Об одном подходе решения задачи оптимального перехода

У.М. Ибрагимов
Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова г. Шымкент
e-mail: us-ibr@rambler.ru

Аннотация

В настоящей работе, на основе известных конструкций теории дифференциальных игр, получено необходимое и достаточное условие для возможности перехода из заданной точки $z_0 \in R^n \setminus M$ на M. Исследована для одного важного класса управляемых систем оптимальность времени перехода $T(z_0)$, доказана непрерывность оптимальных управлений (т.е. управлений, реализующих оптимальное время перехода).

1. Пусть управляемый объект описывается уравнением

$$\dot{z} = Cz + u, \tag{1}$$

где z $n-$ мерный вектор евклидова пространства R^n; $C-$ постоянная матрица порядка $n \times n$; $u \in P-$ управляющий параметр, $P-$ непустое подмножество пространства R^n. В пространстве R^n выделено непустое подмножество M, которое называется терминальным.

Определение 1. Будем говорить, что из точки $z_0 \in R^n \setminus M$ возможен переход на M, если существует измеримая функция $u(t) \in P$, $t_0 \leq t \leq t_1$, такая, что решение $z(t),\ t_0 \leq t \leq t_1$, уравнения

$$\dot{z} = Cz + u(t),\ t_0 \leq t \leq t_1 \tag{2}$$

при $t = t_1$ попадает на M, т.е. $z(t_1) \in M$.

Время $T(z_0) = t_1 - t_0$ будем называть временем перехода из точки z_0 на множество M.

Определение 2. Время перехода $T(z_0) = t_1 - t_0$ из точки z_0 на множество M называется оптимальным, если для произвольного времени перехода $T'(z_0) = t_1' - t_0'$ имеет место неравенство $T'(z_0) \geq T(z_0)$.

В настоящей работе на основе известных конструкций теории дифференциальных игр [1] получено необходимое и достаточное условие для возможности перехода из заданной точки $z_0 \in R^n \setminus M$ на M, исследована оптимальность времени перехода $T(z_0)$ для одного важного класса управляемых процессов, доказана непрерывность оптимальных управлений (т.е. управлений, реализующих оптимальное время перехода). В конце работы рассмотрены примеры.

2. Через $D(R^n)$ обозначим пространство всех подмножеств R^n, через $T(R^n)$ – пространство всех замкнутых, через $K(R^n)$ – пространство всех компактных подмножеств пространства R^n.

Пусть $A(r)$, $\alpha \le r \le \beta$, $-$произвольная функция со значениями в пространстве $D(R^n)$. Интегралам $\int\limits_{\alpha}^{\beta} A(r)dr$ называется множество тех и только тех точек $z \in R^n$, для каждой из которых существует суммируемая функция $a(r)$, $\alpha \le r \le \beta$, такая, что $z = \int\limits_{\alpha}^{\beta} a(r)dr$, $a(r) \in A(r)$ для почти всех $r \in [\alpha, \beta]$. В дальнейшем, изменив, если нужно, значения функции $a(r)$, $\alpha \le r \le \beta$ на множестве меры нуль, будем считать, что $a(r) \in A(r)$ при всех $r \in [\alpha, \beta]$.

Через $W(\tau)$, $\tau > 0$, обозначим множество $-M + \int\limits_0^{\tau} e^{rC} P dr$; при $\tau = 0$ положим $w(\tau) = -M$. Имеет место следующая

Лемма 1. Для возможности перехода из точки $z_0 \in R^n \setminus M$ на M необходимо и достаточно, чтобы

$$-e^{\tau C} z_0 \in W(\tau) \tag{3}$$

для некоторого $\tau = \tau_0$.

