К простейшей задаче вариационного исчисления[1]

С.А. Айсагалиев
Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби,
e-mail: serikbai.aisagaliev@kaznu.kz

Аннотация

Разработан конструктивный метод решения простейшей задачи вариационного исчисления на основе построения общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Введение.

Как известно, истоком классического вариационного исчисления является задача о брахистохроне И. Бернулли. Обобщением данной задачи является простейшая задача: минимизировать функционал

$$I(x,\dot{x}) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t),\dot{x}(t),t)dt \to \inf \tag{1}$$

при условиях $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$, где t_0, t_1 – фиксированы, x_0, x_1 – заданные точки.

Как следует из работы Эйлера, необходимым условием слабого локального минимума является уравнение Эйлера

$$F_x(x^0(t),\dot{x}^0(t),t) - \frac{d}{dt}F_{\dot{x}}(x^0(t),\dot{x}^0(t),t) \equiv 0, t \in [t_0,t_1], \tag{2}$$

где $F_x, F_{\dot{x}}$ – частные производные. Из (2) следует, что вдоль экстремали $x^0(t), t \in [t_0,t_1]$ выполнено тождество

$$F_x - F_{\dot{x}t} - F_{\dot{x}x}\dot{x}^0(t) - F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}^0(t) \equiv 0, t \in [t_0,t_1]. \tag{3}$$

Несмотря на то, что по постановке простейшей задачи (1) необходимо найти решение в классе один раз дифференцируемых функций, уравнение Эйлера предлагает решение исходной экстремальной задачи в классе дважды дифференцируемых функции. Создается впечатление, что вместо исходной задачи решается другая задача. Иными словами, уравнение Эйлера не дает решение исходной задачи в классе один раз дифференцируемых функций.

Другая некорректность в решении простейшей задачи (1) состоит в том, что нет гарантии того, что решение дифференциального уравнения второго порядка (3) удовлетворяет граничным условиям $x^0(t_0)$, $x^0(t_1) = x_1$. В самом деле, решение уравнения (3) функция $x^0(t) = x^0(t,c_1,c_2)$ должна удовлетворять условию $x^0(t_0,c_1,c_2) = x_0$, $x^0(t_1,c_1,c_2)$

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0696/ГФ, 2012г.-2014г.

$= x_1$. Возникает вопрос: существуют ли постоянные c_1, c_2 такие, что выполнены указанные краевые условия. Как показал Вейерштрасс, ответ на данный вопрос в общем случае отрицательный. Покажем данную некорректность на примере Вейерштрасса: минимизировать функционал

$$I(x,\dot{x}) = \int_0^1 t^2\dot{x}^2(t)dt \to \inf, x(0) = 0, x(1) = 1. \tag{4}$$

Поскольку $F_x = 0, F_{\dot{x}} = 2t^2\dot{x}, \frac{d}{dt}F_{\dot{x}} = F_{\dot{x}t} + F_{\dot{x}x}\dot{x}^0 + F_{\dot{x}\dot{x}}\ddot{x}^0$, то уравнение Эйлера (3) имеет вид $2t\dot{x}^0(t) + t^2\ddot{x}^0(t) \equiv 0, t \in [0,1]$. Решением данного уравнения является $x^0(t) = c_1t^{-1} + c_2, t \in [0,1]$. Легко убедиться в том, что через точки $x^0(0) = 0, x^0(1) = 1$ не проходит ни одна кривая этого семейства.

Как следует из уравнения Эйлера (3), требуется дважды дифференцируемость функции $F(x,z,t)$ по переменным (x,z,t). Это жесткое требование к исходным данным простейшей задачи.

В работах Дю-Буа-Реймонда, Л.С.Понтрягина получено необходимое условие сильного локального минимума для простейшей задачи в виде

$$\int_{t_0}^t F_x(x^0(\tau),\dot{x}^0(\tau),\tau)d\tau - \frac{\partial F(x^0(t),\dot{x}^0(t),t)}{\partial\dot{x}} = const. \tag{5}$$

Однако проверка существования решения интегрального уравнения (5), удовлетворяющего краевым условиям, довольно сложна и является нерешенной проблемой.

Разработка нового метода решения простейшей задачи, позволяющего устранить указанные недостатки, является актуальной.

Постановка задачи.

Для решения широкого круга задач вариационного исчисления целесообразно рассмотреть решения простейшей задачи следующего вида: минимизировать функционал

$$I(x,\dot{x}) = I(x,u) = \int_{t_0}^{t_1} F(x(t),u(t),t)dt \to \inf \tag{6}$$

при условиях

$$\dot{x} = u(t), t \in [t_0,t_1] = I, \tag{7}$$

с краевыми условиями

$$x(t_0) = x_0, x(t_1) = x_1, \tag{8}$$

с управлением

$$u(t) \in L_2(I,R^1). \tag{9}$$

Из оптимизационной задачи (6)-(9), в частности, следует (1).

