

Влияние закрепленного конца стержня и характера нагружения на распространения упругопластических волн нагружения и разгрузки

Ш. МАМАЕВ

Таразский государственный университет им. М.Х. Дулати

e-mail: sch_mamaev@mail.ru

Аннотация

В данной работе численно исследуется влияние характера динамического нагружения на формирование пластической зоны и волны разгрузки в стержне конечной длины. Показано, сснижением скорости нарастания и продолжительности действия внешней нагрузки при постоянной скорости её снижения увеличивается область пластической зоны, при высоких скоростях нарастания внешней нагрузки пластическая зона может формироваться у закрепленного конца. С возрастанием скорости снижения нагрузки изменяется характер распространения волны разгрузки.

Нахождение решения задачи о распространении упругопластических волн нагружения и разгрузки прямым методом связано, за исключением некоторых частных случаев закона нагружения и вида диаграммы $\sigma \sim \varepsilon$, основано на применении конечно-разностных методов. Решение этой задачи в некоторых частных случаях нагружения аналитическим методом характеристик и графоаналитическим методом Шапиро-Бидермана дано в [1]. Дальнейшее развитие этих методов выполнено в [2]. В [3] численно методом распада-разрыва решены задачи о распространении упругопластических волн в полубесконечном стержне, численно построена волна разгрузки, получены численные результаты задачи о соудврении конечного стержня о жесткую преграду, выявлено влияние вязкости на распространение волн напряжений. В [4] для задачи о динамическом деформировании полубесконечного упругопластического стержня предлагается два метода решения о волне разгрузки, в каждом из которых искомое уравнение аппроксимируется алгебраическим многочленом и решается неклассическая дифференциальная задача с граничными условиями В [6] на основе предложенных определяющих соотношений [5] для тел, чувствительных к скоростям деформирования, исследовано влияние скорости деформирования на распространение упруговязкопластических волн в полубесконечных стержнях.

Основные уравнения. Распространение плоских продольных волн в тонких стержнях описывается системой уравнений в частных производных относительно осевого напряжения $\sigma(x, t)$, скорости частиц $\nu(x, t)$ и осевой деформации $\varepsilon(x, t)$:

$$\begin{cases} \rho \frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, & \frac{\partial \nu}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} = F(\sigma, \xi, \chi) \end{cases} \quad (1)$$

Здесь E – модуль упругости, ρ – плотность материала, ξ – скорость деформации, χ – накопленная пластическая деформация, а правая часть последнего уравнения при отсутствии эффекта вязкости в случае упругопластических деформации преобразуется в известное соотношение пластического течения [5]

$$F(\sigma, \xi, \chi) = \begin{cases} 0, & \text{при } \sigma \leq \sigma_s(\xi, \chi), \\ \left(\frac{1}{E_k} - \frac{1}{E} \right) \frac{\partial \sigma}{\partial t}, & \text{при } \sigma > \sigma_s(\xi, \chi), \end{cases} \quad (2)$$

где $E_k = \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ – касательный модуль к кривой деформирования ($\sigma \sim \varepsilon$).

Введем безразмерные переменные

$$\bar{x} = \frac{x}{l}, \bar{t} = \frac{tc}{l}, \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_s^c}, \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_s^c}, \bar{\nu} = \frac{\nu}{c\varepsilon_s^c}, \quad (3)$$

где $c = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{0.5}$ – скорость упругой волны, $\sigma_s^c, \varepsilon_s^c$ – напряжение и деформация, соответствующие пределу упругости статической кривой деформирования, l – характерная длина.