Доказательство. Достаточность условия (3). Имеем $-e^{\tau_0 C} z_0 \in W(\tau_0)$. По определению алгебраической суммы множеств в векторном пространстве R^n существуют точки $m \in M$ и $w \in W(\tau_0)$, такие, что $-e^{\tau_0 C} z_0 = -m + w$. По определению же интеграла от функции $e^{\tau C} P$, $0 \le r \le \tau_0$, существует суммируемая функция $\bar{u}(r)$, $0 \le r \le \tau_0$, для которой $\int\limits_0^{\tau_0} \bar{u}(r)dr = w$, $\bar{u}(r) \in e^{rC} P$ для всех $r \in [0, \tau_0]$. Ввиду гомеоморфности отображения $e^{rC}\colon P \to e^{rC} P$ суммируемой будет и функция $u(r) = e^{-rC} \bar{u}(r)$, $0 \le r \le \tau_0$. Очевидно, что $u(r) \in P$ для всех $r \in [0, \tau_0]$. Такими же свойствами обладает и функция $u_0(t) = u(\tau_0 - t)$, $0 \le t \le \tau_0$.

Покажем, что под воздействием управления $u_0(t)$, $0 \le t \le \tau_0$ фазовая точка переходит из z_0 на M. Действительно, для решения $z_0(t)$, $0 \le t \le \tau_0$, уравнения (2), соответствующего управлению $u_0(t)$, $0 \le t \le \tau_0$, имеем

$$z_0(\tau_0) = e^{\tau_0 C} z_0 + \int\limits_0^{\tau_0} e^{(\tau_0 - s)C} u_0(s) ds =$$

$$= e^{\tau_0 C} z_0 + \int\limits_0^{\tau_0} e^{(\tau_0 - s)C} u(\tau_0 - s) ds =$$

$$= e^{\tau_0 C} z_0 + \int\limits_0^{\tau_0} \bar{u}(r) dr = m - w + w = m. \tag{4}$$

Необходимость условия (3). Ввиду автономности уравнения (1) все управления можно считать определенными на сегментах вида $[0, T]$.

Ясно, что если под воздействием управления $u(t), 0 \le t \le \tau_0$ фазовая точка переходит из z_0 на M, то для решения $z(t), 0 \le t \le \tau_0$, имеем

$$z(\tau_0) = e^{\tau_0 C} z_0 + \int\limits_0^{\tau_0} e^{(\tau_0 - s)C} u(s) ds = e^{\tau_0 C} z_0 + \int\limits_0^{\tau_0} e^{rC} u(\tau_0 - r) dr \tag{5}$$

Очевидно, функции $u_1(t) = u(\tau_0 - t)$, $0 \le t \le \tau_0$, $\bar{u}(t) = e^{tC}u_1(t)$, $0 \le t \le \tau_0$, суммируемы и $u_1(t) \in P$, $\bar{u}(t) \in e^{tC}P$ для почти всех $t \in [0, \tau_0]$. Поэтому

$$\int_0^{\tau_0} e^{rC}u(\tau_0 - r)dr = \int_0^{\tau_0} e^{rC}u_1(r)dr = \int_0^{\tau_0} \bar{u}(r)dr \in \int_0^{\tau_0} e^{rC}Pdr$$

Так как $z_0(\tau_0) \in M$, то $-e^{\tau_0 C}z_0 \in -M + \int_0^{\tau_0} e^{rC}Pdr = W(\tau_0)$. Лемма доказана.

С помощью леммы 1 можно получить полное описание тех точек, из которых возможен переход на M. Точнее говоря, имеет место следующее утверждение, справедливость которого можно установить почти дословным повторением рассуждений, примененных при доказательстве леммы 1.

Следствие 1. Для возможности перехода из точки $z_0 \in R^n \setminus M$ на M необходимо и достаточно, чтобы

$$z_0 \in e^{-\tau C}M - \int_0^{\tau} e^{(r-\tau)C}Pdr$$

для некоторого $\tau = \tau_0$.

3. **Лемма 2.** Пусть $M-$ замкнутое, $P-$ компактное подмножества R^n, $\tau-$ произвольное неотрицательное число. Тогда а) множество $W(\tau)$ замкнуто; б) для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_0 > 0$, что $W(\tau+\delta) \subset W(\tau)+\varepsilon \cdot S$, где $0 \le \delta \le \delta_0$, S-замкнутый единичный шар с центром в $O \in R^n$.

