Краевые задачи оптимального управления линейных систем с квадратичным функционалом и учетом ограниченности ресурсов[1]

С.А. Айсагалиев, А.А. Кабидолданова
Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби, Алматы
e-mail: kabasem@mail.ru

Аннотация

Разработан метод решения краевой задачи оптимального управления линейных систем с квадратичным функционалом с ограничениями на значения управления.

Введение. Следует отметить три этапа развития теории оптимального управления. На первом этапе развития были созданы: принцип максимума Л.С. Понтрягина [1], метод динамического программирования Р. Беллмана [2], теория управляемости линейных систем неограниченными ресурсами Р. Калмана [3], метод моментов в задачах оптимального управления Н.Н. Красовского [4], финитное управление Н. Винера для процессов, описываемых как обыкновенными дифференциальными уравнениями, так и уравнениями в частных производными.

Второй этап развития – численные методы экстремальных задач. На данном этапе были созданы методы построения минимизирующих последовательностей в основном для задачи оптимального управления со свободным правым концом траектории [5]–[8].

Третий этап развития – численно-аналитические методы решения задачи оптимального управления с фазовыми и интегральными ограничениями для систем с ограниченными ресурсами. В работах [9]–[16] изложены основы численно-аналитических методов решения краевых задач оптимального управления для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями и интегро-дифференциальными уравнениями. Данная работа является продолжением этих исследований.

Постановка задачи.

$$J(u(\cdot),x)=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}[x^*(t)Q(t)x(t)+2x^*(t)M(t)u(t)+u^*(t)R(t)u(t)]dt\to inf \tag{1}$$

$$\dot{x}=A(t)x+B(t)u(t)+\mu(t),\ t\in I=[t_0,t_1], \tag{2}$$

$$x(t_0)=x_0,\ \ x(t_1)=x_1,\qquad u(t)\in U\subset L_2(I,R^m), \tag{3}$$

где $A(t),B(t)$ – заданные матрицы с кусочно-непрерывными элементами порядков $n\times n, n\times m$ соответственно, $\mu(t)\in KC(I,R^n)$ – кусочно-непрерывная функция, моменты времени t_0,t_1 – фиксированы, $x_0\in R^n,\ x_1\in R^n$ – заданные состояния системы, $Q(t)=Q^*(t),\ \ R(t)=R^*(t)$ – положительно определенные матрицы с непрерывными элементами

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0696/ГФ, 2012г.-2014г.

порядков $m\times m$, $n\times n$, соответственно, $M(t)$ – матрица порядка $n\times m$ с непрерывными элементами. Полагаем, что матрица

$$\begin{pmatrix} Q(t) & M(t)\\ M^*(t) & R(t)\end{pmatrix} > 0, \ \ t\in I.$$

Здесь U – ограниченное выпуклое замкнутое множество.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1. Найти необходимые и достаточные условия существования решения задачи оптимального управления (1) – (3).

Задача 2. Найти допустимое управление $u(t)\in U:\ x(t;t_0,x_0,u)|_{t=t_1}=x_1$.

Задача 3. Найти оптимальные управление $u_*(t)\in U$ и траекторию $x_*(t),\ t\in I$.

Построение допустимого управления $u(t)\in U$ и оптимальной пары $(u_*(t),x_*(t)),\ t\in I$, возможно только тогда, когда краевая задача (2) – (3) имеет решение.

В статье предлагается метод решения задач 1–3. Основой созданного метода является принцип погружения, который следует из общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода. Применяя принцип погружения к краевым задачам оптимального управления, можно найти необходимые и достаточные условия существования решения. Оптимальное решение исходной краевой задачи оптимального управления строится путем сужения области допустимых управлений.

Следует отметить, что построение общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода относится к числу актуальных проблем математики. Поэтому построение общего решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода [11], [16] и ее применение к построению множества допустимых управлений является новым подходом к решению задач оптимального управления.