Заметим, что: 1) для существования интеграла (6) необходимо, чтобы функция $F(x, u, t)$, $x \in R^1, u \in R^1, t \in I$ удовлетворяла условию $|F(x,u,t)| \le c_0(|x|+|u|^2)+ +c_1(t), \forall (x, u, t) \in R^1 \times R^1 \times I$, где $c_0 = const > 0, c_1(t) \ge 0, c_1(t) \in L_1(I, R^1)$;

2) решение $x(t), t \in I$ дифференциального уравнения (7) является абсолютно непрерывной функцией, имеющей почти всюду производную $\dot{x}(t), t \in I$, причем $\dot{x}(t) \in L_2(I, R^1)$.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1. Найти множество управлений $U \subset L_2(I, R^1)$, каждый элемент которого переводит траекторию системы (7) из начальной точки $x_0 = x(t_0)$ в состояние $x_1 = x(t_1)$.

Задача 2. Найти общее решение уравнения (7), для которого $x(t_0, u){=}x_0$, $x(t_1, u){=}x_1$, для любого $u(t) \in U$.

Задача 3. Найти метод сведения исходной краевой задачи оптимального управления (6)-(9) к начальной задаче оптимального управления со свободным правым концом траектории.

Задача 4. Построить минимизирующие последовательности для начальной задачи оптимального управления, доказать ее сходимость и получить оценку сходимости.

Задача 5. Сформулировать алгоритм решения простейшей задачи вариационного исчисления.

Суть предлагаемого метода решения простейшей задачи состоит в том, что определяется множество всех управлений, каждый элемент которого переводит траекторию системы из начального состояния x_0 в конечное состояние x_1, и всевозможная пара $(u(t), x(t))$ для краевой задачи (7)-(9). Такой подход к решению задачи позволяет погружать решения исходной экстремальной задачи в начальную задачу оптимального управления со свободным правым концом траектории. Начальная задача решается путем построения минимизирующей последовательности.

Новизна и практическая ценность метода заключается в том, что в первую очередь обеспечивается разрешимость краевой задачи в виде выделения множества допустимых пар $(u(t), x(t))$ и решение простейшей задачи осуществляется поиском экстремали среди множества допустимых пар. Примечательно то, что алгоритм решения задачи ориентирован на применение ЭВМ.

Основы решения краевых задач оптимального управления изложены в работах [1-5].

Интегральное уравнение.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма первого рода следующего вида

$$\int_{t_0}^{t_1} K(t)u(t)dt = a, \tag{10}$$

где $K(t) = \| K_{ij}(t) \|, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}-$ заданная матрица с кусочно непрерывными элементами порядка $n \times m$, $a \in R^n-$ заданный вектор, $u(t) \in L_2(I, R^m)-$ искомая функция.

Теорема 1 *Интегральное уравнение (10) при любом фиксированном $a \in R^n$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица*

$$C(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t)K^*(t)dt \tag{11}$$

порядка $n \times n$ является положительно определенной, где (*)-знак транспонирования.

Доказательство теоремы можно найти в [4].

Теорема 2 . *Пусть матрица $C(t_0,t_1)$ положительно определенная. Тогда общее решение интегрального уравнения (10) имеет вид*

$$u(t) = K^*(t)C^{-1}(t_0,t_1)a + \upsilon(t) - K^*(t)C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t)\upsilon(t)dt, t \in [t_0,t_1], \tag{12}$$

где $\upsilon(t) \in L_2(I,R^m)$– произвольная функция, $a \in R^n$– любой вектор.

Доказательство теоремы можно найти в [2,3].

Принцип погружения.

Задачи 1-3 могут быть решены методом принципа погружения из [1-3,5].

Лемма 1 *Пусть $t_1 > t_0$. Тогда управление $u(\cdot) \in L_2(I,R^1)$ переводит траекторию системы (7) из любой начальной точки в любое конечное состояние $x_1 = x(t_1)$ тогда и только тогда, когда*

$$\begin{aligned} &u(t) \in U = \{u(\cdot) \in L_2(I,R^1)/u(t) = \\ &= \upsilon(t) + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} - \frac{1}{t_1 - t_0}\int\limits_{t_0}^{t_1} \upsilon(t)dt, \forall \upsilon(t), \upsilon(\cdot) \in L_2(I,R^1)\}. \end{aligned} \tag{13}$$

Доказательство. Решение дифференциального уравнения (7) имеет вид

$$x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} u(\tau)d\tau, t \in [t_0,t_1]. \tag{14}$$

Отсюда с учетом того, что при t=t_1 значение $x(t_1)$=x_1, получим $x(t_1)$=x_1=x_0+$\int\limits_{t_0}^{t_1} u(t)dt$.

