\tau)$, $\ldots$, $w_{k-1}(\tau)$ соответственно, и выражающиеся формулами:

$$F(t)_k=-y_{k-1}'''(t)+\int\limits_0^\infty\left(\sum_{i=0}^k H_0^{(i)}(t,0)w_{k-i-1}+\sum_{i=0}^{k-1}H_1^{(i)}(t,0)\dot w_{k-i}(s)\right)ds,$$

$$\tilde\Phi_k(\tau)=-\sum_{i=1}^k\frac{\tau^i}{i!}A^{(i)}(0)\ddot w_{k-i}(\tau)-\sum_{i=1}^{k-1}\frac{\tau^i}{i!}B^{(i)}(0)\dot w_{k-i-1}(\tau)-\sum_{i=1}^{k-2}\frac{\tau^i}{i!}C^{(i)}(0)w_{k-i-2}(\tau).$$

Теперь подставим (3) с учетом (4) в граничные условия (2) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, получаем следующее:

$$y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + \varepsilon^2 y_2(0) + \cdots + w_0(0) + \varepsilon w_1(0) + \varepsilon^2 w_2(0) + \cdots = \alpha,$$

$$y_0(t_0) + \varepsilon y_1(t_0) + \varepsilon^2 y_2(t_0) + \cdots + w_0\left(\frac{t_0}{\varepsilon}\right) + \varepsilon w_1\left(\frac{t_0}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 w_2\left(\frac{t_0}{\varepsilon}\right) + \cdots = \beta,$$

$$y_0(1) + \varepsilon y_1(1) + \varepsilon^2 y_2(1) + \cdots + w_0\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon w_1\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^2 w_2\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \cdots = \gamma.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε, при ε^0 получим следующие граничные условия:

$$y_0(0) + w_0(0) = \alpha, \tag{9}$$

$$y_0(t_0) = \beta, y_0(1) = \gamma. \tag{10}$$

При ε^k получим:

$$y_k(0) + w_k(0) = 0, \tag{11}$$

$$y_k(t_0) = 0, y_k(1) = 0. \tag{12}$$

Решаем краевую задачу для уравнения (5) с условиями (10). Решение запишется в виде:

$$\begin{aligned} y_0(t) = {} & (\beta - \bar{P}(t_0) + w_0(0)\bar{\Delta}(t_0))\bar{\Psi}_1(t) + (\gamma - \bar{P}(1) + w_0(0)\bar{\Delta}(1))\bar{\Psi}_2(t) + \\ & + \bar{P}(t) - w_0(0)\bar{\Delta}(t). \end{aligned} \tag{13}$$

где:

$$\bar{P}(t) = \int_0^t \frac{\bar{K}(t,s)}{A(s)} \left[F(s) + \int_0^1 \bar{R}(s,p)F(p)dp \right] ds,$$

$$\bar{\Delta}(t) = \int_0^t \frac{\bar{K}(t,s)}{A(s)} \left[H_1(s,0) + \int_0^1 \bar{R}(s,p)H_1(p,0)dp \right] ds,$$

$\bar{R}(t,s)$ - резольвента ядра $\bar{H}(t,s)$ из условия IV. Теперь, используя условие (9), найдем $w_0(0)$:

$$\begin{aligned} y_0(0) = {} & (\beta - \bar{P}(t_0) + w_0(0)\bar{\Delta}(t_0))\bar{\Psi}_1(0) + (\gamma - \bar{P}(1) + w_0(0)\bar{\Delta}(1))\bar{\Psi}_2(0) + \\ & + \bar{P}(0) - w_0(0)\bar{\Delta}(0) = \alpha - w_0(0). \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, что $\bar{P}(0) = 0$, $\bar{\Delta}(0) = 0$, в силу условия VI однозначно определим величину

$$w_0(0) = \frac{\alpha - (\beta - \bar{P}(t_0))\bar{\Psi}_1(0) - (\gamma - \bar{P}(1))\bar{\Psi}_2(0)}{\bar{H}_1(t_0,0)\bar{\Psi}_1(0) + \bar{H}_1(1,0)\bar{\Psi}_2(0) + 1}. \tag{14}$$

Определим начальные условия для уравнения (6). Интегрируя его от 0 до ∞ и используя условия погранслойности функции $w_0(\tau)$, т.е. $w_0(\infty) = \dot{w}_0(\infty) = \ddot{w}_0(\infty) = 0$, получим следующие начальные условия:

$$\dot{w}_0(0) = -A(0)w_0(0), \qquad \ddot{w}_0(\infty) = -A(0)\dot{w}_0(0) = A(0)^2 w_0(0)$$