Принцип погружения. Существование решения. Рассмотрим краевую задачу

$$\dot y = A(t)y + B(t)w(t) + \mu(t),\ t\in I=[t_0,t_1], \tag{4}$$

$$y(t_0)=x_0,\ \ y(t_1)=x_1, \quad w(\cdot)\in L_2(I,R^m), \tag{5}$$

$A(t),B(t),\mu(t)$ $t\in I$, – заданные матрицы и векторы из уравнения (2), $x_0\in R^n$, $x_1\in R^n$, – фиксированные точки.

По исходным данным задачи (4)–(5) определим следующие векторы и матрицы

$$a=\Phi(t_0,t_1)x_1-x_0-\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu(t)dt, \quad W(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)B(t)B^*(t)\Phi^*(t_0,t)dt, \tag{6}$$

$$\lambda_1(t,x_0,x_1)=B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)a,\ \ N_1(t)=-B^*(t)\Phi^*(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1), \tag{7}$$

$$\lambda_2(t,x_0,x_1)=\Phi(t,t_0)W(t,t_1)W^{-1}(t_0,t_1)x_0+\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1)x_1+$$
$$+\int\limits_{t_0}^{t}\Phi(t,\tau)\mu(\tau)d\tau-\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Phi(t_0,t)\mu(t)dt, \tag{8}$$

$$N_2(t)=-\Phi(t,t_0)W(t_0,t)W^{-1}(t_0,t_1)\Phi(t_0,t_1),\ \ t\in I,\ \ \Phi(t,\tau)=\theta(t)\theta^{-1}(\tau), \tag{9}$$

где $\theta(t)$ – фундаментальная матрица решений системы $\dot{æ} = A(t)æ,\ t \in I$.

Заметим, что $\theta(t)$ определяется из решения дифференциального уравнения $\dot{\theta}(t) = A(t)\theta(t),\ \theta(t_0) = I_n$, где I_n – единичная матрица порядка $n \times n$.

Теорема 1. *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определена. Тогда управление $w(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ переводит траекторию системы (4) из любой начальной точки $y(t_0) = x_0 \in R^n$ в любое конечное состояние $y(t_1) = x_1 \in R^n$ тогда и только тогда, когда*

$$w(t) \in U_1 = \left\{ w(\cdot) \in L_2(I, R^m) \ / \ w(t) = v(t) + \lambda_1(t, x_0, x_1) + N_1(t)z(t_1, v), \ \ t \in I \right\} \quad (10)$$

где $v(\cdot) \in L_2(I, R^m)$ – произвольная функция, а функция $z(t) = z(t, v), t \in I$, является решением дифференциального уравнения

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)v(t), \ \ z(t_0) = 0, \ \ v(\cdot) \in L_2(I, R^m), \ t \in I. \quad (11)$$

Решение дифференциального уравнения (4), соответствующее управлению $w(t) \in U_1$, определяется по формуле

$$y(t) = z(t) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t)z(t_1, v), \ t \in I. \quad (12)$$

Доказательство теоремы следует из результатов, приведенных в [11], [16].

Теперь рассмотрим решение задачи 1. Отметим, что множество U_1 содержит те и только те управления, которые переводят траекторию системы (2) из x_0 в x_1. Так как множества $U_1 \subset L_2(I, R^m)$, $\ U \subset L_2(I, R^m)$, то краевая задача (2)–(3) имеет решение тогда и только тогда, когда пересечение $U \bigcap U_1 \neq \emptyset$, где $\emptyset$ – пустое множество.

