Об операторном методе решения некоторых краевых задач для неоднородного бигармонического уравнения

Б.Х. Турметов, А.Е. Бекаева
МКТУ им.Х.Ясави
e-mail: turmetovbh@mail.ru

Аннотация

В настоящей работе рассматриваются вопросы разрешимости некоторых краевых задач для неоднородного бигармонического уравнения.

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - единичный шар, $n \geq 2$, $\partial\Omega = \{x \in R^n : |x| = 1\}$ - сфера. Пусть далее, $u = u\,(x)$ - гладкая функция в области $\overline{\Omega}$.

Обозначим $r = |x|$ и рассмотрим операторы

$$\Gamma_0[u](x) = r\frac{\partial u}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}, \Gamma_c[u](x) = r\frac{\partial u}{\partial r} + cu, \quad c > 0,$$

$$\Gamma_c^{\ell}[u](x) = \Gamma_c\left[\Gamma_c^{\ell-1}[u]\right](x), \ell = 1, 2, ..., c \geq 0$$

$$\Gamma_{\vec{c}}^{\ell}[u](x) = \Gamma_{c_1}\left[\Gamma_{c_2}[...\Gamma_{c_\ell}[u]]...\right](x), \ell = 1, 2, ..., \vec{c} = (c_1, c_2, ..., c_\ell), c_j > 0$$

Рассмотрим также операторы

$$\Gamma_c^{(-\ell)}[u](x) = \frac{(-1)^{\ell-1}}{(\ell-1)!}\int_0^1 (\ln t)^{\ell-1} t^{c-1} u\,(tx)\,dt, \quad c \geq 0,$$

$$\Gamma_{\vec{c}}^{(-\ell)}[u](x) = \int_0^1 ... \int_0^1 t^{\vec{c}-1} u\,(tx)\,dt_1...dt_\ell, \quad t^{\vec{c}-1} = t^{c_1-1} \cdot ... \cdot t^{c_\ell-1}$$

Приведем известные свойства операторов Γ_c^{ℓ} и $\Gamma_c^{-\ell}$ [1].

Лемма 1. Для любого $x \in \Omega$ справедливы равенства

1) если $u(0) = 0$, то

$$\Gamma_0^{(\ell)}\left[\Gamma_0^{(-\ell)}[u](x)\right] = u(x) \tag{1}$$

2)

$$\Gamma_0^{(-\ell)}\left[\Gamma_0^{(\ell)}[u](x)\right] = u(x) - u(0) \tag{2}$$

3)

$$\Gamma_{\vec{c}}^{(\ell)}\left[\Gamma_{\vec{c}}^{(-\ell)}[u](x)\right] = \Gamma_{\vec{c}}^{(-\ell)}\left[\Gamma_{\vec{c}}^{(\ell)}[u](x)\right] = u\,(x)\,, \vec{c} = (c_1, ..., c_\ell), c_j > 0 \tag{3}$$

Лемма 2.Для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$\Delta\left[\Gamma_c\left[u\right](x)\right] = \Gamma_{c+2}\left[\Delta u\right](x)\,, \quad c \geq 0, \tag{4}$$

где $\Gamma_{c+2} = r\frac{\partial}{\partial r} + c + 2$.

Лемма доказывается непосредственным применением оператора Δ к функции $u(x)$.

Следствие 1. Пусть $m = 1, 2, \ldots, \quad \ell = 1, 2, \ldots$ и $c \geq 0$. Тогда для любого $x \in \Omega$ справедливо равенство

$$\Delta^m \left[\Gamma_c^\ell \left[u\right](x)\right] = \Gamma_{c+2m}^\ell \left[\Delta^m u\right](x).$$

Теперь переходим к изучению некоторых краевых для неоднородного бигармонического уравнение

$$\Delta^2 u(x) = g(x), \quad x \in \Omega \tag{5}$$

с граничными операторами $\Gamma_c^\ell \left[u\right](x)$, $\ell = 1, 2, ..., \quad c \geq 0$.