Доказательство. Ввиду замкнутости множества $-M$ для доказательства замкнутости $W(\tau)$ достаточно установить замкнутость множества $\int_0^{\tau} e^{rC}Pdr$. Замкнутость же интеграла $\int_0^{\tau} e^{rC}Pdr$ следует из слабой компактности семейства всех измеримых функций

$$e^{rC}u(r),\ u(r) \in P,\ 0 \le r \le \tau$$

В силу легко доказываемого тождества

$$W(\tau + \delta) = -M + \int_0^{\tau} e^{rC}Pdr + \int_{\tau}^{\tau+\delta} e^{rC}Pdr = W(\tau) + \int_{\tau}^{\tau+\delta} e^{rC}Pdr$$

и компактности P

$$W(\tau + \delta) \subset W(\tau) + \varepsilon \cdot S,\ 0 \le \delta \le \delta_0, \tag{6}$$

Следствие 2. Из доказательства леммы 2 видно, что включение (6) верно и для $\delta < 0$. Значит, при условиях леммы 2 функция $W(\tau)$, $\tau \ge 0$, со значениями в пространстве $T(R^n)$ полунепрерывна сверху по включению относительно подходящим образом введенной в $T(R^n)$ топологии. Однако в доказываемых ниже теоремах 1 и 2 нам понадобится лишь свойство б), установленное в лемме 2.

Теорема 1. Пусть $M-$ замкнутое, $P-$ компактное подмножества R^n. Предположим, что из точки $z_0 \in R^n \setminus M$ возможен переход на M. Тогда в) из точки z_0 возможен переход за время

$$T_0 = \inf T_\tau(z_0),\ T_\tau(z_0) = \{\tau\colon e^{-\tau C}z_0 \in W(\tau)\} \tag{7}$$

г) время перехода T_0 оптимально.

Доказательство. Пусть $\tau_j,\ j=1,2,\ldots$ - последовательность точек множества $T_\tau(z_0)$ стремящаяся к T_0 при $j\to\infty$. В силу леммы 2 для достаточно больших j

$$-e^{\tau_j C}z_0\in W(\tau_j)\subset W(T_0)+\varepsilon\cdot S \tag{8}$$

Устремляя j к ∞, из (8) получим

$$-e^{T_0 C}z_0\in W(T_0)+\varepsilon\cdot S \tag{9}$$

Ввиду произвольности числа ε и замкнутости множества $W(T_0)$ точка $-e^{T_0C}z_0\in W(T_0)$. Следовательно (лемма 1), из точки z_0 возможен переход за время T_0. Оптимальность времени T_0 очевидна.

Замечание 1. Теорема 1 при различных предположениях и другими методами доказана во многих работах (см., например, [2-5]).

4. В этом пункте предполагается, что $M-$ линейное подпространство, $P-$ или выпуклый компакт, или граница выпуклого компакта пространства R^n (граница рассматривается относительно несущей плоскости). Через L обозначим ортогональное дополнение к M в R^n, через $\pi-$ операцию ортогонального проектирования из R^n на L, через $\nu-$ размерность пространства L. Предположим, что $\nu\geq 2$.

Соответствующим образом изменив рассуждения, примененные в п.3 можно показать, что д) для перехода из точки $z_0\in R^n\setminus M$ на M необходимо и достаточно, чтобы $-\pi e^{\tau C}z_0\in\int\limits_0^\tau \pi e^{rC}Pdr\equiv W_1(\tau)$ при некотором $\tau=\tau_0$; е) множество $W_1(\tau)$ замкнуто, обладает свойством б), сформулированном в лемме 2 (с очевидной заменой шара $S\subset R^n$ на замкнутый единичный шар $S_1\subset L$ с центром в $0\in R^n$);

ж) если из точки $z_0\in R^n\setminus M$ возможен переход на M, то из нее возможен переход на M за оптимальное время.

Замечание 2. Легко убедиться, что свойства д)-ж) верны и в том случае, когда $P-$ компактное подмножество R^n.

Через P_1 обозначим границу множества P. Рассмотрим отображение $\pi e^{rC}:\ P_1\to \pi e^{rC}P_1$.

Лемма 3. Если множество $\pi e^{rC}P_1,\ r\geq 0$, является $(\nu-1)-$ мерной строго выпуклой гиперповерхностью, то для любого единичного вектора $\varphi\in L$ функция $\bar u(\varphi,r),\ r\geq 0$, удовлетворяющая условию

$$\bar u(\varphi,r)\in \Pi e^{rC}P_1, r\geq 0, \tag{10}$$

непрерывна по переменному r.