Рассмотрим следующую начальную задачу оптимального управления:

$$J_1(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} |v(t) + \lambda_1(t, x_0, x_1) + N_1(t)z(t_1, v) - u(t)|^2 dt \to inf \quad (13)$$

$$\dot{z} = A(t)z + B(t)v(t), \ \ z(t_0) = 0, \ \ t \in I, \ \ \ v(\cdot) \in L_2(I, R^m), \ u(t) \in U(t). \quad (14)$$

Теорема 2. *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определена. Для того, чтобы краевая задача (2)–(3) имела решение необходимо и достаточно, чтобы значение $J_1(\overline{u}, \overline{v}) = 0$, где $(\overline{u}, \overline{v}) \in U \times L_2(I, R^m)$ — оптимальное управление в задаче (13)–(14).*

Переход от исходной краевой задачи (2)–(3) к начальной задаче оптимального управления (13)–(14) назовем принципом погружения.

Заметим, что если значение $J_1(\overline{u}(\cdot), \overline{v}(\cdot)) > 0$, то краевая задача (2)–(3) не имеет решения. Следовательно, не имеет решения краевая задача оптимального управления (1)–(3). На первом этапе развития теории оптимального управления не в достаточной мере было уделено внимание на существование решения краевой задачи оптимального управления.

Допустимое управление. Как следует из теоремы 2, допустимое управление для задачи оптимального управления (1)–(3) определяется из решения начальной задачи оптимального управления (13)–(14).

Отметим, что если для пары $(\overline{u}, \overline{v}) \in U \times L_2(I, R^m)$ значение $J_1(\overline{u}, \overline{v}) = 0$, то $\overline{u} \in U$ – допустимое управление для задачи (1)–(3).

Лемма 1. *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определена, U – ограниченное выпуклое замкнутое множество, $v(\cdot) \in L_2^\rho(I, R^m) = \left\{v(\cdot) \in L_2(I, R^m) \;/\; \|v\|_{L_2} \le \rho\right\}$, $\rho > 0$ – достаточно большое число. Тогда функционал (13) при условиях (14) является выпуклым и достигает нижней грани, т.е. $J_1(\overline{u}, \overline{v}) = \inf\limits_{(u,v)\in X} J_1(u, v)$, $X = U \times L_2^\rho(I, R^m)$.*

Доказательство. Доказательство выпуклости функционала следует из выпуклости квадратичной формы - подынтегральной функции. Так как X − ограниченное выпуклое замкнутое множество в гильбертовом пространстве $H = L_2$, то X − слабобикомпактно. Выпуклый непрерывный функционал $J_1(u, v)$ достигает нижней грани на множестве X. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определена. Тогда*

1. *производная $\dfrac{\partial F_0(q, t)}{\partial q}$ удовлетворяет условию Липшица;*

2. *функционал (13) при условиях (14) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала $J_1'(u, v) = ((J_{11}'(u, v), J_{12}'(u, v)) \in H = L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^m)$ в любой точке $(u, v) \in X$ вычисляется по формуле*

$$J_{11}'(u, v) = \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial v} - B^*(t)\psi(t), \quad J_{12}'(u, v) = \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial u}, \tag{15}$$

где $z(t) = z(t, v),\ t \in I$ – решение дифференциального уравнения из (14), а функция $\psi(t),\ t \in I$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi} = -A^*(t)\psi(t), \;\; \psi(t_1) = -\int\limits_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_0(q(t), t)}{\partial z(t_1)} dt; \tag{16}$$

3. *градиент $J_1'(u, v) \in H$ удовлетворяет условию Липшица.*

Строим последовательности $\{v_n\}, \{u_n\}$ на основе формул (15)–(16) по правилу:

$$v_{n+1} = P_{L_2^\rho}[v_n - \alpha_n J_{11}'(u_n, v_n)], \quad u_{n+1} = P_U[u_n - \alpha_n J_{12}'(u_n, v_n)], \quad n = 0, 1, 2, ..., \tag{17}$$

где $P_{L_2^\rho}[\cdot], P_U[\cdot]$− проекции точки на множествах L_2^ρ, U, соответственно, $0 < \alpha_n \le \dfrac{1}{K}$, $K > 0$− постоянная Липшица для градиента $J_1'(u, v)$.