Решая уравнение (6) с этими условиями, где $w_0(0)$ - известно и вычисляется по формуле (14), для нулевого приближения погранслойной части решения имеем:

$$w_0(\tau) = w_0(0)e^{-A(0)\tau}$$

Далее обратимся к уравнению (7) и условиям (12). Решение этой задачи имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} y_k(t) &= (w_k(0)\bar{\Delta}(t_0) - \bar{P}(t_0))\bar{\Psi}_1(t) + (w_k(0)\bar{\Delta}(1) - \bar{P}(1))\bar{\Psi}_2(t) + \\ &+ \bar{P}(t) - w_k(0)\bar{\Delta}(t). \end{aligned} \tag{15}$$

Теперь, используя условие (11), найдем $w_k(0)$:

$$y_k(0) = (w_k(0)\bar{\Delta}(t_0) - \bar{P}(t_0))\bar{\Psi}_1(0) + (w_0(0)\bar{\Delta}(1) - \bar{P}(1))\bar{\Psi}_2(0) +$$

$$+\bar{P}(0) - w_0(0)\bar{\Delta}(0) = -w_k(0).$$

Отсюда, учитывая, что $\bar{P}(0) = 0$, $\bar{\Delta}(0) = 0$, в силу условия VI однозначно определим величину

$$w_k(0) = \frac{\bar{P}(t_0)\bar{\Psi}_1(0) + \bar{P}(1)\bar{\Psi}_2(0)}{\bar{H}_1(t_0, 0)\bar{\Psi}_1(0) + \bar{H}_1(1, 0)\bar{\Psi}_2(0) + 1}. \tag{16}$$

Обратимся к уравнению (8). Для него определим начальные условия, интегрируя уравнение от 0 до ∞ и используя свойство погранслойности функции $w_k(\tau)$:

$$\dot{w}_k(0) = \int_0^\infty s\tilde{\Phi}_k(s)ds - A(0)w_k(0),$$

$$\ddot{w}_k(0) = -\int_0^\infty \tilde{\Phi}_k(\tau)d\tau - A(0)\left(\int_0^\infty s\tilde{\Phi}_k(s)ds - A(0)w_k(0)\right)w_k(0) =$$

$$= \int_0^\infty (1 + A(0)\tau)\,\tilde{\Phi}_k(\tau)d\tau - A^2(0)w_k(0),$$

Таким образом, k-ое приближение погранслойной части решения можно однозначно определить с помощью этих начальных условий и (8) где $w_k(0)$ - известно и вычисляется по формуле (16).

Таким образом, однозначно определяются k-ое приближение погранслойной и регулярной части решения задачи (1), (2).

Образуем частичную сумму:

$$\bar{y}_n(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k y_k(t) + \sum_{k=0}^{n+2} \varepsilon^k w_k(\tau), \tag{17}$$

здесь $y_k(t)$ - регулярные функции, однозначно определяемые из задач (7), (12), а $w_k(\tau)$ - погранслойные функции, однозначно определяемые из уравнений (8), с помощью начальных условий, полученных с учетом (16).

Отметим, что функция $\bar{y}_n(t,\varepsilon)$ является решением уравнения (1) с точностью порядка $O(\varepsilon^{n+1})$, а граничным условиям удовлетворяет точно, если $w_{n+1}(0) = w_{n+2} = 0$.

Обозначим

$$y(t,\varepsilon) = \bar{y}_n(t,\varepsilon) + R_n(t,\varepsilon), \tag{18}$$

где $y(t,\varepsilon)$ - точное решение краевой задачи (1), (2), $\bar{y}_n(t,\varepsilon)$ - асимптотическое решение краевой задачи, определяемое формулой (11), $R_n(t,\varepsilon)$ - остаточный член.

Теорема. *Пусть справедливы условия* I - IV, *тогда решение сингулярно возмущенной трехточечной краевой задачи* (1), (2) *существует, единственно и имеет следующее асимптотическое представление*:

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k y_k(t) + \sum_{k=0}^{n+2} \varepsilon^k w_k(\tau) + R_n(t,\varepsilon),$$

где $y_k(t)$ *- регулярные на* $[0,1]$ *функции, коэффициенты которых определяются из задач* (7), (12), *а* $w_k(\tau)$ *- погранслойные функции, однозначно определяемые из задач* (8), (11) *и остаточный член* $R_n(t,\varepsilon)$ *имеет оценки*

$$\left|R_n^{(j)}(t,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon^{n+1}, \quad j = 0,1,2,$$

где – некоторая постоянная, не зависящая от ε.