Система уравнений (1) относительно безразмерных величин представляется в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \nu}{\partial t} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \frac{\partial \nu}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial \sigma}{\partial t} = F(\sigma, \xi, \chi) \end{cases} \quad (4)$$

Система уравнений (4) является системой квазилинейных гиперболических уравнений. Она имеет три семейства действительных характеристик в плоскости $x \sim t$, вдоль которых выполняются следующие дифференциальные соотношения

$$dx = \pm dt, d\sigma \mp d\nu = -Fdt, \quad (5)$$

$$dx = 0, d\varepsilon - d\sigma = Fdt. \quad (6)$$

Таким образом, интегрирование системы уравнений (4), можно заменить интегрированием уравнений (5), (6) вдоль соответствующих характеристических линий. Решение системы (4) реализовано сеточно-характеристическим методом, описанным в [6] и [7].

Постановка задачи. Исследуется распространение плоских продольных упруго-пластических волн в стержне конечной длины l . На конце $x = 0$ действует нестационарная нагрузка

$$\sigma(0, t) = f(t) \text{ при } x = 0, \quad (7)$$

а другой конец стержня $x = l$ жестко закреплен, т.е.

$$\nu(l, t) = 0 \text{ при } x = l \quad (8)$$

Стержень в начальный момент времени находится в состоянии покоя:

$$\sigma(x, 0) = \nu(x, 0) = \varepsilon(x, 0) = 0 \text{ при } t = 0 \text{ и } 0 \leq x \leq l. \quad (9)$$

При $t > 0$ от начального сечения $x = 0$ начинает распространяться возмущение со скоростью упругих волн. Перед фронтом волны точки стержня находятся в состоянии покоя, т.е.

$$\sigma(x, t) = \nu(x, t) = \varepsilon(x, t = 0) \text{ при } x \geq t. \quad (10)$$

Внешняя динамическая нагрузка $f(t)$ в начале до момента времени t_0 линейно возрастает, а затем так же линейно убывает до нуля, т.е.

$$f(t) = \begin{cases} At & \text{при } t \leq t_0, \\ At_0 - B(t - t_0) & \text{при } t_0 < t \leq t_1, \\ 0 & \text{при } t > t_1. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь A, B – постоянные, характеризующие скорости возрастания и убывания внешней нагрузки, t_0 – время соответствующая максимуму внешней нагрузки, t_1 – общее время действия внешней нагрузки.

Задача решалась при следующих данных: $h = \tau = 0.015$, $l = 100h$, $A = 3$, $B = 2$, $t_0 = 20\tau = 0.3$, $t_1 = 50\tau = 0.75$. Здесь h, τ – шаг по координате и по времени, l – длина стержня. $\sigma_s = \varepsilon_s = 1$ – пределы упругости по напряжению и деформации. $f(t_0) = 0.9$ – максимальное значение внешней нагрузки. Максимальное значение нагрузки выбрано так, чтобы только при отражении от закрепленного конца могла формироваться область пластических деформаций. Нелинейное поведение материала стержня задано экспериментальной кривой деформирования, заданной в табличной форме (см. табл.1). Модуль упругости материала $E = 200 \text{ ГПа}$, плотность $\rho = 7.9511 \cdot 10^{-10} \text{ кгсек}^2 / \text{мм}^4$.

Таблица 1. Экспериментальная зависимость напряжения-деформация.

$\varepsilon_i \cdot 10^4$	$\frac{\sigma_i}{9.8} \text{ МПа}$	$\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\rho c_1^2} \cdot 10^4$	$\varepsilon_i \cdot 10^4$	$\frac{\sigma_i}{9.8} \text{ МПа}$	$\sigma_i = \frac{\sigma_i}{\rho c_2^2} \cdot 10^4$
0	0	0	19	26.5	9.8429
4	8.00	2.9714	20	27.0	10.0286
6	12.00	4.4572	21	27.5	10.2143
8	16.00	5.9429	22	28.0	10.4000
10	20.00	7.4286	24	28.4	10.5486
11	20.75	7.7072	26	28.8	10.6972
12	21.50	8.2643	28	29.2	10.8458
13	22.25	8.2643	30	29.6	10.9943
14	23.00	8.5429	32	30.0	11.1429
15	23.75	8.8215	46	32.0	11.8858
16	24.50	9.1000	72	34.0	12.6286
17	25.25	9.3786	133	36.0	13.3715
18	26.00	9.6572	3600	74.0	27.4858