Теорема 4. *Пусть матрица $W(t_0, t_1)$ положительно определена. Тогда*

1. *последовательности $\{v_n\}, \{u_n\}$ из (17) являются минимизирующими;*

2. $u_n \xrightarrow{сл} \overline{u},\;\; v_n \xrightarrow{сл} \overline{v}$ при $n \to \infty$, где $(\overline{u}, \overline{v}) \in X$;

3. *для того, чтобы краевая задача (2)–(3) имела решение, необходимо и достаточно, чтобы $J_{1*} = J(\overline{u}, \overline{v}) = 0$.*

Доказательство. Из (17) следует, что

$$\langle J'_{11}(u_n, v_n), v_n - v_{n+1}\rangle_{L_2} \geq \frac{1}{\alpha_n}\|v_n - v_{n+1}\|^2, \quad \langle J'_{12}(u_n, v_n), u_n - u_{n+1}\rangle_{L_2} \geq \frac{1}{\alpha_n}\|u_n - u_{n+1}\|^2.$$

Тогда верно неравенство $J_1(u_n, v_n) - J_1(u_{n+1}, v_{n+1}) \geq \dfrac{K}{2}\|(u_n, v_n) - (u_{n+1}, v_{n+1})\|^2$. Отсюда следует, что $\|(u_n, v_n) - (u_{n+1}, v_{n+1})\| \to 0$ при $n \to \infty$ в силу ограниченности снизу значения функционала $J_1(u, v)$. Отметим, что $J_1(u, v) \geq 0$. Так как функционал $J_1(u, v)$, $(u, v) \in X$, – выпуклый, то

$$J_1(u_n, v_n) - J_1(\overline{u}, \overline{v}) \leq m_0\|(u_n, v_n) - (u_{n+1}, v_{n+1})\|, \;\; m_0 = const > 0.$$

Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} J(u_n, v_n) = J_* = J(\overline{u}, \overline{v})$. Первое утверждение теоремы доказано.

Второе утверждение теоремы следует из слабой бикомпактности множества X и включения $(u_n, v_n) \in X,\ n = 0, 1, 2, ...$ Третье утверждение теоремы непосредственно следует из теоремы 2. Теорема доказана.

Оптимальное управление. Пусть краевая задача (2)–(3) имеет решение и найдена точка $(\overline{u}, \overline{v}) \in X$. Тогда имеет решение краевая задача оптимального управления (1)–(3). Заметим, что решение дифференциального уравнения (2), соответствующее управлению $\overline{u} \in U$, имеет вид $x(t, \overline{u}) = y(t, \overline{w}) = z(t, \overline{v}) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t)z(t_1, \overline{v}), \;\; t \in I$, согласно формуле (12). Вычислим значение функционала (1), соответствующее паре $(\overline{u}, x(t, \overline{u}))$. Пусть величина $\gamma_0 = J(\overline{u}, x(\cdot, \overline{u}))$. Определим скалярную функцию $x_0(t),\ t \in I :$

$$x_0(t) = \frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t} \left[x^*(\tau)Q(\tau)x(\tau) + 2x^*(\tau)M(\tau)u(\tau) + u^*(\tau)R(\tau)u(\tau)\right] d\tau,\ t \in I.$$

Отсюда следует, что функция $x_0(t),\ t \in I$, является решением уравнения

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{2}\left[x^*(t)Q(t)x(t) + 2x^*(t)M(t)u(t) + u^*(t)R(t)u(t)\right],$$

$$x_0(t_0) = 0, \;\; x_0(t_1) = J(u, x) = \gamma.$$

Вводя следующие векторы и матрицы

$$A_0(t) = \begin{pmatrix} O_{1,1} & O_{1,n} \\ O_{n,1} & A(t) \end{pmatrix}, \;\; B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ O_{n,1} \end{pmatrix}, \;\; B_2(t) = \begin{pmatrix} O_{1,m} \\ B(t) \end{pmatrix}, \;\; B_3(t) = \begin{pmatrix} O_{1,n} \\ I_n \end{pmatrix},$$

$$\eta(t) = (x_0(t), x(t))^T, \;\; P_1 = (O_{n,1}, I_n), \;\; P_2 = (1, O_{1,n}),$$