Тогда управление $u(\cdot) \in L_2(I,R^1)$, переводящее траекторию системы (7) из начальной точки x_0 в точку x_1, является решением интегрального уравнения

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} u(t)dt = x_1 - x_0 = a, a \in R^1. \tag{15}$$

Интегральное уравнение (15) является частным случаем (10), где $K(t) \equiv 1$. Тогда $C(t_0,t_1) = t_1 - t_0 > 0$ при $t_1 > t_0, C^{-1}(t_0,t_1) = \frac{1}{t_1 - t_0}$ (см.(11)). Поскольку выполнены предпосылки теорем 1, 2, то $u(t) = K^*(t)C^{-1}(t_0,t_1)a + \upsilon(t) - K^*(t)C^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t)\upsilon(t)dt =$ $= \upsilon(t) + \frac{x_1 - x0}{t_1 - t_0} - \frac{1}{t_1 - t_0}\int\limits_{t_0}^{t_1} \upsilon(t)dt, t \in [t_0,t_1]$, где $\upsilon(\cdot) \in L_2(I,R^1)$ – любая функция. Лемма доказана.

Лемма 2 *Пусть $t_1 > t_0$. Тогда решение дифференциального уравнения (7), соответствующее управлению $u(t) \in U$ из (13), определяется по формуле*

$$x(t) = z(t) + x_0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) - \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} z(t_1, \upsilon), t \in [t_0, t_1], \tag{16}$$

где $z(t) = z(t, \upsilon), t \in [t_0, t_1]$ –решение дифференциального уравнения

$$\dot{z}(t) = \upsilon(t), z(t_0) = 0, \upsilon(\cdot) \in L_2(I, R^1). \tag{17}$$

Доказательство. Как следует из формулы (14), функция

$$\begin{gathered} x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} u(\tau) d\tau = x_0 + \int_{t_0}^{t} [\frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} + \upsilon(\tau) - \frac{1}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \upsilon(t) dt] d\tau = \\ = x^0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} \upsilon(\tau) d\tau - \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \int_{t_0}^{t_1} \upsilon(t) dt, \end{gathered} \tag{18}$$

в силу того, что $u(t) \in U$ (см.(13)). Из (17) имеем

$$z(t) = \int_{t_0}^{t} \upsilon(\tau) d\tau, z(t_1, \upsilon) = \int_{t_0}^{t_1} \upsilon(t) dt. \tag{19}$$

Теперь соотношение (18) с учетом (19) запишется в виде (15). Лемма доказана.

Введем следующие обозначения $\lambda_1(x_0, x_1) = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$, $N_1 = \frac{-1}{t_1 - t_0}$, $\lambda_2(t, x_0, x_1) = x_0 + \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}(t - t_0), N_2(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}$. Тогда соотношения (13), (15) запишутся так:

$$u(t) = \upsilon(t) + \lambda_1(x_0, x_1) + N_1 z(t_1, \upsilon) \in U, t \in [t_0, t_1] = I, \tag{20}$$

$$x(t) = z(t, \upsilon) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t) z(t_1, \upsilon), t \in I. \tag{21}$$

Теперь простейшая задача (6)–(9) запишется в виде

$$\begin{aligned} I(z, z(t_1), \upsilon) = \int_{t_0}^{t_1} F\Big(& z(t, \upsilon) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t) z(t_1, \upsilon), \\ & \upsilon(t) + \lambda_1(x_0, x_1) + N_1 z(t_1, \upsilon), t\Big) dt \to \inf \end{aligned} \tag{22}$$

при условиях

$$\dot{z} = \upsilon, z(t_0) = 0, t \in I = [t_0, t_1], \tag{23}$$

$$\upsilon(\cdot) \in L_2(I, R^1). \tag{24}$$

Переход от исходной краевой задачи оптимального управления (6)–(9) к начальной задаче оптимального управления со свободным концом траектории назовем принципом погружения.

Градиент функционала.

Введем обозначения $q = (\upsilon(t), z(t,\upsilon), z(t_1))$, $F_0(q,t) = F(z(t) + \lambda_2(t) + N_2(t)z(t_1),$ $\upsilon(t) + \lambda_1 + N_1 z(t_1), t)$. Теперь функционал (22) запишется в виде

$$I(\upsilon) = I(z, z(t_1,\upsilon)) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(q,t)dt.$$

Заметим, что если функция $F(x,u,t), x \in R^1, u \in R^1, t \in I$ непрерывно дифференцируема по переменным $(x,u) \in R^1 \times R^1$, то функция $F_0(q,t)$ –непрерывно дифференцируема по переменным $(\upsilon, z, z(t_1)) \in R^1 \times R^1 \times R^1$.

