Оценка скорости сходимости итерационных алгоритмов для одномерных уравнений несжимаемой жидкости в переменных (ψ, ω) [1]

Ф.С. Аменова
ВКГТУ им. Д. Серикбаева, г. Усть-Каменогорск, Казахстан
E-mail: faramen.74@mail.ru

Аннотация

В данной работе методом априорных оценок исследуется свойства сходимости различных итерационных алгоритмов для решения одномерных сеточных уравнений несжимаемой жидкости в переменных «функция тока, вихрь скорости». Граничные значения для вихря скорости выбраны в виде формулы Тома. Получены оценки скорости сходимости итерационных алгоритмов.

В сеточной области $\overline{D}_h = \left\{x_k = kh, \;\; k = \overline{0, N}\right\}$ рассмотрим одномерную разностную задачу для несжимаемой жидкости следующего вида [1]

$$\begin{aligned} &\omega_{x\overline{x},k} + f\left(x_k\right) = 0, \\ &\psi_{x\overline{x},k} = \omega_k, k = \overline{1, N-1}, \\ &\psi_0 = \psi_N = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

с краевыми условиями для вихря скорости по формуле Тома [2]

$$\omega_0 = \frac{2}{h}\psi_{x,0}, \quad \omega_N = -\frac{2}{h}\psi_{\overline{x},N}. \tag{2}$$

Для нахождения численного решения системы алгебраических уравнений (1),(2) сперва рассмотрим явный итерационный алгоритм следующего вида (**Алгоритм I**):

$$\frac{\omega_k^{n+1} - \omega_k^n}{\tau} = \omega_{x\overline{x},k}^n + f_k, \tag{3}$$

$$\psi_{x\overline{x},k}^{n+1} = \omega_k^{n+1}, \quad k = \overline{1, N-1}, \tag{4}$$

$$\psi_0^{n+1} = \psi_N^{n+1} = 0, \psi_k^0 = \psi_0(kh), k = \overline{0, N}, \tag{5}$$

$$\omega_0^{n+1} = \frac{2}{h}\psi_{x,0}^{n+1}, \quad \omega_N^{n+1} = -\frac{2}{h}\psi_{\overline{x},N}^{n+1}. \tag{6}$$

Покажем, что решение разностной схемы (3)-(6) сходится к решению задачи (1),(2) и получим оценку оценку скорости сходимости.

[1]Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Комитетом науки МОН РК, грант № 0696/ГФ, 2012г.-2014г.

Введем следующие обозначения:

$$(u,v)=\sum_{k=1}^{N-1}u_k v_k h, \quad (u,v]=\sum_{k=1}^{N}u_k v_k h, \quad \|u\|^2=(u,u)\,, \quad \|u\|^2_{(1)}=(u,u]$$

$$z_k^n=\omega_k^n-\omega_k,$$
$$\varphi_k^n=\psi_k^n-\psi_k,$$

здесь ω_k, ψ_k- решение задачи (1),(2), ω_k^n, ψ_k^n - значения итераций (3)-(6), вычисленные в узлах сетки D_h и, в дальнейшем, будем использовать следующие известные неравенста

$$\forall u\in \overset{0}{\underset{h}{\Omega}}(D_h), \quad \delta_0\|u\|^2\le\|u_{\overline{x}}\|^2_{(1)}\le\frac{4}{h^2}\|u\|^2,$$

где $\overset{0}{\underset{h}{\Omega}}(D_h)$ - пространство одномерных сеточных функций, имеющие нулевые значения на граничных точках разностной сетки D_h,

$$\delta_0=4(\sin(\pi h/2)/h)^2.$$

Для погрешностей итераций алгоритма (3)-(6) имеем

$$\frac{z_k^{n+1}-z_k^n}{\tau}=z^n_{x\overline{x},k}, \tag{7}$$

$$\varphi^{n+1}_{x\overline{x},k}=z_k^{n+1}, k=\overline{1,N-1}, \tag{8}$$

$$\varphi_0^{n+1}=\varphi_N^{n+1}=0, \tag{9}$$

$$z_0^{n+1}=\frac{2}{h}\varphi^{n+1}_{x,0}, \quad z_N^{n+1}=-\frac{2}{h}\varphi^{n+1}_{\overline{x},N}. \tag{10}$$