где $O_{k,q}$ – матрица порядка $k \times q$ с нулевыми элементами, задачу (1)–(3) запишем в виде

$$P_2\eta(t_1) = x_0(t_1) = \gamma \to inf \tag{18}$$

$$\dot{\eta} = A_0(t)\eta + B_1 f_0(P_1\eta, u, t) + B_2(t)u + B_3\mu(t), \;\; t \in I, \tag{19}$$

$$\eta(t_0) = (x_0(t_0), x(t_0)) = (0, x_0) \in R^{n+1}, \;\; \eta(t_1) = (x_0(t_1), x(t_1)) = (\gamma, x_1) \in R^{n+1}, \tag{20}$$

$$\gamma \in \Gamma = \left\{\gamma \in R^1 \;/\; \gamma \geq 0\right\}, \quad u(t) \in U = U(t) \subset L_2(I, R^m), \tag{21}$$

где $f_0(P_1\eta, u, t) = f_0(x, u, t) = \dfrac{1}{2}\left[x^*(t)Q(t)x(t) + 2x^*(t)M(t)u(t) + u^*(t)R(t)u(t)\right],\ t \in I.$

Краевая задача оптимального управления (18)–(21) может быть решена так же принципом погружения, полагая значение $\gamma = \dfrac{\gamma_0}{2}$.

Рассмотрим линейную управляемую систему

$$\dot{\xi} = A_0(t)\xi + B_1 w_1(t) + B_2(t)w_2(t) + B_3\mu(t), \quad t \in I, \tag{22}$$

$$\xi(t_0) = \eta(t_0) = (0, x_0) = \xi_0, \quad \xi(t_1) = \eta(t_1) = \xi_1 = (\gamma, x_1), \tag{23}$$

$$w_1(\cdot) \in L_2(I, R^1), \quad w_2(\cdot) \in L_2(I, R^m). \tag{24}$$

Введем следующие векторы и матрицы

$$B_0(t) = (B_1, B_2(t)), P(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \overline{\Phi}(t_0, t)B_0(t)B_0^*(t)\overline{\Phi}^*(t_0, t), P(t_0, t_1) = P(t_0, t) + P(t, t_1),$$

$$\Lambda_1(t, \xi_0, \xi_1) = B_0^*(t)\overline{\Phi}^*(t_0, t)P^{-1}(t_0, t_1), a_1 = \overline{\Phi}(t_0, t_1)[\xi_1 - \overline{\Phi}(t_1, t_0)\xi_0] - \int_{t_0}^{t_1} \overline{\Phi}(t_0, t)B_3\mu(t)dt,$$

$$T_1(t) = -B_0^*(t)\overline{\Phi}^*(t_0, t)P^{-1}(t_0, t_1)\overline{\Phi}(t_0, t_1), T_2(t) = -\overline{\Phi}(t, t_0)P(t_0, t)P^{-1}(t_0, t_1)\overline{\Phi}(t_0, t_1),$$

$$\Lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) = \overline{\Phi}(t, t_0)P(t, t_1)P^{-1}(t_0, t_1)\xi_0 + \overline{\Phi}(t, t_0)P(t_0, t)P^{-1}(t_0, t_1)\overline{\Phi}(t_0, t_1)\xi_1 +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \overline{\Phi}(t, \tau)B_3\mu(\tau)d\tau - \overline{\Phi}(t, t_0)P(t_0, t)P^{-1}(t_0, t_1)\int_{t_0}^{t_1} \overline{\Phi}(t_0, t)B_3\mu(t)dt.$$

где $\overline{\Phi}(t, \tau) = \chi(t)\chi^1(\tau)$, $\chi(t)$ – фундаментальная матрица решений линейной однородной системы $\dot{\zeta} = A_0(t)\zeta$.