Теорема 3 *Пусть функция $F(x,u,t)$ непрерывно дифференцируема по переменным $(x,$ $u)$ и частная производная $\frac{\partial F_0(q,t)}{\partial q}$ удовлетворяет условию Липшица, т.е.*

$$\begin{aligned}
&\mid \frac{\partial F_0(q+\Delta q,t)}{\partial \upsilon} - \frac{\partial F_0(q,t)}{\partial \upsilon} \mid \le L_1 \mid \Delta q \mid,\\
&\mid \frac{\partial F_0(q+\Delta q,t)}{\partial z} - \frac{\partial F_0(q,t)}{\partial z} \mid \le L_2 \mid \Delta q \mid,\\
&\mid \frac{\partial F_0(q+\Delta q,t)}{\partial z(t_1)} - \frac{\partial F_0(q,t)}{\partial z(t_1)} \mid \le L_3 \mid \Delta q \mid,
\end{aligned} \tag{25}$$

где $L_i = const > 0,\ i = 1,2,3,\ \Delta q = (\Delta\upsilon, \Delta z, \Delta z(t_1)),\ \mid \Delta q \mid = \mid (\Delta\upsilon, \Delta z, \Delta z(t_1)) \mid$. Тогда функционал (22) дифференцируем в смысле Фреше, градиент $I'(\upsilon) \in L_2(I,R^1)$ в любой точке $\upsilon(\cdot) \in L_2(I,R^1)$ вычисляется по формуле

$$I'(\upsilon) = \frac{\partial F_0(q(t),t)}{\partial \upsilon} - \psi(t,\upsilon), \tag{26}$$

где $q(t) = (\upsilon(t), z(t), z(t_1)),\ z(t) = z(t,\upsilon),\ t \in I$–решение дифференциального уравнения (23) при $\upsilon = \upsilon(t)$, а функция $\psi(t) = \psi(t,\upsilon),\ t \in I$– решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = \frac{\partial F_0(q(t),t)}{\partial z} - \psi,\ \psi(t_1) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_0(q(t),t)}{\partial z(t_1)}dt. \tag{27}$$

Кроме того, градиент $I'(\upsilon) \in L_2(I,R^1)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\| I'(\upsilon_1) - I'(\upsilon_2) \| \le l \| \upsilon_1 - \upsilon_2 \|,\ \forall \upsilon_1,\ \upsilon_2 \in L_2(I,R^1). \tag{28}$$

Доказательство. Пусть $\upsilon(t)$, $\upsilon(t)+h(t) \in L_2(I,R^1)$ и $z(t,\upsilon)$, $z(t,\upsilon+h)$, $t \in I$ – решения уравнения (23), соответствующие управлениям $\upsilon(t)$, $(t)+h(t)$. Пусть $z(t,\upsilon+h) = z(t,\upsilon)+$ $+\Delta z(t)$, $t \in I$. Тогда приращение $\Delta z(t)$ является решением уравнения $\Delta\dot{z} = h(t)$. Отсюда следует $|\Delta z(t)| \le \int\limits_{t_0}^{t_1} |h(t)|dt \le c_1 \parallel h \parallel_{L_2}$, $t \in I$. Итак, $|z(t)| \le c_1 \parallel h \parallel_{L_2}$, $|\Delta z(t_1)| \le c_1 \parallel$ $h \parallel_{L_2}$. Приращение функционала

$$\Delta I = I(\upsilon + h) - I(\upsilon) = \int_{t_0}^{t_1} [F_0(q(t) + \Delta q(t), t) - F_0(q(t), t)]dt,$$

где $\Delta q(t) = (\Delta\upsilon(t), \Delta z(t), \Delta z(t_1)$. Поскольку функция $F_0(q,t)$ имеет непрерывные производные по q, то $F_0(q(t)+\Delta q(t),t) = F_0(q(t),t)+h(t)F_{0\upsilon}(q(t)+\theta\Delta q(t),t)+\Delta z(t)F_{0z}(q(t)+$ $+\theta\Delta q(t),t) + \Delta z(t_1)F_{0z(t_1)}(q(t)+\theta\Delta q(t),t), 0 \le \theta \le 1$. Отсюда следует, что

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} [h(t)F_{0\upsilon}(q(t),t) + \Delta z(t)F_{0z}(q(t),t) + \Delta z(t_1)F_{0z(t_1)}(q(t),t)]dt + R.$$

$$R = \int_{t_0}^{t_1}\{h(t)[F_{0\upsilon}(q(t)+ \theta\Delta q(t),t) - F_{0\upsilon}(q(t),t)] + \Delta z(t)[F_{0z}(q(t)+\theta\Delta q(t),t) - F_{0z}(q(t),t)] +$$

$$+\Delta z(t_1)[F_{0z(t_1)}(q(t)+\theta\Delta q(t),t) - F_{0z(t_1)}(q(t),t)]\}dt.$$