Для получения разностных оценок умножим соотношение (7) на $2\tau\varphi_k^{n+1}h$ и просуммируем по узлам сетки D_h. Учитывая соотношения (8), (9) и используя формулы суммирования по частям имеем:

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|^2_{(1)}-\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n}\right\|^2_{(1)}+\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}-\varphi_{\overline{x}}^{n}\right\|^2_{(1)}-2\tau\left(z_N^n\varphi^{n+1}_{\overline{x},N}-z_0^n\varphi^{n+1}_{x,0}\right)+2\tau\left(z^n,\varphi^{n+1}_{x\overline{x}}\right)=0.$$

Отсюда, с учетом краевых условий (10) можно записать, что

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|^2_{(1)}-\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n}\right\|^2_{(1)}+\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}-\varphi_{\overline{x}}^{n}\right\|^2_{(1)}+\frac{4\tau}{h}\left(\varphi^n_{\overline{x},N}\varphi^{n+1}_{\overline{x},N}+\varphi^n_{x,0}\varphi^{n+1}_{x,0}\right)+2\tau\left(\varphi^n_{x\overline{x}},\varphi^{n+1}_{x\overline{x}}\right)=0$$

и после несложных преобразований имеем

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|^2_{(1)}-\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n}\right\|^2_{(1)}+\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}-\varphi_{\overline{x}}^{n}\right\|^2_{(1)}+\tfrac{2\tau}{h}\left(\left|\varphi^{n+1}_{\overline{x},N}\right|^2+\left|\varphi^{n+1}_{x,0}\right|^2+\left|\varphi^{n}_{\overline{x},N}\right|^2+\left|\varphi^{n}_{x,0}\right|^2\right)+$$
$$+\tau\left(\left\|\varphi^{n+1}_{x\overline{x}}\right\|^2+\left\|\varphi^{n}_{x\overline{x}}\right\|^2\right)=\tfrac{2\tau}{h}\left(\left|\varphi^{n+1}_{\overline{x},N}-\varphi^{n}_{\overline{x},N}\right|^2+\left|\varphi^{n+1}_{x,0}-\varphi^{n}_{x,0}\right|^2\right)+\tau\left\|\varphi^{n+1}_{x\overline{x}}-\varphi^{n}_{x\overline{x}}\right\|^2.$$

Далее, это соотношение можно представить в следующем виде

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|^2_{(1)}-\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n}\right\|^2_{(1)}+\left(1-\tfrac{6\tau}{h^2}\right)h\left(\left|\varphi^{n+1}_{\overline{x},N}-\varphi^{n}_{\overline{x},N}\right|^2+\left|\varphi^{n+1}_{x,0}-\varphi^{n}_{x,0}\right|^2\right)+$$
$$+\tau\left(\left\|\varphi^{n+1}_{x\overline{x}}\right\|^2+\left\|\varphi^{n}_{x\overline{x}}\right\|^2\right)+\left(1-\tfrac{4\tau}{h^2}\right)h\sum_{k=2}^{N-1}\left|\varphi^{n+1}_{\overline{x},k}-\varphi^{n}_{\overline{x},k}\right|^2\le 0.$$

Отсюда при выполнении условия

$$1 - \frac{6\tau}{h^2} \geq 0 \tag{11}$$

имеем следующие неравенства

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^2 + \tau\left(\left\|\varphi_{x\overline{x}}^{n+1}\right\|^2 + \|\varphi_{x\overline{x}}^{n}\|^2\right) \leq \|\varphi_{\overline{x}}^{n}\|_{(1)}^2,$$

$$(1+\tau\delta_0)\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^2 \leq (1-\tau\delta_0)\|\varphi_{\overline{x}}^{n}\|_{(1)}^2,$$

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)} \leq q\|\varphi_{\overline{x}}^{n}\|_{(1)},$$