Как следует из принципа погружения, те и только те управления $w_1(t), w_2(t), t \in I$, переводят траекторию системы (22) из точки ξ_0 в точку ξ_1 если $w_1(t) \in W_1$, $w_2(t) \in W_2$,

$$W_1 = \left\{w_1(\cdot) \in L_2(I, R^1) \ / \ w_1(t) = v_1(t) + \Lambda_{11}(t) + T_{11}(t)\overline{z}(t_1), \forall v_1(\cdot) \in L_2(I, R^1)\right\}, \tag{25}$$

$$W_2 = \left\{w_2(\cdot) \in L_2(I, R^m) \ / \ w_2(t) = v_2(t) + \Lambda_{12}(t) + T_{12}(t)\overline{z}(t_1), \forall v_2(\cdot) \in L_2(I, R^m)\right\}, \tag{26}$$

где $v(t) = (v_1(t), v_2(t))$, $\Lambda_1(t, \xi_0, \xi_1) = \Lambda_1(t) = (\Lambda_{11}(t), \Lambda_{12}(t)$, $T_1(t) = (T_{11}(t), T_{12}(t))$, функция $\overline{z}(t) = \overline{z}(t, v)$, $t \in I$, – решение дифференциального уравнения

$$\dot{\overline{z}} = A_0(t)\overline{z} + B_1 v_1(t) + B_2(t)v_2(t), \ \overline{z}(t_0) = 0, \ t \in I, \ v_1(\cdot) \in L_2(I, R^1), \ v_2(\cdot) \in L_2(I, R^m). \tag{27}$$

Решение дифференциального уравнения (22) с граничными условиями (23), соответствующее управлениям $w_1(t) \in W_1$, $w_2(t) \in W_2$, определяемым формулами (25), (26):

$$\xi(t) = \xi(t, w_1, w_2) = \overline{z}(t, v) + \Lambda_2(t, \xi_0, \xi_1) + T_2(t)\overline{z}(t_1, v), \quad t \in I, \tag{28}$$

Заметим, что если $w_1(t) = f_0(P_1\eta, u, t) \in W_1$, $w_2(t) = u(t) \in W_2$, то краевые задачи (19)–(21) и (22)–(24) совпадают, причем $\eta(t) = \xi(t)$, $t \in I$, где $\xi(t)$, $t \in I$, определяется по формуле (28).

Наряду с краевой задачей оптимального управления (18)–(21), рассмотрим следующую начальную задачу оптимального управления:

$$J_2(\theta) = \int_{t_0}^{t_1} \big[|w_1(t) - f_0(P_1\xi(t), u(t), t)|^2 + |w_2(t) - u(t)|^2\big]dt = \int_{t_0}^{t_1} F_1(q_1, t)dt \to inf \quad (29)$$

при условиях (27), $\gamma \in \Gamma,\ u(t) \in U$, где $\theta = (v_1, v_2, u),\ q_1 = (\overline{z}(t), \overline{z}(t_1), v_1(t), v_2(t), u(t))$, $w_1(t) \in W_1, w_2(t) \in W_2$, функция $\xi(t), t \in I$, определяется по формуле (28).

Лемма 2. *Пусть матрица $P(t_0, t_1)$ положительно определена. Если матрица $\dfrac{\partial^2 F_1(q_1, t)}{\partial q_1^2} \geq 0$, то функционал (29) при условиях (27), $\gamma \in \Gamma, u \in U$ является выпуклым.*

Теорема 5. *Пусть матрица $P(t_0, t_1)$ положительно определена и производная $\dfrac{\partial F_1(q_1, t)}{\partial q_1}$ удовлетворяет условию Липшица. Тогда*