Задача 1. Найти функцию $u(x)$ достаточно гладкую в области $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую уравнению (5) и условиям

$$\Gamma_0^k \left[u\right](x) = f_k(x), \quad k = 1, 2, \quad x \in \partial\Omega \tag{6}$$

Задача 2. Найти функцию $u(x)$ достаточно гладкую в области $\overline{\Omega}$, удовлетворяющую уравнению (5) и условиям

$$\Gamma_0^{k+\ell} \left[u\right](x) = f_k(x), \quad k = 1, 2, \quad \ell \geq 1, \quad x \in \partial\Omega. \tag{7}$$

Нами будут исследованы вопросы нахождения необходимых и достаточных условий разрешимости задач 1 и 2, и поэтому мы не будем специально останавливаться в вопросах гладкости решения считая,что заданные функции являются достаточно гладкими.

Так как $\Gamma_0[u](x)|_{\partial\Omega} = r\frac{\partial u}{\partial r}(x)\big|_{\partial\Omega} = \frac{\partial u}{\partial r}\big|_{\partial\Omega}$, то задачу 1 можно назвать некоторым аналогом задачи Неймана для уравнения (5).

Отметим, что аналогичные задачи для уравнение (5) при $g(x) = 0$ изучены в работах [1-3], а в более общем случае в работах [4,5].

Для исследования вопросов разрешимости задач 1 и 2 нам необходимо привести некоторые сведения о функции Грина задачи Дирихле для уравнения (5).

Известно следующее утверждение (см. [4,6])

Лемма 3. Существует единственная функция $G_{4,n}(x, y)$ такая, что

1) удовлетворяет условиям

$$\Delta G_{4,n}(x, y) = \delta(x - y), \quad G_{4,n}(x, y)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial G}{\partial r}(x, y)\right|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $\delta(x - y)$ - дельта функция Дирака;

2) для любого $g(x) \in L_2(\Omega)$ решение задачи

$$\Delta^2 u(x) = g(x), \ \ x \in \Omega, \quad u(x)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial r}(x)\right|_{\partial\Omega} = 0 \tag{8}$$

представляется в виде $u(x) = \int\limits_\Omega G_{4,n}(x, y) g(y) dy$. $G_{4,n}(x, y)$ называется функцией Грина задачи (8).

В работах [4,6] построены явный вид функции Грина задачи Дирихле для случаев $n \geq 2$. Например, имеет место следующее утверждение.

Лемма 4. В случае n-нечетное или n-четное и $n > 4$ функция Грина задачи (8) представима в виде

$$G_{4,n}(x,y) = c_{4,n}\left[|x-y|^{4-n} - \left|x\,|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{4-n}\right] + \frac{4-n}{2}\left|x\,|y| - \frac{y}{|y|}\right|^{2-n} g(x,y), \qquad (9)$$

где $g(x,y) = (1-|x|^2)(1-|y|^2)$, $c_{4,n} = \frac{1}{2(4-n)(2-n)} \cdot \frac{1}{\omega_n}$, $\omega_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2\cdot\pi^{\frac{n}{2}}}$.

Пусть $v(x)-$ решение следующей задачи Дирихле:

$$\Delta^2 v(x) = g_1(x), \ \ x \in \Omega \qquad (10)$$

$$v(x)|_{\partial\Omega} = \varphi_1(x), \quad \left.\frac{\partial v}{\partial r}(x)\right|_{\partial\Omega} = \varphi_2(x) \qquad (11)$$

где $g_1(x)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ -достаточно гладкие функции.

Легко показать, что если $v_1(x)$ и $v_2(x)$ решение задач

$$\begin{cases} \Delta v_1(x) = 0, \ \ x \in \Omega \\ v_1(x) = \varphi_1(x), \ \ x \in \partial\Omega \end{cases},$$

$$\begin{cases} \Delta v_2(x) = 0, \ \ x \in \Omega \\ v_2(x) = \frac{1}{2}\left[\varphi_2(x) - \frac{\partial v_1}{\partial r}(x)\right], \ \ x \in \partial\Omega \end{cases}$$

то решение задачи (10)-(11) представляется в виде

$$v(x) = \int\limits_{\Omega} G_{4,n}(x,y)\, g_1(y)\, dy + v_1(x) + \left(|x|^2 - 1\right) v_2(x) \qquad (12)$$

Следующее утверждение устанавливает некоторые свойства функции (12).