Доказательство. Подставляя выражение (18) в задачу (1), (2), получим следующую задачу для $R_n(t,\varepsilon)$:

$$L_\varepsilon R_n(t,\varepsilon) = \int_0^1 \left(H_0(t,x)R_n(x,\varepsilon) + H_1(t,x)R_n'(x,\varepsilon)\right) dx + f(\varepsilon),$$

$$h_1 R_n(t,\varepsilon) = 0, \quad h_2 R_n(t,\varepsilon) = 0, \quad h_3 R_n(t,\varepsilon) = 0,$$

где $f(\varepsilon)$ величина порядка $O(\varepsilon^{n+1})$. К данной задаче применима асимптотическая оценка решения трехточечной краевой задачи (1), (2), полученная в работе [1], так как данная задача является задачей такого же типа, что и сингулярно возмущенная задача (1), (2):

$$|R_n(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{n+1}, \quad |R_n'(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{n+1} + C\varepsilon^n e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}, \quad |R_n''(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{n+1} + C\varepsilon^{n-1} e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}.$$

Так как можно представить $y(t,\varepsilon) = \bar{y}_{n+2}(t,\varepsilon) + R_{n+2}(t,\varepsilon)$, аналогично получаются оценки:

$$|R_{n+2}(t,\varepsilon)| \le C\varepsilon^{n+3}, \quad \left|R_{n+2}'(t,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon^{n+3} + C\varepsilon^{n+2} e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}},$$

$$\left|R''_{n+2}(t,\varepsilon)\right| \le C\varepsilon^{n+3} + C\varepsilon^{n+1}e^{-\gamma\frac{t}{\varepsilon}}. \tag{19}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
R_n(t,\varepsilon) &= \bar{y}_{n+2}(t,\varepsilon) - \bar{y}_n(t,\varepsilon) + R_{n+2}(t,\varepsilon) = \\
&= \varepsilon^{n+1}y_{n+1}(t) + \varepsilon^{n+2}y_{n+2}(t) + \varepsilon^{n+3}w_{n+3}(\tau) + \varepsilon^{n+4}w_{n+4}(\tau) + R_{n+2}(t,\varepsilon); \\
R'_n(t,\varepsilon) &= \bar{y}'_{n+2}(t,\varepsilon) - \bar{y}'_n(t,\varepsilon) + R'_{n+2}(t,\varepsilon) = \\
&= \varepsilon^{n+1}y'_{n+1}(t) + \varepsilon^{n+2}y'_{n+2}(t) + \varepsilon^{n+3}\dot{w}_{n+3}(\tau) + \varepsilon^{n+4}\dot{w}_{n+4}(\tau) + R'_{n+2}(t,\varepsilon); \\
R''_n(t,\varepsilon) &= \bar{y}''_{n+2}(t,\varepsilon) - \bar{y}''_n(t,\varepsilon) + R''_{n+2}(t,\varepsilon) = \\
&= \varepsilon^{n+1}y''_{n+1}(t) + \varepsilon^{n+2}y''_{n+2}(t) + \varepsilon^{n+3}\ddot{w}_{n+3}(\tau) + \varepsilon^{n+4}\ddot{w}_{n+4}(\tau) + R''_{n+2}(t,\varepsilon).
\end{aligned}$$

Принимая во внимание оценки (17), получим искомые оценки для остаточного члена $R_n(t,\varepsilon)$. Что и требовалось доказать.

Список литературы

[1] *Азанова А.Н.* Трехточечная краевая задача для сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных уравнений // Вестник КазНУ. Серия: математика, механика, информатика. – 2011. - №1(68). – С. 46-50.

[2] *Касымов К.А.* Сингулярно возмущенные краевые задачи с начальными скачками. – Алматы: Санат, 1997. – 195 с.

[3] *Дауылбаев М.К.* Линейные интегро-дифференциальные уравнения с малым параметром. Алматы: Қазақ университеті, 2009. - 190 с.

A.N. Azanova, Asymptotic of the three-point boundary-value problem solution for integro-differential equations with small parameter. The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №4(71), 13 – 19.

In the given work the three-point boundary-value problem for singularly perturbed integro-differential equations of the third order is studied. An algorithm for constructing uniform with respect to $t \in [0,1]$, the asymptotic approximation of the solution $y(t,\varepsilon)$ of the problem with any degree of accuracy in a small parameter.

А.Н. Азанова, Кіші параметр бар интегралды дифференциалды теңдеулер үшін үш нүктелі шекаралық есептердің шешімдерінің асимптотикасы. ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №4(71), 13 – 19.

Бұл жұмыста үшінші ретті сингулярлы ауытуығак интегралды дифференциалдық теңдеулер үшін үш нүктелі шекаралық мен зеттелген. Кіші параметр бойынша кезкелген дәлдікпен берілген есетіу бірқалыпты асимптотикалық жуықтауын күрудың алгоритмі келтіріген.