Доказательство. Ввиду строгой выпуклости гиперповерхности $\Pi e^{rc}p, r\geq 0$, скалярное произведение (φ,e), $e\in \Pi e^{rc}P_1$, своего максимального значения (при фиксированном $\varphi\in L$) достигает на единственном векторе $e=\bar u(\varphi,r)$.

Функция $\Pi e^{rc}p, r\geq 0$, со значениями в пространстве $K(L)$, очевидно, непрерывна в хаусдорфовой метрике (хаусдорфовом расстоянием между множествами $L_1,L_2\in K(L)$ называется нижняя грань чисел $\varepsilon\geq 0$, для которых одновременно $L_1\subset L_2+\varepsilon\cdot S_1, L_2\subset L_1+\varepsilon\cdot S_1$). Нетрудно показать, что непрерывной в той же метрике будет и функция

($co\lfloor \Pi e^{rC} P_1 \rfloor, r \geq 0$ ($co[X], X \subset L$, означает выпуклую оболочку множества X в L). Ясно, что $co\lfloor \Pi e^{rC} P_1 \rfloor = \Pi e^{rC} co[P_1], r \geq 0$ и

$$\max_{e \in \Pi e^{rC} P_1} (\varphi, e) = \max_{\bar{e} \in \Pi e^{rC} co[P_1]} (\varphi, \bar{e}) = (\varphi, \bar{u}(\varphi, r)) \tag{11}$$

Таким образом, выполнены все условия леммы 15.3 работы 6(стр.146). В силу леммы функция $\bar{u}(\varphi, r)$непрерывна по r.

Следствие 3. Если выполнено условие леммы 3 и, кроме того, отображение Πe^{rC}: $P_1 \longrightarrow \Pi e^{rC} P_1$ гомеоморфно, то существует непрерывная по r функция $\bar{u}(\varphi, r)$ такая, что

$$\max_{e \in \Pi e^{rC} P_1} (\varphi, e) = (\varphi, \Pi e^{rC} u(\varphi, r)), u(\varphi, r) \in P_1 \tag{12}$$

Для доказательства достаточно заметить, что при гомеоморфном отображении прообразом непрерывной функции будет непрерывная функция.

В дальнейшем все условия следствия 3 предполагаются выполненными.

Рассмотрим отображение $y = \Pi e^{rC} u(\varphi, r)$ единичной сферы $S_2 (\subset L)$ в L. Интеграл $w = \int\limits_0^\tau \Pi e^{rC} u(\varphi, r) dr$ этого отображение переходит сферу S_2 в $(\gamma - 1)$ - мерную выпуклую гиперповерхность обозначим ее через $W_2(\tau)$. Очевидно, $W_2(0) = 0$. При увеличении τ гиперповерхность $W_2(\tau)$, вообще говоря, расширяется. Замкнутость $W_2(\tau)$ очевидна. Полунепрерывность функции $W_2(\tau), \tau \geq 0$, устанавливается так же, как в лемме 2.

Имеет место (см. теорема 1 п0. 3).

Теорема 2. Пусть $-\Pi e^{rC} z_0 \in W_2(\tau)$ для некоторого τ. Пусть далее

$$T_1 = \inf_\tau \{\tau \colon -\Pi e^{rC} z_0 \in W_2(\tau)\} \tag{13}$$

Тогда ж) за время T_1 возможен переход из точки z_0 на M; з) время перехода T_1 оптимально.

Доказательство. Из отмеченных выше свойств функции $W_2(\tau)$ следует, что $-\Pi e^{T_1} z_0 \in W_2(T_1)$. Значит, существует вектор $\varphi_0 \in S_2$ такой, что $-\Pi e^{T_1} z_0 = \int\limits_0^{T_1} \Pi e^{\tau C} u(\varphi_0, r) dr$. Очевидно, функция $u_0(t) = u(\varphi_0, T_1 - t), 0 \leq t \leq T_1$, непрерывна, принимает свои значения во множестве P. Элементарные вычисления показывают (см. лемма 1), что под воздействием управления $u_0(t), 0 \leq t \leq T_1$ фазовая точка из z_0 переходит на M за время T_1.