Лемма 5. Пусть $v(x)$ - решение задачи (10)-(11). Тогда справедливы утверждения: 1) если выполняется условие $v(0) = 0$, то

$$\frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}\left[\varphi_1(y) - \frac{1}{2}\varphi_2(y)\right] dS_y = -\int\limits_{\Omega} G_{4,n}(0,y)\, g_1(y)\, dy \qquad (15)$$

2) если выполняется условие (15), то $v(0) = 0$.

Доказательство. Пусть $v(x)$ - решение задачи (10)-(11). Представим $v(x)$ в виде (12). Тогда

$$v(0) = \int\limits_{\Omega} G_{4,n}(0,y)\, g_1(y)\, dy + v_1(0) - v_2(0)$$

Представим функции $v_1(x)$ и $v_2(x)$ в виде интеграла Пуассона

$$v_1(x) = \frac{1}{\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}\varphi_1(y)\, dS_y, v_2(x) = \frac{1}{2\omega_n}\int\limits_{\partial\Omega}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}\left[\varphi_2(y) - \frac{\partial v_1(y)}{\partial r}\right] dS_y$$

Отсюда

$$v_1(0) - v_2(0) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial\Omega} \left[\varphi_1(y) - \frac{1}{2}\varphi_2(y)\right] dS_y + \frac{1}{2\omega_n} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial v_1}{\partial r}(y)\, dS_y$$

Далее, так как для любого гармонического в шаре Ω функции $w(x)$, для которого функция $\dfrac{\partial w}{\partial r}$ непрерывна на сфере $\partial\Omega$ имеет место равенство $\int\limits_{\partial\Omega} \dfrac{\partial w}{\partial r} dS_y = 0$, то $\int\limits_{\partial\Omega} \dfrac{\partial v_1}{\partial r}(y)\cdot$ $\cdot dS_y = 0$. Следовательно,

$$v_1(0) - v_2(0) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial\Omega} \left[\varphi_1(y) - \frac{1}{2}\varphi_2(y)\right] dS_y.$$

Отсюда следует утверждения леммы. Лемма доказана.

Замечание 1. Используя представление функции Грина [4,6] легко найти значения $G_{4,n}(0, y)$. А именно:

1) если $n = 2$, то

$$G_{4,2}(0, y) = \frac{1}{8\pi} |y|^2 \ln|y| = \frac{1}{2(4-2)} \cdot \frac{1}{\omega_2} |y|^2 \ln|y|;$$

2) если $n = 4$, то

$$G_{4,4}(0, y) = -\frac{1}{8\pi^2} \ln|y| = \frac{1}{2(2-4)} \cdot \frac{1}{\omega_4} \ln|y|;$$

3) если n-нечетное или n-четное и $n > 4$, то

$$G_{4,n}(x, y) = c_{4,n} \left[|y|^{4-n} - 1 + \frac{4-n}{2}\left(1 - |y|^2\right)\right],$$

где $c_{4,n} = \frac{1}{2(2-n)(4-n)} \cdot \frac{1}{\omega_n}$

Лемма 6. Если в задаче (10)-(11) функция $g_1(x)$ имеет вид $g_1(x) = \Gamma_4[g](x) \equiv$ $\equiv \left(r\dfrac{\partial}{\partial r} + 4\right) g(x)$, то условие (13) можно переписать в виде:

1) если $n = 2$, то

$$\int\limits_{\partial\Omega} [2\varphi_1(y) - \varphi_2(y)]\, dS_y = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} |y|\, g(y)\, dy \qquad (14)$$

