Метод Фурье для обратной задачи теплопроводности

А.К. Кудайбергенов
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
e-mail: modestlibertine@gmail.com

Аннотация

Для уравнения распространения тепла в нефти в нефтепроводе рассматривается обратная задача теплопроводности. По изменению температуры нефти в заданных точках в течение заданного промежутка времени определяется коэффициент теплообмена с внешней средой. Эта задача решается методом Фурье.

Рассмотрим уравнение распространения тепла в нефти, движущейся в нефтепроводе (см. [1], [2]):

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - v\frac{\partial T}{\partial x} + k(T - T_0), \tag{1}$$

где $T = T(x,t)$ – температура нефти как функция координаты x и времени t, ρ – плотность, c – удельная теплоемкость, λ – коэффициент теплопроводности, v – скорость движения нефти, k – коэффициент теплообмена с внешней средой, T_0 – температура внешней среды.

Задается начальное условие

$$T(x,0) = f(x), \tag{2}$$

где $f(x)$ – известная функция. Считаем, что нефтепровод очень длинный, так что краевые условия отпадают.

Решение уравнения (1) зависит от k, поэтому иногда будем записывать T как функцию трех переменных: $T = T(k; x, t)$.

В данной работе рассматривается обратная задача теплопроводности: зная, как изменяется температура нефти в заданных точках в течение заданного промежутка времени, определить коэффициент теплообмена с внешней средой.

Если предполагать, что уравнение (1) точно описывает распространение тепла в движущейся нефти и измерения температуры нефти тоже точны, то обратную задачу теплопроводности можно решить следующим образом. Пусть y_1 – температура нефти в точке x_1 в момент времени t_1. Тогда

$$y_1 = T(k; x_1, t_1). \tag{3}$$

Чтобы отсюда найти k, нам нужно знать решение задачи (1)-(2).

Вначале известным способом сведем уравнение (1) к уравнению теплопроводности. Предположим, что $T_0 = const$. Замена $\tilde{T} = T - T_0$ сводит уравнение (1) к уравнению

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} = a^2\,\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} + b\frac{\partial \tilde{T}}{\partial x} + k_0\tilde{T}, \tag{4}$$

где

$$a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}\,,\ b = -\frac{v}{c\rho}\,,\ k_0 = \frac{k}{c\rho}\,.$$

Сделав замену $\tilde{T} = e^{\alpha x + \beta t} u(x,t)$, из уравнения (4) получим уравнение

$$\beta u + \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Big(\alpha^2 u + 2\alpha \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big) + b \Big(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x} \Big) + k_0 u. \tag{5}$$

Подберем α и β так, что

$$\beta = a^2 \alpha^2 + b\alpha + k_0,$$
$$2a^2 \alpha + b = 0,$$

т.е.

$$\alpha = -\frac{b}{2a^2}\,,$$
$$\beta = a^2\alpha^2 + b\alpha + k_0 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a^2} + k_0 = k_0 - \frac{b^2}{4a^2}\,.$$

Тогда уравнение (5) сведется к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,, \tag{6}$$

а начальное условие (2) превратится в

$$u(x,0) = (f(x) - T_0) e^{-\alpha x}. \tag{7}$$

Как известно (см. [3] или [4]), решением задачи (6)-(7) является

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} (f(s) - T_0) e^{-\alpha s} e^{-\frac{(x-s)^2}{4a^2 t}} \, ds. \tag{8}$$

Тогда решением задачи (1)-(2) будет

$$T(x,t) = T_0 + e^{\alpha x + \beta t} u(x,t), \tag{9}$$

где

$$\alpha = -\frac{b}{2a^2} = \frac{v}{2\lambda}\,, \ \beta = k_0 - \frac{b^2}{4a^2} = \frac{k}{c\rho} - \frac{v^2}{4c\rho\lambda}\,, \ a^2 = \frac{\lambda}{c\rho}\,. \tag{10}$$

Из (3), (9), (10) получаем

$$y_1 = T_0 + e^{\frac{v}{2\lambda} x_1 + (\frac{k}{c\rho} - \frac{v^2}{4c\rho\lambda}) t_1} u(x_1, t_1), \tag{11}$$

откуда

$$k = \frac{c\rho}{t_1} \, \ln \frac{y_1 - T_0}{u(x_1,t_1)} + \frac{v^2}{4\lambda} - \frac{v c\rho x_1}{2\lambda t_1}\,. \tag{12}$$

Но, поскольку уравнение (1) только приближенно описывает распространение тепла и измерения температуры тоже не абсолютно точны, лучше сделать некоторое усреднение. Рассмотрим функционал

$$I(k) = \sum_{i=1}^{m} \int_0^{\tau} [T(k; x_i, t) - y_i(t)]^2 \, dt, \tag{13}$$

который выражает средне-квадратичное отклонение решения задачи (1)-(2) в заданных точках x_i от результатов измерения температуры $y_i(t)$ в этих точках на заданном интервале времени τ.