В силу теоремы 1 существует оптимальное управление, переводящее фазовую точку из z_0 на M; это управление обозначим через $u_1(t)$, пусть оптимальное время равно T_2.

По принципу максимума [1] существует нетривиальное решение $\psi(t), 0 \leq t \leq T_2$, сопряженного уравнения $\dot{\psi} = -\psi C$ такое, что

$$(\psi(t), u_1(t)) = \max_{u \in P} (\psi(t), u), \psi(T_2) \perp M \tag{14}$$

Введя, если нужно, положительный нормирующий множитель, будем считать $\psi(T_2) = \varphi_1 \in S_2$. Тогда $\psi(t) = \varphi_1 e^{(T_2 - t)C}$. Покажем, что и $u(\varphi_1, T_2 - t) = u_1(t)$, $0 \leq t \leq T_2$. Действительно, в силу (14)

$$(\varphi_1 e^{(T_2 - t)C}, u_1(t)) = \max_{u \in P} (\varphi_1, e^{(T_2 - t)C} u) = \max_{u \in P_1} (\varphi_1, \Pi e^{(T_2 - t)C} u) =$$

$$= (\varphi_1, \Pi e^{(T_2-t)C} u(\varphi_1, T_2 - t)) = (\varphi_1, e^{(T_2-t)C} u(\varphi_1, T_2 - t))$$

Отсюда ввиду строгой выпуклости гиперповерхности $\Pi e^{rC} P_1$ получаем, что $u_1(t) = u(\varphi_1, T_2 - t)$

В силу формулы Коши $\Pi z(T_2) = 0$

$$-\Pi e^{T_2 C} z_0 = \int_0^{T_2} \Pi e^{(T_2-S)C} u_1(S) ds = \int_0^{T_2} \Pi e^{rC} u(\varphi_1, r) dr \in W_2(T_2) \qquad (15)$$

Время T_2 оптимально, поэтому $T_2 = T_1$.

Следствие 4. Пусть выполнены все условия теоремы 2. Тогда оптимальное управление единственно и непрерывно.

Для доказательства достаточно заметить, что из строгой выпуклости гиперповерхности $W_2(\tau)$ следует совпадение векторов φ_0 и φ_1. Непрерывность оптимального управления установлена в лемме 3.

Замечание 3. Можно показать [7], что $Co[W_2(\tau)] = W_1(\tau) = \int\limits_0^\tau \Pi e^{rC} P_1 dr$, т.е. гиперповерхность $W_2(\tau)$ является границей выпуклого тела $W_1(\tau)$.

5. **Примеры 1.** Предложим, что в уравнении 1 параметр u зависит от переменного v: $u = U(v),\ v \in Q,\ Q-(v-1)$-мерная сфера, U-достаточно гладкое дифференцируемое отображение сферы Q в $R^n, M-(n-v)$-мерное линейное подпространство в $R^n, v \geq 2$. Пусть, далее, отображение $\Pi e^{rC} U\colon Q \longrightarrow \Pi e^{rC} U(Q)$ является топологическим отображением таким, что гиперповерхность $Pie^{rCc}U(Q)$ в каждой своей точке $Pie^{rCc}U(v), v \in Q$ имеет положительную гауссову кривизну. Тогда по теореме Адамара [8] гиперповерхность $Pie^{rCc}U(Q)$ будет выпуклой. Нетрудно убедиться, что она строго выпукла (в противном случае она содержит отрезек прямой, в каждой точке которого, очевидно, гауссова кривизна равна нулю).

Следовательно, все условия п.4 выполнены. Поэтому оптимальное управление единственно и непрерывно (теорема 2, следствия 4).

Заметим, что гауссова кривизна гиперповерхности $Pie^{rCc}U(Q)$ в точке $Pie^{\tau C}U(v), v \in Q$, положительна, если в той точке вторая квадратичная форма гиперповерхности $Pie^{\tau C}$ $U(Q)$ положительно определенная (ср.[2,3]).