1. *функционал (29) при условиях (27) непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала $J_2'(\theta) = (J_{21}'(\theta), J_{22}'(\theta), J_{23}'(\theta)) \in H_1,\ H_1 = L_2(I, R^1) \times L_2(I, R^m) \times L_2(I, R^m)$ в любой точке $\theta \in X_1 = L_2(I, R^1) \times L_2(I, R^m) \times U \subset H_1$ вычисляется по формуле*

$$J_{21}'(\theta) = \frac{\partial F_1}{\partial v_1} - B_1^*\psi_1(t), \quad J_{22}'(\theta) = \frac{\partial F_1}{\partial v_2} - B_2^*(t)\psi_1(t), \quad J_{23}'(\theta) = \frac{\partial F_1}{\partial u}, \quad (30)$$

где $\psi_1(t) = \psi_1(t, v_1, v_2), t \in I,$ – решение сопряженной системы

$$\dot{\psi}_1 = -A_0^*(t)\psi_1(t) + \frac{\partial F_1}{\partial \overline{z}}, \quad \psi_1(t_1) = -\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial F_1}{\partial \overline{z}(t_1)}dt. \quad (31)$$

2. *градиент $J_2'(\theta) \in H_1, \theta \in X_1$ удовлетворяет условию Липшица.*

На основе соотношений (30)–(31) строим последовательность $\{\theta_n\} = \{(v_1^n, v_2^n, u_n)\}$ по правилам

$$v_1^{n+1} = P_{L_2^\rho}\big[v_1^n - \alpha_n J_{21}'(\theta_n)\big], \quad v_2^{n+1} = P_{L_2^\rho}\big[v_2^n - \alpha_n J_{22}'(\theta_n)\big]$$

$$u^{n+1} = P_U\big[u_n - \alpha_n J_{23}'(\theta_n)\big], \quad n = 0, 1, 2, ... \quad (32)$$

где $0 < \varepsilon_0 \leq \alpha_n \leq \dfrac{2}{K_1 + 2\varepsilon},\ \varepsilon > 0, \quad v_1(t) \in L_2^\rho(I, R^1) = \Big\{v_1(\cdot) \in L_2(I, R^1)\ /\ \|v_1\|^2 \leq \rho^2\Big\}$, $v_2(t) \in L_2^\rho(I, R^m) = \Big\{v_2(\cdot) \in L_2(I, R^m)\ /\ \|v_2\|^2 \leq \rho^2\Big\},\ \rho > 0$ – достаточно большое число.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы 7, последовательность $\{\theta_n\}$ определяются по формуле (32). Тогда:*

1. *числовая последовательность $\{J_2(\theta_n)\}, \theta_n \in X_1, n = 0, 1, 2, ...,$ строго убывает; $\|\theta_n - \theta_{n+1}\| \to 0$ при $n \to \infty$;*

2. *если матрица* $\dfrac{\partial F_1(q_1,t)}{\partial q_1^2} \geq 0$, *то последовательность* $\{\theta_n\}$ *является минимизирующей; функционал (29) достигает нижней грани на множестве* X_1;

3. *справедливы следующие оценки скорости сходимости*

$$0 \leq J_2(\theta_n) - J_{2*} \leq \frac{c_1}{n}, \quad n = 1, 2, ..., \quad c_1 = const > 0,$$

   где $\theta_n \overset{сл}{\to} \theta_*$ при $n \to \infty$, $J_2(\theta_*) = J_{2*} = \inf\limits_{\theta \in X_1} J_2(\theta)$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 6.

Алгоритм решения задач 1–3. Алгоритм построения оптимального управления состоит в последовательности выполнения следующих операций.