2) если $n = 4$, то

$$\int\limits_{\partial\Omega} [2\varphi_1(y) - \varphi_2(y)]\, dS_y = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} g(y)\, dy \qquad (15)$$

3) в остальных случаях

$$\int\limits_{\partial\Omega} [2\varphi_1(y) - \varphi_2(y)]\, dS_y = -\frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} \left(1 - |y|^2\right) g(y)\, dy \qquad (16)$$

Доказательство. Пусть $v(x)$ - решение задачи (10)-(11), выполняется условие $v(0) = 0$ и $g_1(x)$ имеет вид $g_1(x) = \left(r\frac{\partial}{\partial r} + 4\right) g(x)$.

Рассмотрим интеграл

$$I = \int\limits_{\Omega} G_{4,n}(0,y)\, g_1(y)\, dy$$

Пусть $\rho = |y|$. Тогда в случае $n = 2$ получаем

$$I = \int\limits_{\Omega} G_{4,2}(0,y)\, g_1(y)\, dy = \frac{1}{4\omega_2} \int\limits_{\Omega} |y|^2 \ln|y| \left[|y| \frac{\partial g}{\partial |y|} + 4g(y)\right] dy = \frac{1}{4\omega_2}\left[I_1^2 + I_2^2\right],$$

где

$$I_1^2 = \int\limits_{\Omega} |y|^2 \ln|y| \cdot |y| \frac{\partial g(y)}{\partial |y|} dy, I_2^2 = 4\int\limits_{\Omega} |y|^2 \ln|y| \cdot g(y)\, dy.$$

Переходя к сферической системе координат, представим I_1^2 в виде

$$I_1^2 = \int\limits_{|\xi|=1} \int\limits_0^1 \rho^2 \ln\rho \cdot \rho \frac{\partial g(\rho,\xi)}{\partial \rho} \cdot \rho d\rho d\xi = \int\limits_{|\xi|=1} \int\limits_0^1 \rho^4 \ln\rho \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\xi)\, d\rho d\xi.$$

Обозначим внутренний интеграл символом $I_{1,1}^2$. Тогда

$$I_{1,1}^2 = \int\limits_0^1 \rho^4 \ln\rho \frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho,\xi)\, d\rho = \rho^4 \ln\rho \cdot g(\rho,\xi)\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} - \int\limits_0^1 \left[4\rho^3 \ln\rho + \rho^3\right] g(\rho,\xi)\, d\rho =$$

$$= -4\int\limits_0^1 \rho^2 \ln\rho \cdot g(\rho,\xi)\, \rho d\rho - \int\limits_0^1 \rho g(\rho,\xi)\, \rho d\rho$$

Отсюда для интеграла I_1^2 получаем представление

$$I_1^2 = -4\int\limits_{|\xi|=1} \int\limits_0^1 \rho^2 \ln\rho g(\rho,\xi)\, \rho d\rho d\xi - \int\limits_{|\xi|=1} \int\limits_0^1 \rho g(\rho,\xi)\, \rho d\rho d\xi =$$

$$= -4\int\limits_{\Omega} |y|^2 \ln|y|\, g(y)\, dy - \int\limits_{\Omega} |y|\, g(y)\, dy.$$

Значит,

$$I = \frac{1}{4\omega_2}\left[I_1^2 + I_2^2\right] = -\frac{1}{4\omega_2}\int\limits_{\Omega} |y|\, g(y)\, dy$$

Тогда условие (13) можно переписать в виде (14). Пусть теперь $n = 4$. Для I имеем

$$I = -\frac{1}{4\omega_4}\left[\int\limits_{\Omega} \ln|y| \cdot |y| \frac{\partial g}{\partial |y|}(y)\, dy + 4\int\limits_{\Omega} \ln|y|\, g(y)\, dy\right] = -\frac{1}{4\omega_4}\left[I_1^4 + I_2^4\right],$$