где

$$q = \sqrt{\frac{1-\tau\delta_0}{1+\tau\delta_0}} < 1, \tag{12}$$

то есть

$$\|\varphi_{\overline{x}}^{n}\|_{(1)} \leq q\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n-1}\right\|_{(1)} \leq \ldots \leq q^n\left\|\varphi_{\overline{x}}^{0}\right\|_{(1)} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Можно гарантировать, что величина $q^n \leq \varepsilon$, где ε - число характеризующее точность итерации, если

$$n \geq n_0(\varepsilon) = \ln(1/\varepsilon)/\ln(1/q)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1 *При выполнении условия* (10) *итераций алгоритма I ((3)-*(6)*) сходится к решению сеточных уравнений* (1), (2) *со скоростью геометрической прогрессии и*

$$n_0(\varepsilon) \approx o\left(\frac{1}{h^2}\right)\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Далее для разностной задачи (1),(2) рассмотрим итерационный алгоритм следующего вида (**Алгоритм II**):

$$\frac{\omega_k^{n+1}-\omega_k^n}{\tau} = \omega_{x\overline{x},k}^{n+1} + f_k, \tag{13}$$

$$\psi_{x\overline{x},k}^{n+1} = \omega_k^{n+1}, \quad k = \overline{1, N-1}, \tag{14}$$

$$\psi_0^{n+1} = \psi_N^{n+1} = 0, \psi_k^0 = \psi_0(kh),$$

$$\omega_0^{n+1} = \frac{2}{h}\psi_{x,0}^n, \quad \omega_N^{n+1} = -\frac{2}{h}\psi_{\overline{x},N}^n. \tag{15}$$

В этом случае уравнения для погрешностей итерации имеют вид

$$\frac{z_k^{n+1}-z_k^n}{\tau} = z_{x\overline{x},k}^{n+1}, \tag{16}$$

$$\varphi_{x\overline{x},k}^{n+1} = z_k^{n+1}, \quad k = \overline{1, N-1}, \tag{17}$$

$$\varphi_0^{n+1} = \varphi_N^{n+1} = 0,$$

$$z_0^{n+1} = \frac{2}{h}\varphi_{x,0}^n, \quad z_N^{n+1} = -\frac{2}{h}\varphi_{\overline{x},N}^n. \tag{18}$$

и имеет место следующее соотношение

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^2 - \left\|\varphi_{\overline{x}}^n\right\|_{(1)}^2 + \left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1} - \varphi_{\overline{x}}^n\right\|_{(1)}^2 - 2\tau\left(z_N^{n+1}\varphi_{\overline{x},N}^{n+1} - z_0^{n+1}\varphi_{x,0}^{n+1}\right) + 2\tau\left(\varphi_{x\overline{x}}^{n+1}, \varphi_{x\overline{x}}^{n+1}\right) = 0.$$

Отсюда, учитывая краевые условия (18) имеем:

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^2 - \left\|\varphi_{\overline{x}}^n\right\|_{(1)}^2 + \left(1 - \frac{2\tau}{h^2}\right) h\left(\left|\varphi_{\overline{x},N}^{n+1} - \varphi_{\overline{x},N}^n\right|^2 + \left|\varphi_{\overline{x},0}^{n+1} - \varphi_{\overline{x},0}^n\right|^2\right) +$$

$$+2\tau\left\|\varphi_{x\overline{x}}^{n+1}\right\|^2 + h\sum_{k=2}^{N-1}\left|\varphi_{\overline{x},k}^{n+1} - \varphi_{\overline{x},k}^n\right|^2 \leq 0.$$

Следовательно, при выполнении условия

$$1 - \frac{2\tau}{h^2} \geq 0 \tag{19}$$

имеем следующие неравенства:

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^2 + 2\tau\left\|\varphi_{x\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^2 \leq \left\|\varphi_{\overline{x}}^n\right\|_{(1)}^2,$$

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^2 + 2\tau\delta_0\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^2 \leq \left\|\varphi_{\overline{x}}^n\right\|_{(1)}^2,$$

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)} \leq q\left\|\varphi_{\overline{x}}^n\right\|_{(1)},$$

где

$$q = \sqrt{\frac{1}{1 + 2\tau\delta_0}} < 1.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2 *При выполнении условия* (19) *итераций* (13)-(15) *сходится к решению* (1), (2) *со скоростью геометрической прогрессии и*

$$n_0(\varepsilon) \approx o\left(\frac{1}{h^2}\right)\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Далее, введем вспомогательную функцию вихря скорости по формуле [3,4]:

$$\overline{\omega}_k = \begin{cases} \omega_0 - \frac{2}{h}\psi_{x,0} = 0, & k = 0, \\ \omega_k, & k = \overline{1, N-1}, \\ \omega_N + \frac{2}{h}\psi_{\overline{x},N} = 0, & k = N. \end{cases}$$