1. Решение начальной задачи оптимального управления (13)–(14). В результате находится точка $(\overline{u}), \overline{v})$, где $J_1(\overline{u}), \overline{v}) = 0$;

2. Построение $x(t, \overline{u}) = z(t, \overline{v}) + \lambda_2(t, x_0, x_1) + N_2(t) z(t_1, \overline{v}), t \in I$, и вычисление значения $\gamma_0 = J(\overline{u}, x(\cdot, \overline{u})$;

3. Определение нового значения $\gamma_1 = \dfrac{\gamma_0}{2}$. Выбор значения $\xi_1 = (\gamma_1, x_1)$ и решение начальной задачи оптимального управления (29), (27), $u(t) \in U$. В результате определяется точка $\theta_* = (v_{1*}, v_{2*}, u_*) \in X_1$ где $J_2(\theta_*) = J_{2*}$;

4. Вычисление значения $J_2(v_{1*}, v_{2*}, u_*) = J_{2*}$. Здесь возможны случаи: а) $J_{2*} > 0$, б) $J_{2*} = 0$. Если значение $J_{2*} > 0$, то выбирается значение $\gamma = \dfrac{\gamma_0 + \gamma_1}{2}$, а в случае $J_{2*} = 0$ выбирается $\gamma = \dfrac{\gamma_1}{2}$;

5. Решение задачи оптимального управления (29), (27), $u(t) \in U$ со значением

$$\gamma = \begin{cases} \dfrac{\gamma_0 + \gamma_1}{2}, & \text{если } J_{2*} > 0, \\ \dfrac{\gamma_1}{2}, & \text{если } J_{2*} = 0 \end{cases} \quad \text{и т.д.}$$

Список литературы

[1] *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.В.* Математическая теория оптимальных процессов. –М.: Физматгиз, 1976. -384 с.

[2] *Беллман Р.* Динамическое программирование. –М.: ИЛ, 1960. -400 с.

[3] *Калман Р.* Об общей теории систем управления // Труды I Конгресса ИФАК. -1961. -Т2. - С. 521 – 547.

[4] *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. –М.: Наука, 1968. -475 с.

[5] *Васильев Ф.П.* Методы решения экстремальных задач. –М.: Наука, 1981. -480 с.

[6] *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. –М.: Наука, 1971. -424 с.

[7] *Кротов В.Ф., Гурман В.И.* Методы и задачи оптимального управления. –М.: Наука, 1973. -446 с.

[8] *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задачи оптимального управления. –М.: Наука, 1978. -486 с.

[9] *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. - 1991. - Т. 27, № 9. - С. 1475-1486.

[10] *Айсагалиев С.А.* К теории управляемости линейных систем. –М.: Наука, //АН СССР, Автоматика и телемеханика. -1987. -№5. -С. 10-18.

[11] *Айсагалиев С.А.* О свойствах решений некоторых интегральных уравнений // Изв. НАН РК, сер.физ.-мат. -1992. -№1. -С. 3–8.

[12] *Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С.* Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения. -1993. -Т.29, №4. -С. 555-567.

[13] *Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С.* Краевые задачи обыкновенных дифференциальных уравнений. //Доклады НАН РК. -1993. -№2. -С. 5-11.

[14] *Айсагалиев С.А.* Управляемость и оптимальное управление нелинейных систем. // Изв. РАН, сер. Теория и системы управления. -1993. -№3. -С. 88-99.

[15] *Айсагалиев С.А.* Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траектории и ограниченным управлением. // Дифференциальные уравнения. -1996. -Т.32, №6. -С. 1-7.

[16] *Айсагалиев С.А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Математический журнал. -2005. -№4. -С. 3 – 10.

S.A. Aisagaliev, A.A. Kabidoldanova, Boundary value optimal control problems with quadratic functional and with the account of resource restraint for linear systems. The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №4(71), 32 – 40.

Solution method for boundary value optimal control problems with quadratic functional and with the account of resource restraint for linear systems is developed.

С.А. Айсағалиев, А.А. Қабидолданова, Квадраттық функционалды және шектелген ресурсты сызықты жүйелерді тиімді басқарудың шекаралық есебі. ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №4(71), 32 – 40.

Квадраттық функционалды және шектелген ресурсты сызықты жүйелерді тиімді басқарудың шекаралық есебін шешу әдісі құрастырылған.