где

$$I_1^4 = \int\limits_{\Omega} \ln|y| \cdot |y| \frac{\partial g(y)}{\partial |y|} dy, I_2^4 = 4\int\limits_{\Omega} \ln|y| \cdot g(y)\, dy.$$

Тогда

$$I_1^4 = \int\limits_{|\xi|=1} \int\limits_0^1 \ln\rho \cdot \rho \frac{\partial g(\rho,\xi)}{\partial\rho} \cdot \rho^3 d\rho d\xi = \int\limits_{|\xi|=1} \int\limits_0^1 \rho^4 \ln\rho \frac{\partial g}{\partial\rho}(\rho,\xi)\, d\rho d\xi.$$

Далее, исследуем внутренний интеграл

$$\int\limits_0^1 \rho^4 \ln\rho \frac{\partial g}{\partial\rho}(\rho,\xi)\, d\rho = \rho^4 \ln\rho \cdot g(\rho,\xi)\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} - \int\limits_0^1 \left[4\rho^3 \ln\rho + \rho^3\right] g(\rho,\xi)\, d\rho =$$

$$= -4\int\limits_0^1 \rho^3 \ln\rho \cdot g(\rho,\xi)\, d\rho - \int\limits_0^1 \rho^3 g(\rho,\xi)\, d\rho$$

Отсюда для интеграла I_1^4 получаем $I_1^4 = -4\int\limits_{\Omega} \ln|y|\, g(y)\, dy - \int\limits_{\Omega} g(y)\, dy$. Следовательно, $I = \frac{1}{4\omega_n} \int\limits_{\Omega} g(y)\, dy$. Значит, условие (13) в случае $n = 4$ можно переписать в виде

$$\frac{1}{\omega_4} \int\limits_{\partial\Omega} \left[\varphi_1(y) - \frac{1}{2}\varphi_2(y)\right] dS_y = -\frac{1}{4\omega_4} \int\limits_{\Omega} g(y)\, dy$$

Равенство (15) доказано.

Пусть теперь $n \neq 2, 4$. Тогда

$$I = \frac{1}{2(2-n)(4-n)\omega_n} \int\limits_{\Omega} \left[|y|^{4-n} - 1 + \frac{4-n}{2}\left(1 - |y|^2\right)\right] \left(|y| \frac{\partial g(y)}{\partial |y|} + 4g(y)\right) dy =$$

$$= \frac{1}{2(2-n)(4-n)} \cdot \frac{1}{\omega_n} \left[I_1^n + I_2^n\right],$$

где

$$I_1^n = \int\limits_{|\xi|=1} \int\limits_0^1 \rho^n \left[\rho^{4-n} - 1 + \frac{4-n}{2}\left(1 - \rho^2\right)\right] \frac{\partial g(\rho,\xi)}{\partial\rho} d\rho d\xi,$$

$$I_2^n = 4\int\limits_{\Omega} \left[|y|^{4-n} - 1 + \frac{4-n}{2}\left(1 - |y|^2\right)\right] g(y)\, dy.$$

Рассмотрим внутренний интеграл в I_1^n.

$$\int\limits_0^1 \rho^n \left[\rho^{4-n} - 1 + \frac{4-n}{2}\left(1 - \rho^2\right)\right] \frac{\partial g(\rho,\xi)}{\partial\rho} d\rho = \left[\rho^4 - \rho^n + \frac{4-n}{2}\rho^n\left(1 - \rho^2\right)\right] g(\rho,\xi)\Big|_{\rho=0}^{\rho=1} -$$

$$-\int\limits_0^1 \left[4\rho^3 - n\rho^{n-1} + \frac{4-n}{2} n\rho^{n-1}\left(1-\rho^2\right) - \frac{4-n}{2}\cdot 2\rho^{n+1}\right] g(\rho,\xi)\, d\rho =$$

$$= -4\int\limits_0^1 \rho^{4-n} g(\rho,\xi)\,\rho^{n-1} d\rho + n\int\limits_0^1 g(\rho,\xi)\,\rho^{n-1} d\rho -$$

$$-\frac{4-n}{2}\cdot n\int\limits_0^1 \left(1-\rho^2\right) g(\rho,\xi)\,\rho^{n-1} d\rho + \frac{(4-n)\cdot 2}{2}\int\limits_0^1 \rho^2 g(\rho,\xi)\,\rho^{n-1} d\rho$$