Можно показать, что

$$\Delta I = \int_{t_0}^{t_1} h(t)[F_{0\upsilon}(q(t),t) - \psi(t)]dt + R_1, \frac{|R_1|}{\| h \|_{L_2}} \to 0$$

при $\| h \|_{L_2}\to 0$, где $\psi(t), t \in I$ – решение сопряженной системы (27). Отсюда следует формула (26). Из (27) следует, что $|\Delta\psi(t)| \le c_2 \| h \|_{L_2}$, где $\Delta\psi(t) = \psi(t,\upsilon+h) - \psi(t,\upsilon)$. Так как F_{0z} удовлетворяет условию Липшица,то $\| I'(\upsilon_1) - I'(\upsilon_2) \| \le l \| \upsilon_1 - \upsilon_2 \|$, $\forall \upsilon_1, \upsilon_2 \in L_2(I, R^1)$. Теорема доказана.

Минимизирующие последовательности.

Пусть $\upsilon_0(t) \in L_2(I, R^1)$ –начальная фиксированная точка. Строим последовательность $\{\upsilon_n\} \subset L_2(I, R^1)$ по правилу

$$\upsilon_{n+1} = \upsilon_n - \alpha_n I'(\upsilon_n), n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{29}$$

где $0<\varepsilon_0\le\alpha_n\le\frac{2}{l_1+2\varepsilon}$, $\varepsilon>0$. В частности, $\varepsilon=l/2$, $\varepsilon_0=\alpha_n=1/l$, где $l_1 = const > 0$ из (28).

Теорема 4 *.Пусть выполнены условия теоремы 3, функционал $I(\upsilon)$ ограничен снизу и пусть последовательность υ_n определяется по правилу (29). Тогда:*

1) числовая последовательность $I(\upsilon_n)$ строго убывает;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} I'(\upsilon_n) = 0$ (необходимое условие оптимальности).

Доказательство. Так как функционал $I(\upsilon) \in C^{1,1}(L_2)$, то выполняется неравенство

$$I(\upsilon) - I(u) \ge < I'(\upsilon), \upsilon - u >_{L_2} - \frac{l}{2} \| u - \upsilon \|^2_{L_2}, \forall u, \upsilon \in L_2.$$

Отсюда при $\upsilon = \upsilon_n, u = \upsilon_{n+1} = \upsilon_n - \alpha_n I'(\upsilon_n)$ имеем

$$I(\upsilon_n - I(\upsilon_{n+1}) \ge < I'(\upsilon_n), \alpha_n I'(\upsilon_n) > - \frac{l}{2} \| -\alpha_n I'(\upsilon_n) \|^2_{L_2} =$$

$$= \alpha_n \parallel I'(\upsilon_n) \parallel^2 - \frac{\alpha_n^2 l}{2} \parallel I'(\upsilon_n) \parallel^2 = \alpha_n (1 - \frac{\alpha_n l}{2}) \parallel I'(\upsilon_n) \parallel^2)).$$

Следовательно, при $\alpha_n = \frac{1}{l}$, верно неравенство

$$I(\upsilon_n) - I(\upsilon_{n+1}) \geq \frac{1}{2l} \parallel I'(\upsilon_n) \parallel^2 . \tag{30}$$

Если для некоторого конечного n градиент $I'(\upsilon_n) = 0$, то $\upsilon_n = \upsilon_{n+1}$ и $I'(\upsilon_k) = 0$, $k = n, n+1, \ldots$, так что $\lim\limits_{n\to\infty} I'(\upsilon_n) = 0$. Представляет интерес случай, когда $I'(\upsilon_n) \neq 0$ для конечного n. Поскольку величина $\parallel I'(\upsilon_n) \parallel^2 > 0, I'(\upsilon_n) \neq 0$, то из (30) следует, что числовая последовательность $\{I(\upsilon_n)\}$ строго убывает. Так как функционал $I(\upsilon), \upsilon \in L_2$ ограничен снизу, то числовая последовательность $\{I(\upsilon_n)\}$ ограничена снизу. Следовательно, существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} I(\upsilon_n)$. Тогда $[\lim\limits_{n\to\infty} I(\upsilon_n) - I(\upsilon_{n+1})] = 0$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ из (29), имеем $\lim\limits_{n\to\infty} I'(\upsilon_n) = 0$. Теорема доказана.

Теорема 5 . *Пусть выполнены условия теоремы 4, и пусть, кроме того:*

1) функционал $I(\upsilon)$ выпуклый на L_2;

2) множество $M(\upsilon_0) = \{\upsilon \in L_2 / I(\upsilon) \leq I(\upsilon_0)\}$ –ограничено.

