Начально-краевые задачи для уравнения Бельтрами с полярной особенностью в неограниченной области

У.Р. Кушербаева
Алматинский институт энергетики и связи, Алматы, Казахстан

Аннотация

Коэффициенты рассматриваемого уравнения имеют полюс первого порядка. В этой точке гауссова кривизна обращается в нуль. В теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения задача построения изометрически сопряженных координат решается с помощью уравнения Бельтрами. В данной работе решены начально-краевые задачи для уравнения Бельтрами с полярной особенностью в неограниченной области.

Пусть $G = \{z = re^{i\varphi} : 0 \leq r < \infty\}$, $\nu > 1-$ действительное число, $\mu = \frac{\nu}{1-\beta} > 1$, $k = [\mu]$. Здесь $[a]-$ целая часть a.

Рассмотрим в G уравнение Бельтрами с сингулярной точкой

$$\partial_{\overline{z}}V - \beta e^{2i\varphi}\partial_z V + \frac{a(\varphi)}{2\overline{z}}V + \frac{b(\varphi)}{2\overline{z}}\overline{V} = 0, \tag{1}$$

где $\partial_{\overline{z}} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y})$, $\partial_z = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y})$, $a(\varphi),\ b(\varphi) \in C[0, 2\pi]$, $a(\varphi + 2\pi) = a(\varphi)$, $b(\varphi + 2\pi) = b(\varphi)$, $0 \leq \beta < 1$.

Задача A. Требуется найти решение уравнения (1) из класса $C^1(G)$, удовлетворяющее условиям:

$$\frac{\partial^n V}{\partial r^n}(0, \varphi) = 0,\ (n = \overline{1, k-1}), \tag{2}$$

$$|V(r, \varphi)| = O(r^k),\ r \to \infty \tag{3}$$

и граничному условию

$$ReV(r, 0) = ReV(r, 2\pi) = b_1 r^{\mu},\ 0 \leq r < \infty, \tag{4}$$

где b_1- действительное число , $k > 1$-целое.

Задача B. Требуется найти решение уравнения (1) из класса $C^1(G)$, удовлетворяющее условиям (2), (3) и граничному условию $ImV(r, 0) = ImV(r, 2\pi) = b_2 r^{\mu}$, $0 \leq r < \infty$, где b_2- действительное число.

Решения задач. В [3] получено решение уравнения (1) из класса $C^1(G)$ в виде

$$V(r, \varphi) = r^{\mu}(\overline{c}P_{\nu,1}(\varphi) + cP_{\nu,2}(\varphi)) \cdot exp(\frac{i}{1+\beta}(\nu\varphi + B(\varphi))), \tag{5}$$

где

$$P_{\nu,1}(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\nu,2k-1}(\varphi),\ P_{\nu,2}(\varphi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{\nu,2k}(\varphi),$$

$$I_{\nu,k}(\varphi)=\int_0^{\varphi}A_\nu(\gamma)\overline{I_{\nu,k-1}(\gamma)}d\gamma,(k=\overline{2,\infty}),\ I_{\nu,1}(\varphi)=\int_0^{\varphi}A_\nu(\gamma)d\gamma,$$

$$A_\nu(\varphi)=\frac{i}{1+\beta}b(\varphi)exp(-\frac{2i}{1+\beta}(\nu\varphi+ReB(\varphi))),\ B(\varphi)=\int_0^{\varphi}a(\gamma)d\gamma,$$

$$c=\begin{cases}\alpha, & \text{если } \triangle_1(\nu)=\triangle_2(\nu)=0,\\ \triangle_1(\nu)\cdot\alpha-\overline{\triangle_2(\nu)}\cdot\overline{\alpha}, & \text{если } |\triangle_1(\nu)|=|\triangle_2(\nu)|\neq 0,\end{cases} \tag{6}$$

$\alpha-$ произвольное комплексное число, $\nu-$ решение уравнения

$$ReP_{\nu,2}(2\pi)cos(\frac{2\pi}{1+\beta}(\nu+d))-ImP_{\nu,2}(2\pi)sin(\frac{2\pi}{1+\beta}(\nu+d))=1$$

из отрезка $[k,k+1]$,

$$\triangle_1(\nu)=P_{\nu,1}(2\pi),\ \triangle_2(\nu)=P_{\nu,2}(2\pi)-exp(\frac{-2\pi i}{1+\beta}(\nu+d)),\ d=\frac{B(2\pi)}{2\pi}.$$

В [3] доказано, что для любого целого числа k всегда существует число $\nu\in[k,k+1]$, такое, что

$$|\triangle_1(\nu)|=|\triangle_2(\nu)| \tag{7}$$

Поэтому для такого ν функция $V(r,\varphi)$, определенная по формуле (5), является решением уравнения (1) из класса $C^1(G)$, удовлетворяющим условиям (2),(3) и $V(r,0)=V(r,2\pi)$.

Рассмотрим задачу А. Произвольное комплексное число α из (6) выберем так, чтобы имело место равенство (4). Для этого подставляя (4) в (5), получим $Rec=b_1$ при $\triangle_1(\nu)=\triangle_2(\nu)=0$ и $Re(\triangle_1(\nu)\alpha-\overline{\triangle_2(\nu)}\cdot\overline{\alpha})=b_1$ при $|\triangle_1(\nu)|=|\triangle_2(\nu)|,\ \triangle_1(\nu)\neq 0$.