Отсюда для I_1^n, получаем

$$I_1^n = -4\int\limits_\Omega |y|^{4-n} g(y)\, dy + n\int\limits_\Omega g(y)\, dy - \frac{(4-n)\, n}{2}\int\limits_\Omega \left(1-|y|^2\right) g(y)\, dy +$$

$$+\frac{(4-n)\, 2}{2}\int\limits_\Omega |y|^2 g(y)\, dy$$

Значит,

$$I_1^n + I_2^n = (n-4)\int\limits_\Omega g(y)\, dy + \frac{(4-n)\, 4 - (4-n)\, n}{2}\int\limits_\Omega \left(1-|y|^2\right) g(y)\, dy +$$

$$+\frac{(4-n)\, 2}{2}\int\limits_\Omega |y|^2 g(y)\, dy = \frac{(4-n)(2-n)}{2}\int\limits_\Omega \left(1-|y|^2\right) g(y)\, dy$$

Тогда

$$\frac{1}{\omega_4}\int\limits_{\partial\Omega} \left[\varphi_1(y) - \frac{1}{2}\varphi_2(y)\right] dS_y = -\frac{1}{16\omega_4}\int\limits_\Omega \left(1-|y|^2\right) g(y)\, dy$$

или

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left[2\varphi_1(y) - \varphi_2(y)\right] dS_y = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left(1-|y|^2\right) g(y)\, dy$$

т.е. получаем равенство (16).

Следствие 2. Если в задаче (10)-(11) функция $g_1(x)$ имеет вид $g_1(x) = \left(r\dfrac{\partial}{\partial r} + 4\right)^m \cdot$ $\cdot g(x)$, $m = 2, 3\ldots$, то условие (13) можно переписать в виде

1) $\int\limits_{\partial\Omega} [2\varphi_1(y) - \varphi_2(y)]\, dS_y = \frac{1}{2}\int\limits_\Omega |y|\, \Gamma_0^{m-1}[g](y)\, dy$ если $n = 2$;

2) $\int\limits_{\partial\Omega} [2\varphi_1(y) - \varphi_2(y)]\, dS_y = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \Gamma_0^{m-1}[g](y)\, dy$ если $n = 4$;

3) $\int\limits_{\partial\Omega} [2\varphi_1(y) - \varphi_2(y)]\, dS_y = -\frac{1}{2}\int\limits_\Omega \left(1-|y|^2\right) \Gamma_0^{m-1}[g](y)\, dy$ для остальных значений n.

Теперь приведем основные утверждения.

Теорема 1. Пусть $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g(x)$ достаточно гладкие функции. Тогда для разрешимости задачи 1 необходимо и достаточно выполнение условий:

1) если $n = 2$, то (14)
2) если $n = 4$, то (15)
3) для значений n -нечетное или n -четное и $n > 4$ выполнения условия (16).

Если решение задачи 1 существует, то оно единственно с точностью до постоянного значения и представляется в виде

$$u(x) = C + \Gamma_0^{-1}[v](x), \tag{17}$$

где $v(x)$ - решение задачи Дирихле (10)-(11) с функциями $g_1(x) = \Gamma_4[g](x)$, $\varphi_1(x) = f_1(x)$, $\varphi_2(x) = f_2(x)$, C - постоянное.