Тогда последовательность $\{\upsilon_n\} \subset L_2(I, R^1)$ минимизирует функционал $I(\upsilon)$ на L_2 и слабо в L_2 сходится к множеству $U_* = \{\upsilon_* \in L_2 / I(\upsilon_*) = I_* = \min\limits_{\upsilon \in L_2} I(\upsilon) = \inf\limits_{\upsilon \in L_2} I(\upsilon)\} \neq \emptyset$. Справедлива следующая оценка скорости сходимости

$$0 < I(\upsilon_n) - I_* \leq \frac{2D^2 l}{n}, n = 1, 2, \ldots, \tag{31}$$

где D –диаметр множества $M(\upsilon_0)$.

Доказательство. Как следует из теоремы 4, последовательность $\{\upsilon_n\} \subset M(\upsilon_0)$. Из ограниченности, выпуклости и замкнутости множества $M(\upsilon_0)$ в L_2 следует, что множество $M(\upsilon_0)$ –слабо бикомпактно. Выпуклый дифференцируемый функционал $I(\upsilon)$ на $M(\upsilon_0)$ – слабо полунепрерывен снизу. Следовательно, функционал $I(\upsilon)$ достигает нижней грани на множестве $M(\upsilon_0)$, т.е. множество $U_* \neq \emptyset, U_* \subset M(\upsilon_0)$.

Поскольку функционал $I(\upsilon)$ –выпуклый, $\upsilon \in M(\upsilon_0)$, то верно неравенство

$I(\upsilon_n) - I_* \leq \parallel I'(\upsilon_n) \parallel D$, где $I_* = \inf\limits_{\upsilon \in M(u_0)} I(\upsilon) = I(\upsilon_*), \upsilon_* \in U_*$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, с учетом того, что $\parallel I'(\upsilon_n) \parallel \to 0$ при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{n\to\infty} I(\upsilon_n) = I_*$. Следовательно, последовательность $\{\upsilon_n\} \subset M(\upsilon_0)$ –минимизирующая.

Из неравенства (30) и $I(\upsilon_n) - I_* \leq \parallel I'(\upsilon_n) \parallel D$ следует оценка (31). Так как $M(\upsilon_0)$ –слабо бикомпактно, $\{\upsilon_n\} \subset M(\upsilon_0)$ –минимизирующая последовательность, то $\upsilon_n \to \upsilon_*$ при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Лемма 3 . *Если функция $F(x, u, t), (x, u, t) \in R^1 \times R^1 \times I$ выпукла по (x, u), т.е. $F(\alpha x + (1-\alpha) y, \alpha u + (1-\alpha)\omega, t) \leq aF(x, u, t) + (1-\alpha) F(y, \omega, t)$, $\forall (x, u, t), (y, \omega, t) \in R^1 \times R^1 \times I$, $\alpha \in [0, 1]$, то функционал $I(\upsilon)$ является выпуклым.*

Доказательство. Рассмотрим оптимизационную задачу (22)-(24). Легко убедиться в том, что если $F(x,u,t)$ –выпуклая функция по переменной (x,u), то функция $F_0(q,t)$ выпукла по переменной q, т.е.

$$F_0(\alpha q_1+(1-\alpha)q_2,t) \le \alpha F_0(q_1,t)+(1-\alpha)F_0(q_2,t), \forall (q_1,t),(q_2,t) \in R^3, \alpha \in [0,1]. \quad (32)$$

Можно показать, что для любых $\upsilon_1(t) \in L_2(I,R^1), \upsilon_2(t) \in L_2(I,R^1)$, значение $z(t,\alpha\upsilon_1+ +(1-\alpha)\upsilon_2) = \alpha z(t,\upsilon_1)+(1-\alpha)z(t,\upsilon_2), \alpha \in [0,1], t \in I$.

Тогда

$$I(\alpha\upsilon_1+(1-\alpha)\upsilon_2) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(\alpha q_1(t)+(1-\alpha)q_2(t),t)dt \le \alpha \int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(q_1(t),t)dt+$$

$+(1-\alpha)\int\limits_{t_0}^{t_1} F_0(q_2(t),t)dt = \alpha I(\upsilon_1)+(1-\alpha)I(\upsilon_2), \forall \upsilon_1,\upsilon_2 \in L_2, \alpha \in [0,1]$. в силу неравенства (32). Лемма доказана.

Алгоритм решения простейшей задачи.

1. По исходным данным задачи определяются функция $u(t) \in U$ и соответствующая управлению $u(t) \in U$, функция $x(t) = x(t,u)$ по формулам (13), (16) соответственно;

2. На основе принципа погружения исходная задача сводится к начальной задаче оптимального управления со свободным правым концом траектории (22)–(24);

3. Вычисляется градиент функционала по формуле (26) и определяется сопряженная система (27);

4. Строится последовательность $\{\upsilon_n\}$ по формуле (29). Для этого выбирается начальная точка $\upsilon_0(t) \in L_2(I,R^1)$. Находим решение дифференциального уравнения $\dot z_0 = = \upsilon_0(t)$, $z_0(0) = 0, t \in I$. В частности, вычислим $z_0(t_1)$. Вычислим $\psi(t_1,\upsilon_0)$ и находим решение сопряженной системы $\psi(t,\upsilon_0)$, $t \in I$. Определим производную Фреше в точке υ_0 равную $I'(\upsilon_0) = \frac{\partial F_0(q(\upsilon_0),t)}{\partial \upsilon} - \psi(t,\upsilon_0)$. Следующее значение $\upsilon_1(t) = \upsilon_0(t) - \alpha_0 I'(\upsilon_0)$. Далее, повторяется процесс вычисления $I'(\upsilon_1)$.