П. Пусть в евклидовом пространстве $R^v, v \geq 2$, движутся точки x и y согласно уравнениям [1]

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} = \rho u_1, \ddot{y} + \beta \dot{y} = \delta u_2 \qquad (16)$$

где α, β-произвольные, δ и ρ-неотрицательные действительные числа $\delta^2 + \rho^2 \neq 0, \mid u_1 \mid \leq 1, \mid u_2 \mid \leq 1$ (или $\mid u_1 \mid = 1, \mid u_2 \mid = 1$). Процесс начинается из точек $x_0,\ y_0,\ x_0 \neq y_0$ и заканчивается, когда $x = y$.

С помощью замены переменных $x - y = z_1, \dot{x} = z_2, \dot{y} = z_3$ перейдем к системе

$$\dot{z_1} = z_2 - z_3,\ \dot{z_2} = -\alpha z_2 + \rho u_1,\ \dot{z_3} = -\beta z_3 + \delta u_2, \qquad (17)$$

Ясно, что для процесса (17) терминальное множество $M = \{z_1 = 0\}$.

Легко убедится, что для системы (17) выполнены все условия п0.4 (или примера 1). Элементарные вычисления показывают, что каждое оптимальное управление $u_0(t) =$

$(u_{10}(t), u_{20}(t))$ имеет вид $u_{10}(t) \equiv \chi, u_{20}(t) \equiv \chi$, где χ-единичный вектор пространства R^v.

Ш. В п0.4 и примерах 1, 2 предполагалось, что $v \geq 2$. Это связано с тем, что понятие строгой выпуклости гиперповерхности, геометрически наглядное в случае $v \geq 2$, при $v = 1$ вырождается. Однако анализ примененных выше рассуждений показывает, что все результаты справедливы и при $v = 1$. В качестве иллюстрации приведем следующий пример [1]:

$$\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = u, \ |u| \leq 1, M = \{z_1 = 0\}$$

Нетрудно убедиться, что каждое оптимальное управление непрерывно, а именно, $u_0(t) = 1$, для всех точек $z_0 = (z_{10}, z_{20}), z_{10} < 0, u_0(t) \equiv -1$ при $z_{10} > 0$.

Список литературы

[1] *Понтрягин П.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф.*, Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1969.

[2] *Ли Э.Б., Маркус Л.*, Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972.

[3] *Филиппов А.Ф.*, О некоторых вопросах теории оптимального регулирования. // Вестн. МГУ. Сер.матем.и механ., 1959, N 2.

[4] *Neusbadt L.*, The existence of optimal controls in the absence of convexity conditions. // J. Math.Ana.Appl, 1963, N 7.

[5] *Cesari I.*, An existence theorem in problems of optimal controls. // J.SIAM, ser. A., Control, 1967, 3, N 1.

[6] *Красовский Н.Н.*, Игровые задачи о встрече движений. – М.: Наука, 1970.

[7] *Ch. Castaing*, Sur une nouvelle extension du theoreme de Lyapunov. C.R. // Acad. Sci. (Paris), 1967, 264.

[8] *С. Стернберг*, Лекции по дифференциальной геометрии. – М.: Мир, 1970.

Ibragimov U.M., About one method of decision of task of optimal transition. The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №4(71), 48 – 54

In the work on the basis of mathematical theory of optimal processes the necessary and sufficient conditions for possibility of passage from given point $z_0 \in R^n \setminus M$ to M were obtained. For one important class of controllable systems the optimum of passage time $T(z_0)$ was researched, the continuity of optimal controls was proved (i.e. controls realizing the optimal passage time).

Ибрагимов У.М., Тиімді өту есебін шешудің бір әдісі туралы ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №4(71), 48 – 54

Жұмыста тиімді үрдістердің математикалық теориясы негізінде берілген $z_0 \in R^n \setminus M$ нүктеден M-ге өтудің қажетті және жеткілікті шарттары алынған. Басқару үрдістерінің нақты бір сыныбына қатысты $T(z_0)$ тиімді уақытта өту зерттелген, тиімді басқарулардың үздіксіздігі дәлелденген (ягни тиімді уақытта өтуді басқарудың).