и систему алгебраических уравнений (1),(2) для функций $(\overline{\omega}, \psi)$ запишем в виде

$$\overline{\omega}_{x\overline{x},k} + A_h\psi_k + f_k = 0, \tag{20}$$

$$\psi_{x\overline{x},k} = \overline{\omega}_k, k = \overline{1, N-1}, \tag{21}$$

$$\psi_0 = \psi_N = 0, \overline{\omega}_0 = \overline{\omega}_N = 0. \tag{22}$$

Здесь

$$A_h\psi_k = \frac{2}{h^4}(\delta^{k,1} + \delta^{k,N-1})\psi_k, \quad \delta^{km} = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 1, & k = m. \end{cases}$$

Для нахождения решения операторно-разностных уравнений рассмотрим следующую итерациорнную схему расщепления

$$\frac{\omega_k^{n+1/2} - \omega_k^n}{\tau} = \omega_{x\overline{x},k}^n + A_h\psi_k^{n+1/2} + f_k, \tag{23}$$

$$\psi_{x\overline{x},k}^{n+1/2} = \omega_k^{n+1/2}, \quad k = \overline{1, N-1}, \tag{24}$$

$$\frac{\omega_k^{n+1} - \omega_k^n}{\tau} = \omega_{x\overline{x},k}^{n+1} + A_h\psi_k^{n+1/2} + f_k, \tag{25}$$

$$\psi_{x\overline{x},k}^{n+1} = \omega_k^{n+1}, \quad k = \overline{1, N-1}, \tag{26}$$

$$\omega_0^{n+1/2} = \omega_N^{n+1/2} = 0, \psi_0^{n+1/2} = \psi_N^{n+1/2} = 0, \tag{27}$$

$$\omega_0^{n+1} = \omega_N^{n+1} = 0, \psi_0^{n+1} = \psi_N^{n+1} = 0. \tag{28}$$

Для погрешностей итераций имеем соотношения:

$$\frac{z_k^{n+1/2} - z_k^n}{\tau} = z_{x\overline{x},k}^n + A_h\varphi_k^{n+1/2}, \tag{29}$$

$$\varphi_{x\overline{x},k}^{n+1/2} = z_k^{n+1/2}, k = \overline{1, N-1}, \tag{30}$$

$$\frac{z_k^{n+1} - z_k^{n+1/2}}{\tau} = z_{x\overline{x},k}^{n+1} - z_{x\overline{x},k}^n, \tag{31}$$

$$\varphi_{x\overline{x},k}^{n+1} = z_k^{n+1}, \quad k = \overline{1, N-1}. \tag{32}$$

Исследуем сходимость итерационного процесса (23)-(28) при любом операторе $A_h \geq 0$. Умножим соотношение (29) скалярно на $2\tau\varphi_k^{n+1/2}h$:

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1/2}\right\|_{(1)}^2 - \|\varphi_{\overline{x}}^n\|_{(1)}^2 + \left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1/2} - \varphi_{\overline{x}}^n\right\|_{(1)}^2 + 2\tau\left(z_{x\overline{x}}^n, \varphi^{n+1/2}\right) + 2\tau\left(A_h\varphi^{n+1/2}, \varphi^{n+1/2}\right) = 0. \tag{33}$$

Соотношение (31) умножим скалярно сперва на $\left(\varphi^{n+1} + \varphi^{n+1/2}\right)$, затем на $(z^{n+1} + z^n)$ и после несложных преобразований получим:

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^2 - \left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1/2}\right\|_{(1)}^2 + 2\tau\left\|z^{n+1}\right\|^2 - 2\tau\left(z^n, z^{n+1/2}\right) + \tau^2\left(\left\|z_{\overline{x}}^{n+1}\right\|^2 - \|z_{\overline{x}}^n\|^2\right) = 0.$$