Найденное отсюда число α подставим в (6):

$$c=\begin{cases}b_1+i\beta, & \text{если } \triangle_1(\nu)=\triangle_2(\nu)=0,\\ \dfrac{b_1(\triangle_1(\nu)-\triangle_2(\nu))}{Re(\triangle_1(\nu)-\triangle_2(\nu))}, & \text{если } Re\triangle_1(\nu)\neq Re\triangle_2(\nu),\ \triangle_1(\nu)\neq 0,\\ \dfrac{-b_1(\triangle_1(\nu)+\triangle_2(\nu))i}{Im(\triangle_1(\varphi)+\triangle_2(\varphi))}, & \text{если } Im\triangle_1(\nu)\neq -Im\triangle_2(\nu),\ \triangle_1(\nu)\neq 0,\\ 2Im(\alpha\triangle_1(\nu))i, & \text{если } \triangle_1(\nu)=\overline{\triangle_2(\nu)},\ \triangle_1(\nu)\neq 0,\ b_1=0\end{cases} \tag{8}$$

Здесь $\alpha-$ произвольное комплексное, $\beta-$ произвольное действительное числа.

Таким образом, имеет место теорема:

Теорема 1. При $\triangle_1(\nu)\neq\overline{\triangle_2(\nu)}$ задача А имеет единственное решение, при $\triangle_1(\nu)=\triangle_2(\nu)=0$ задача А имеет бесконечно много решений, при $\triangle_1(\nu)\neq 0$, задача А имеет решение только при $b_1=0$. Здесь ν из отрезка $[k,k+1]$ удовлетворяет условию (7). Эти решения находятся по формулам (5),(8).

Аналогично, решая задачу В, получим решение в виде (5), где ν из отрезка $[k, k+1]$ удовлетворяет условию (7),

$$c = \begin{cases} \lambda + ib_2, & \text{если } \triangle_1(\nu) = \triangle_2(\nu) = 0, \\ \dfrac{b_2(\triangle_1(\nu) - \triangle_2(\nu))}{Im(\triangle_1(\nu) - \triangle_2(\nu))}, & \text{если } Im\triangle_1(\nu) \neq Im\triangle_2(\nu),\ \triangle_1(\nu) \neq 0, \\ \dfrac{ib_2(\triangle_1(\nu) + \triangle_2(\nu))i}{Re(\triangle_1(\varphi) + \triangle_2(\varphi))}, & \text{если } Re\triangle_1(\nu) \neq -Re\triangle_2(\nu),\ \triangle_1(\nu) \neq 0, \\ 2Re(\alpha\triangle_1(\nu)), & \text{если } \triangle_1(\nu) = \overline{\triangle_2(\nu)},\ \triangle_1(\nu) \neq 0,\ b_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

Теорема 2. При $\triangle_1(\nu) \neq -\overline{\triangle_2(\nu)}$ задача В имеет единственное решение , где $\nu-$ решение уравнения (7) из отрезка $[k, k+1]$. При $\triangle_1(\nu) = \triangle_2(\nu) = 0$ задача В имеет бесконечно много решений, при $\triangle_1(\nu) = -\overline{\triangle_2(\nu)}$, $\triangle_1(\nu) \neq 0$, задача В имеет решение только при $b_2 = 0$. Эти решения находятся по формулам (5),(9).

Список литературы

[1] *Усманов З.Д.* Бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения. // Differential Geometry. Banach Center Publications. Warsaw, 1984. V.12. P. 241-272.

[2] *Тунгатаров А.Б.* Об одном способе построения непрерывных решений уравнения Карлемана-Векуа с сингулярной точкой. // Дифференциальные уравнения. 1992. Т.28, №8. С. 1427-1434.

[3] *Кушербаева У.Р.* Об одном классе уравнений Карламана-Векуа с полярной особенностью. // Вестник КазГУ. Сер. математика, механика, информатика. 1999. №3. С. 3-7.

U.R. Kusherbayeva, Initial–boundary problems for Beltrami equation with polar singularity in unbounded domain The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №4(71), 59 – 61

The reason of it is that there is an extreme restriction of the application of that is Gauss curvature should be strictly positive. On the other hand search for isometrically connected coordinates on the surface of positive curvature with the point of condensation brings to the proof of the solution of Beltrami equation. The existence of solution of initial-regional problems for Beltrami equation with singular point in unlimited area with a section is proved.

Ү.Р. Көшербаева, Ақырсыз облыста полярлық ерекшелігі бар Бельтрами теңдеуі үшін қойылған бастапқы–шекаралық есептер, ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №4(71), 59 – 61

Қарастырып отырған теңдеудің коэффициентерінің координаталар бас нүктесінде бірінші ретті полюстері бар. Осы нүктеде Гаусс қисықтығы нөлге тең. Тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң ақырсыз аз иілетін беттер теориясында изометриялы түйіндес координаттарды табу есебі Бельтрами теңдеуінің көмегімен шешіледі. Бұл жұмыста ақырсыз облыста полярлық ерекшелігі бар Бельтрамидің теңдеуі үшін қойылған бастапқы- шекаралық есептердің үзіліссіз шешімдері табылған.