Доказательство. Предположим, что решение задачи 1 существует и пусть это $u(x)$. Применим к функции $u(x)$ оператор Γ_0 и обозначим $v(x) = \Gamma_0[u](x)$. Применим к функции $v(x)$ оператор Δ^2. В силу утверждения следствия 1.

$$\Delta^2 v(x) = \Delta^2 \Gamma_0[u](x) = \Gamma_4\left[\Delta^2 u\right](x) = \Gamma_4[g](x).$$

Кроме того выполняются условия

$$v(x)|_{\partial\Omega} = \Gamma_0[u]|_{\partial\Omega} = f_1(x),$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}(x)\right|_{\partial\Omega} = \left. r\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{\partial\Omega} = \left. r\frac{\partial}{\partial r}\left[\Gamma_0[u]\right](x)\right|_{\partial\Omega} = \left.\Gamma_0^2[u](x)\right|_{\partial\Omega} = f_2(x)$$

Следовательно, $v(x)$ является решением задачи (10)-(11) с функциями $g_1(x) = \Gamma_4[g](x)$, $f_1(x) = \varphi_1(x)$, $f_2(x) = \varphi_2(x)$. Так как $\left. r\frac{\partial u}{\partial r}(x)\right|_{x=0} = 0$, то дополнительно выполняется условие $v(0) = 0$.

Итак если $u(x)-$ решение задачи 1, то функция $v(x) = \Gamma_0[u](x)$ будет решением задачи (10)-(11) с дополнительным условием $v(0) = 0$. Причем по лемме 6 выполнение условие $v(0) = 0$ влечет выполнений условий (14) (или (15) или (16)). Необходимость доказана.

Докажем, что условие (14) (или (15) или (16)) является и достаточным для существования решения задачи 1.

Если $f_1(x)$, $f_2(x)$, $g(x)$ - достаточно гладкие функции и выполняется условие (14), то решение задачи (10)-(11) существует, единственно и выполняется условие $v(0) = 0$. При выполнении этого условия к функции $v(x)$ можно применит оператор Γ_0^{-1} и следовательно можно рассмотреть функцию $u(x) = \Gamma_0^{-1}[v](x) + C$. Применим к функции $u(x)$ оператор Δ^2. Тогда

$$\Delta^2 u(x) = \Delta^2\Gamma_0^{-1}[v](x) = \Gamma_4^{-1}\left[\Delta^2 v\right](x) = \Gamma_4^{-1}\left[\Gamma_4[g]\right](x) = g(x),$$

Причем, $\Gamma_0[u](x) = \Gamma_0\left[\Gamma_0^{-1}[v]\right](x) + \Gamma_0[C] = v(x)$ и $\Gamma_0^2[u](x) = \Gamma_0[v](x)$. Поэтому $\Gamma_0[u](x)|_{\partial\Omega} = f_1(x)$, $\Gamma_0^2[u](x)|_{\partial\Omega} = f_2(x)$.

Таким образом, функция $u(x) = \Gamma_0^{-1}[v](x) + C$ удовлетворяет всем условиям задачи 1. Теорема доказана.

Рассмотрим следующую задачу Неймана:

$$\Delta^2 u(x) = g(x), \quad x \in \Omega \tag{18}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\left(x\right)=h_{1}\left(x\right),\quad x\in\partial\Omega \tag{19}$$

$$\frac{\partial^{2}u}{\partial r^{2}}=h_{2}\left(x\right),\quad x\in\partial\Omega \tag{20}$$

Следствие 1. Пусть $g\left(x\right),h_{1}\left(x\right),h_{2}\left(x\right)$ достаточно гладкие функции. Тогда для разрешимости задачи (18)-(20) необходимо и достаточно выполнений условий:

1) при $n=2$

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left[h_{1}\left(x\right)-h_{2}\left(x\right)\right]dS_{y}=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left|y\right|g\left(y\right)dy$$

2) при $n=4$

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left[h_{1}\left(x\right)-h_{2}\left(x\right)\right]dS_{y}=-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}g\left(y\right)dy$$

3) для остальных значений n

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left[h_{1}\left(x\right)-h_{2}\left(x\right)\right]dS_{x}=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\left|y\right|^{2}-1\right)g\left(y\right)dy$$