5. Находим предельную точку $\upsilon_*(\cdot) \in L_2(I,R')$ последовательности $\{\upsilon_n\} \subset L_2$. В общем случае $\lim\limits_{n\to\infty} I'(\upsilon_n) = 0$ (необходимое условие оптимальности). В случае выпуклого функционала последовательность $\{\upsilon_n\}$ является минимизирующей, нижняя грань достигается, $\upsilon_n \to \upsilon_*$ слабо при $n \to \infty, x(t,\upsilon_*)$, –решение простейшей задачи.

Пример.

В качестве примера рассмотрим простейшую задачу Вейерштрасса. Для задачи (4) функции

$$u(t) = 1+\upsilon(t)-z(1,\upsilon), x(t) = t+z(t)-tz(1,\upsilon), t \in I.$$

Соответствующая оптимизационная задача имеет вид

$$I(\upsilon) = \int\limits_0^1 t^2[1+\upsilon(t)-z(1,\upsilon)]^2 dt \to \inf \quad (33)$$

при условиях

$$\dot z = \upsilon, z(0) = 0, t \in I = [0,1], \upsilon(\cdot) \in L_2(I,R^1). \quad (34)$$

Функция $F_0(q,t) = t^2[1+\upsilon-z(1)]^2$. Частные производные $\frac{\partial F_0}{\partial \upsilon} = 2t^2[1+\upsilon-z(1)]$, $\frac{\partial F_0}{\partial z} = 0$, $\frac{\partial F_0}{\partial z(1)} = t^2[2z(1)-2-2\upsilon]$.

Градиент функционала

$$I'(\upsilon) = \frac{\partial F_0}{\partial \upsilon} - \psi = 2t^2[1 + \upsilon(t) - z(1, \upsilon)] - \psi(t) \in L_2(I, R^1). \tag{35}$$

Сопряженная система

$$\dot{\psi} = 0, \psi(1) = \int_0^1 2t^2[1 + \upsilon(t) - z(1, \upsilon)]dt. \tag{36}$$

Минимизирующая последовательность

$$\begin{aligned} &\upsilon_{n+1}(t) = \upsilon_n(t) - \alpha_n I'(\upsilon_n) = \upsilon_n(t) - 2\alpha_n t^2[1 + \upsilon_n(t) - z(1, \upsilon_n)]+ \\ &+2\alpha_n \psi(t, \upsilon_n), n = 0, 1, 2, \ldots . \end{aligned} \tag{37}$$

Как следует из (36), $\psi = c = const, c = \psi(1) = \int_0^1 2t^2[1 + \upsilon_n(t) - z(1, \upsilon_n)]dt.$

Тогда

$$I'(\upsilon_n) = 2t^2[1 + \upsilon_n(t) - z(1, \upsilon_n)] - 2\int_0^1 t^2[1 + \upsilon_n(t) - z(1, \upsilon_n)]dt. \tag{38}$$

Выбирается начальное значение $\upsilon_0(t) \in L_2(I, R^1)$. В частности, $\upsilon_0(t) \equiv 0, t \in I$. Найдем решение дифференциального уравнения $\dot{z}_0 = \upsilon_0(t)$, $z_0 = 0$, $t \in I$. Для $\upsilon_0(t) \equiv 0$, значение $z_t \equiv 0$, $t \in I$. Находим решение сопряженной системы $\psi_0(t) = \psi_0(1) = 2\int_0^1 t^2[1+ +\upsilon_0(t) - z_0(1)]dt$. Для $\upsilon_0(t) \equiv 0, z_0(t) \equiv 0, \psi_0(t) = 2/3, t \in I$. Определим производную Фреше $I'(\upsilon_0) = 2t^2[1 + \upsilon_0(t) - z_0(1)] - \psi_0(t), t \in I$. Для $\upsilon_0(t) \equiv 0$, имеем $I'(\upsilon_0) = 2t^2 - \frac{2}{3}$. Следующее приближение $\upsilon_1(t) = \upsilon_0(t) - \alpha_0 I'(\upsilon_0)$. Для $\upsilon_0(t) \equiv 0$, $\upsilon_1(t) = -\alpha_0(2t^2 - \frac{2}{3})$, $\alpha_0 = const$ и т.д.