Обратная задача теплопроводности эквивалентна задаче нахождения точки минимума функционала (13). Эту задачу будем решать градиентным методом [5], при котором приближения к решению выбираются следующим образом:

$$k_{n+1} = k_n - \alpha_n I'(k_n), \tag{14}$$

где $\alpha_n > 0$, $n = 0, 1, \ldots$.

Чтобы посмотреть, насколько хорошее приближение к решению дает градиентный метод (14), возьмем конкретные значения параметров, входящих в (1), (2) и (13), по ним подберем функции $y_i(t)$, при которых функционал (13) принимает наименьшее значение, и с помощью (14) будем вычислять приближения к решению, начиная с произвольного k_0.

Ясно, что наименьшим значением функционала (13) является 0, которое достигается при $y_i(t) = T(k; x_i, t)$.

Пусть для простоты $m = 1$, $x_1 = 1$ и $T_0 = 280$. Значения c, ρ, λ, v (выраженные в единицах системы СИ) возьмем близкими к реальным: $c = 2\cdot 10^3$, $\rho = 10^3$, $\lambda = 0.1$, $v = 1$. Пусть $k = 0.02$, $f(x) \equiv 300$, $\tau = 10000$.

Чтобы запустить процесс (14), вычислим производную функционала (13):

$$\begin{aligned} I'(k) &= 2\int_0^{\tau} [T(k; x_1, t) - y_1(t)]\, T'_k(k; x_1, t)\, dt \\ &= 2\int_0^{\tau} [T(k; x_1, t) - y_1(t)]\, \frac{t}{c\rho}\, T(k; x_1, t)\, dt \\ &= \frac{2}{c\rho}\Big[\int_0^{\tau} (T(k; x_1, t))^2\, t\; dt - \int_0^{\tau} y_1(t)\, T(k; x_1, t)\, t\, dt\Big]. \end{aligned}$$

Для простоты в (14) берем $\alpha_n = const$. На языке Maple написана программа, которая для заданных k_0, α_n и числа итераций m вычисляет k_m. Для $k_0 = 2.34$ и $\alpha_n = 10^{-4}$ полученные результаты представлены в следующей таблице:

m	k_m
3	0.102649000
5	0.029167000
7	0.021017000
10	0.020380000
20	0.020001000

Эти результаты показывают, что градиентный метод (14) дает хорошее приближение к точному решению.

Автор искренне благодарен своему научному руководителю С.Я. Серовайскому за постановку задачи и внимание к работе.

Список литературы

[1] *Агапкин В.М., Кривошейн Б.Л., Юфин В.А.* Тепловой и гидравлический расчеты трубопроводов для нефти и нефтепродуктов. – М.: Недра, 1981. – 256 с.

[2] *Чарный И.А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. – М.: Недра, 1975. – 296 с.

[3] *Араманович И.Г., Левин В.И.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969.

[4] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М., 1977.

[5] *Измайлов А.Ф., Солодов М.В.* Численные методы оптимизации. – М.: Физматлит, 2005.

A.K. Kudaibergenov, *Fourier method for the inverse heat transfer problem* The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №4(71), 55 – 58

For the equation of heat conduction in oil in a pipe-line, the inverse heat transfer problem is considered. By the change of the oil temperature at given points during a given time interval, the coefficient of heat exchange with outer medium is determined. This problem is solved using Fourier method.

А.Қ. Құдайбергенов, *Жылу еткізуді кері есеп үшін Фурье әдіс*, ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №4(71), 55 – 58

Мұнай құбырындағы мұнайда жылу таратудың тендеуі үшін жылу еткізуді кері есеп қаралады. Уақыттың тап қалған аралығының ағымында тап қалған нүктелерде мұнайының температурасы өзгеріс бойынша сыртқы ортамен жылу алмасуы коэффициенті анықталады. Бұл есеп Фурье әдіспен ұйғарылады.