Доказательство. Доказательство приведем для случая $n\neq 2,4$. Так как выполняются равенства $\left.\frac{\partial u}{\partial r}\left(x\right)\right|_{\partial\Omega}=\left.\Gamma_{0}\left[u\right]\left(x\right)\right|_{\partial\Omega}$ и $\left.\frac{\partial^{2}u}{\partial r^{2}}\left(x\right)\right|_{\partial\Omega}=\left.r^{2}\frac{\partial^{2}u}{\partial r^{2}}\left(x\right)\right|_{\partial\Omega}=[\Gamma_{0}^{2}[u](x)-$ $-\ \Gamma_{0}[u](x)]|_{\partial\Omega}$, то решение задачи (18)-(20) будет решением задачи 1 с граничными функциями

$$f_{1}\left(x\right)=h_{1}\left(x\right),f_{2}\left(x\right)=h_{1}\left(x\right)+h_{2}\left(x\right).$$

Тогда условие разрешимости задачи 1 будет имеет вид

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left[2f_{1}\left(x\right)-f_{2}\left(x\right)\right]dS_{x}=\int\limits_{\partial\Omega}\left[2h_{1}\left(x\right)-h_{1}\left(x\right)-h_{2}\left(x\right)\right]dS_{x}=$$

$$=\int\limits_{\partial\Omega}\left[h_{1}\left(x\right)-h_{2}\left(x\right)\right]dS_{x}=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\left|y\right|^{2}-1\right)g\left(y\right)dy$$

Следствие доказано.

Замечание 2.Отметим, что условие разрешимости задачи (18)-(20) найденный в работе [5] имеет вид

$$\int\limits_{\partial\Omega}\left[h_{1}\left(x\right)-h_{2}\left(x\right)\right]dS_{x}=$$

$$=d(n-4)\int\limits_{\partial\Omega}\int\limits_{\Omega}\left[(2-n)|x-y|^{-n}\left(1-(x,y)\right)^{2}+|x-y|^{2-n}(x,y)\right]g\left(y\right)dy,$$

где $d=\dfrac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-2\right)}{\omega_{n}}$.

Замечание 3. Заметим, что условие разрешимости задачи Неймана для уравнения Пуассона $\Delta u(x) = g(x), x \in \Omega, \frac{\partial u(x)}{\partial r} = f(x), x \in \partial\Omega$ имеет вид

$$\int\limits_{\partial\Omega} f(x) dS_x = \int\limits_{\Omega} g\left(y\right) dy$$

и следовательно не зависит от размерности области.

Список литературы

[1] *Баврин И.И.* Операторы для гармонических функций и их приложения. // Дифференциальные уравнения. 1985. т.21. №1. - С. 9-15.

[2] *Бицадзе А.В.* О полигармонических функциях.//Доклады АН СССР. 1987. т.294. №3. - С. 521-525.

[3] *Карачик В.В.* Об одной задаче для полигармонического уравнения в шаре.// Сиб. мат. журнал. 1991. т.32. №5. - С. 51-58.

[4] *Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д.* Представление и свойства функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений. // Математический журнал. Алматы. 2008. т.д. N1(27). - С. 50-58.

[5] *Кангужин Б.Е., Кошанов Б.Д.* Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре. // Уфимский математический журнал. Том 2. N2 (2010). - С. 41-52.

[6] *Кальменов Т.Ш.,Кошанов Б.Д.* О представлении функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения. // Сибирский математический журнал. 2008. т.49. №3. - С. 534-539.

B.Kh. Turmetov, A.E. Bekayeva About operator method of solution of some boundary value problems for inhomogeneous biharmonic equation The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №4(71), 62 – 71

This article deals with the questions of solvability of some boundary value problems for an inhomogeneous biharmonic equation.

Б.Х. Турметов, А.Е. Бекаева Біртекті емес бигармониялық теңдеу үшін кейбір шеттік есептерді шешудің операторлық әдісі туралы , ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №4(71), 62 – 71

Бұл жұмыста біртекті емес бигармониялық теңдеу үшін кейбір шеттік есептердің шешімділігі мәселесі қарастырылады.