Сложим это выражение с соотношением (33) и имеем следующее основное тождество для алгоритма III

$$\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^{2}-\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n}\right\|_{(1)}^{2}+\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}-\varphi_{\overline{x}}^{n}\right\|^{2}+2\tau\left\|z^{n+1}\right\|^{2}+2\tau\left(A_k\varphi^{n+1/2},\varphi^{n+1/2}\right)+\tau^{2}\left(\left\|z_{\overline{x}}^{n+1}\right\|^{2}-\left\|z_{\overline{x}}^{n}\right\|^{2}\right)=0.$$

Отсюда, можно получить следующие неравенства:

$$(1+\tau\delta_0)\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^{2}+\tau^{2}\left(1+\frac{h^2}{4\tau}\right)\left\|z_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^{2}\le\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n}\right\|^{2}+\tau^{2}\left\|z_{\overline{x}}^{n}\right\|^{2},$$

$$\min\left(1+\tau\delta_0,\ 1+\frac{h^2}{4\tau}\right)\left[\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^{2}+\tau^{2}\left\|z_{\overline{x}}^{n+1}\right\|_{(1)}^{2}\right]\le\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n}\right\|^{2}+\tau^{2}\left\|z_{\overline{x}}^{n}\right\|^{2},$$

то есть

$$E^{n+1}\le qE^{n},$$

где

$$E^{n}=\left\|\varphi_{\overline{x}}^{n}\right\|^{2}+\tau^{2}\left\|z_{\overline{x}}^{n}\right\|^{2},$$

$$q=\frac{1}{\min(1+\tau\delta_0,1+\frac{h^2}{4\tau})}<1$$

Определим оптимальное значение итерационного параметра $\tau=\tau_0$, при котором будет наилучшая сходимость, из следующего равенства

$$\tau\delta_0=\frac{h^2}{4\tau},$$

то есть

$$\tau_0=\frac{h}{2\sqrt{\delta_0}}. \qquad (34)$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 3 *Итерация* (27)-(31) *сходится к решению* (24)-(26) *со скоростью геометрической прогрессии при любых значениях итерационных параметров и при выборе по формуле* (34)

$$n_0(\varepsilon)\approx o\left(\frac{1}{h}\right)\ln\frac{1}{\varepsilon}.$$

Список литературы

[1] *Тарунин Е.Л.* Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. – Иркутск, Изд.Иркут.ун-та, 1990. – 228 с.

[2] *Том А., Эйплт К.* Числовые расчеты полей в технике и физике. – М.: Энергия, 1964. – 208 с.

[3] *Данаев Н.Т., Смагулов Ш.* Об одной методике численного решения уравнений Навье-Стокса в переменных (ψ, ω) // Моделирование в механике. Новосибирск, 1991, т.5 (22), №4 – С. 38-47.

[4] *Вабищевич П.Н.* Реализация краевых условий при решении уравнений Навье-Стокса в переменных «функция тока-вихрь скорости» // Докл.АН СССР, 1983. Т.273, №1. – С. 22-26.

Amenova F.S., A degree value of convergence of iteration algorithms foe equation of incompressible liquid in variables (ψ, ω), The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №4(71), 41 – 47

In this paper investigate the method of a priori estimates of the convergence properties of various of iterative algorithms for solving one-dimensional finite-difference equations of an incompressible fluid variables "stream function-vorticity". The boundary values for the vorticity in the form of a formula selected Tom. A prior estimate of convergence degree of iteration algorithms has been received.

Ф.С. Аменова, (ψ, ω) *айнымалыларында сипатталған сығылмайтын сұйықтықтардың бір өлшемді теңдеулері үшін итерациялық алгоритмнің жинақтылық жылдамдығын бағалау*, ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №4(71), 41 – 47

Бұл жұмыста априорлық бағалау әдісі арқылы "ағын және құйын" айнымалыларында берілген сығылмайтын сұйықтықтардың есептеу торында анықталған бір өлшемді стационар теңдеулері үшін итерациалық алгоритмдердің жинақтылық қасиеттері зерттелген. Құйын функциясы үшін шекаралық шарттар Том формуласы арқылы берілген. Қарастырылған итерациялық алгоритмдер үшін жинақталу жылдамдықтары анықталған.