Пусть после n итераций найдено значение

$$\upsilon_n(t) = \begin{cases} n - 1 + z(1, \upsilon_n), & \text{если } 0 \le t < \frac{1}{n}, \\ -1 + z(1, \upsilon_n), & \text{если } \frac{1}{n} \le t < 1. \end{cases}$$

Тогда

$$I'(\upsilon_n) = \begin{cases} 2t^2 n - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n^2}, & \text{если } 0 \le t < \frac{1}{n}, \\ -\frac{2}{3n^2}, & \text{если } \frac{1}{n} \le t < 1. \end{cases}$$

Так как значение $2t^2 n - \frac{2}{3n^2} < \frac{2}{n} - \frac{2}{3n^2}$, то $\lim_{n \to \infty} I'(\upsilon_n) = 0$ (выполняется необходимое условие оптимальности). Для данного значения $\upsilon_n(t)$ определим $u_n(t)$ и $x_n(t)$ равные:

$$u_n(t) = 1 + \upsilon_n(t) - z(1, \upsilon_n) = \begin{cases} n, & \text{при } 0 \le t < \frac{1}{n}, \\ 0, & \text{при } \frac{1}{n} \le t < 1; \end{cases}$$

$$x_n(t) = t + z(t, v_n) - tz(1, v_n) = \begin{cases} nt, & \text{при } 0 \le t < \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{при } \frac{1}{n} \le t < 1. \end{cases}$$

Заметим, что для любого n значения $x_n(0) = 0, x_n(1) = 1$. Значение исходного функционала

$I(u_n) = \int\limits_0^1 t^2 u_n^2(t)dt = \frac{1}{3n^2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Приближенное решение простейшей задачи Вейерштрасса следующее:

$$u_N(t) = \begin{cases} N, & \text{при } 0 \le t < \frac{1}{N}, \\ 0, & \text{при } \frac{1}{N} \le t < 1; \end{cases}$$

$$x_N(t) = \begin{cases} Nt, & \text{при } 0 \le t < \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{при } \frac{1}{n} \le t < 1, \end{cases}$$

где N–достаточно большое число. Значение $I(u_N) = \frac{1}{3N^2}$.

Заключение.

Разработан конструктивный метод решения простейшей задачи вариационного исчисления на основе построения общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода.

Отличительная особенность предполагаемого метода состоит в том, что расширен класс искомой функции, устранены трудности, связанные с краевыми условиями, решение задачи сведено к построению минимизирующей последовательности, легко реализуемому на ЭВМ.

Сущность предлагаемого метода заключается в том, что выделяются все множества управлений из L_2 и все решения дифференциального уравнения, удовлетворяющие краевым условиям из класса абсолютно непрерывных функций, что позволяет решение простейшей задачи свести к решению начальной задачи оптимального управления со свободным концом траектории.

Получены для общего случая необходимое условие оптимальности сильного локального минимума и необходимое и достаточное условие оптимальности для случая выпуклого функционала.

Сформулирован алгоритм решения простейшей задачи и решен пример Вейерштрасса.

Примечательно то, что налагаются менее жесткие требования к исходным данным задачи, требуется только дифференцируемость подынтегральной функции функционала, искомая функция принадлежит классу почти всюду дифференцируемых функций.

Для простоты рассмотрен метод решения простейшей задачи, все основные положения данного подхода остаются верными и для общей задачи вариационного исчисления.

Список литературы

[1] Айсагалиев С.А., Айсагалиев С.С. Методы решения краевых задач.– Алматы: Қазақ университетi, 2002. – 348с.

[2] Айсагалиев С.А. Конструктивная теория краевых задач оптимального управления.– Алматы: Қазақ университетi, 2007. – 328с.

[3] Айсагалиев С.А. Лекции по оптимальному управлению.– Алматы: Қазақ университетi, 2007. – 278с.

[4] Айсагалиев С.А. Общее решение одного класса интегральных уравнений. // Мат. журнал 2005. т.5, №4 (18), с. 17-34.

[5] Айсагалиев С.А., Кабидолданова А.А. Оптимальное быстродействие нелинейных систем с ограничениями. // Дифференц. уравнения и процессы управления. – 2010, №1, с.1-15.

S.A. Aisagaliev, *For the simplest problem of variational calculus.*

The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №4(71), 20 – 31

In this work constructive method of solving the simplest problem of variational calculus has been developed on the basis of constructing the general solution of a Fredholm integral equation of the first kind.

С.А.Айсағалиев, *Вариациялық есептеудiн қарапайым есебiне.*

ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №4(71), 20 – 31

Бiрiншi тек Фредгольм теңдеуiнiң интегралдық жалпы шешiм құрылымы негiзiнде вариациялық есептеудiң қарапайым есебiн конструктивтiк шешу әдiсi жасалды.