Анализ численных результатов. На рис.1 приведены изменения скорости частиц ν (кривые $1+3k$; $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$), напряжений $\sigma(2+3k)$, деформаций $\varepsilon(3+3k)$ по длине стержня в отдельные фиксированные моменты времени $t = const : t = 110\tau$ ($k = 0$), $t = 115\tau$ ($k = 1$), $t = 125\tau$ ($k = 2$), $t = 135\tau$ ($k = 3$), $t = 150\tau$ ($k = 4$), $t = 200\tau$ ($k = 5$).

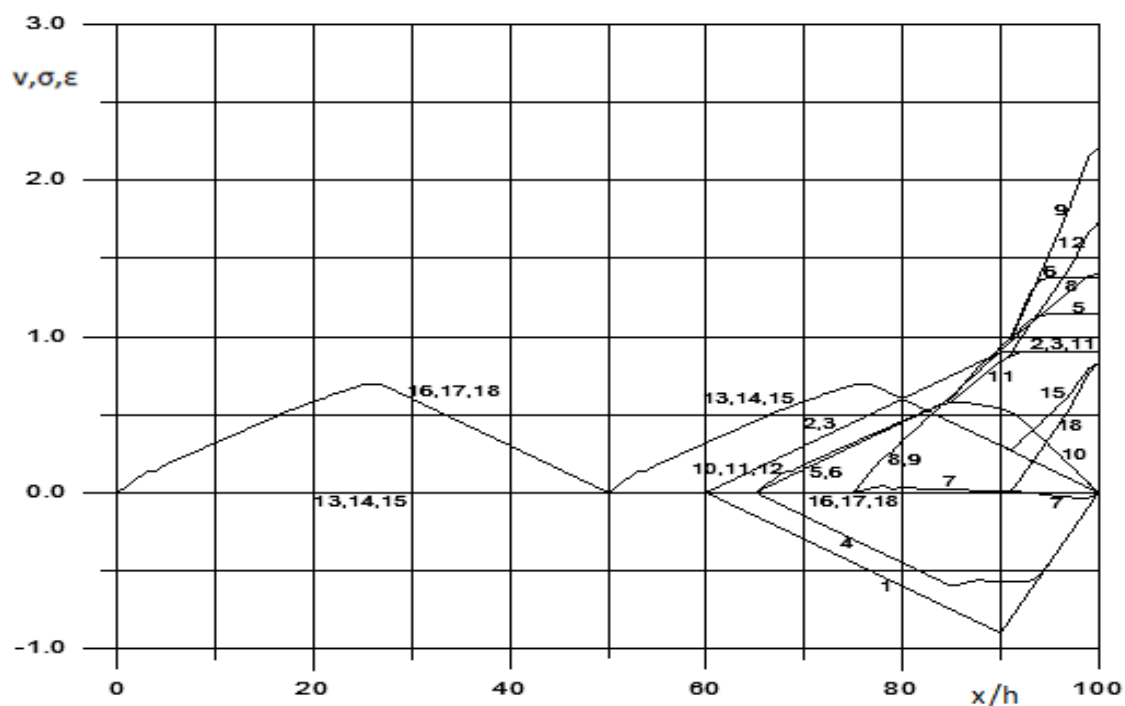


Рис.1. Распределение v, σ, ϵ по x в фиксированные моменты времени $t = \text{const}$: 1- v , 2- σ , 3- ϵ - $t=110\tau$, 4- v , 5- σ , 6- ϵ - $t=115\tau$, 7- v , 8- σ , 9- ϵ - $t=125\tau$, 10- v , 11- σ , 12- ϵ - $t=135\tau$, 13- v , 14- σ , 15- ϵ - $t=150\tau$, 16- v , 17- σ , 18- ϵ - $t=200\tau$

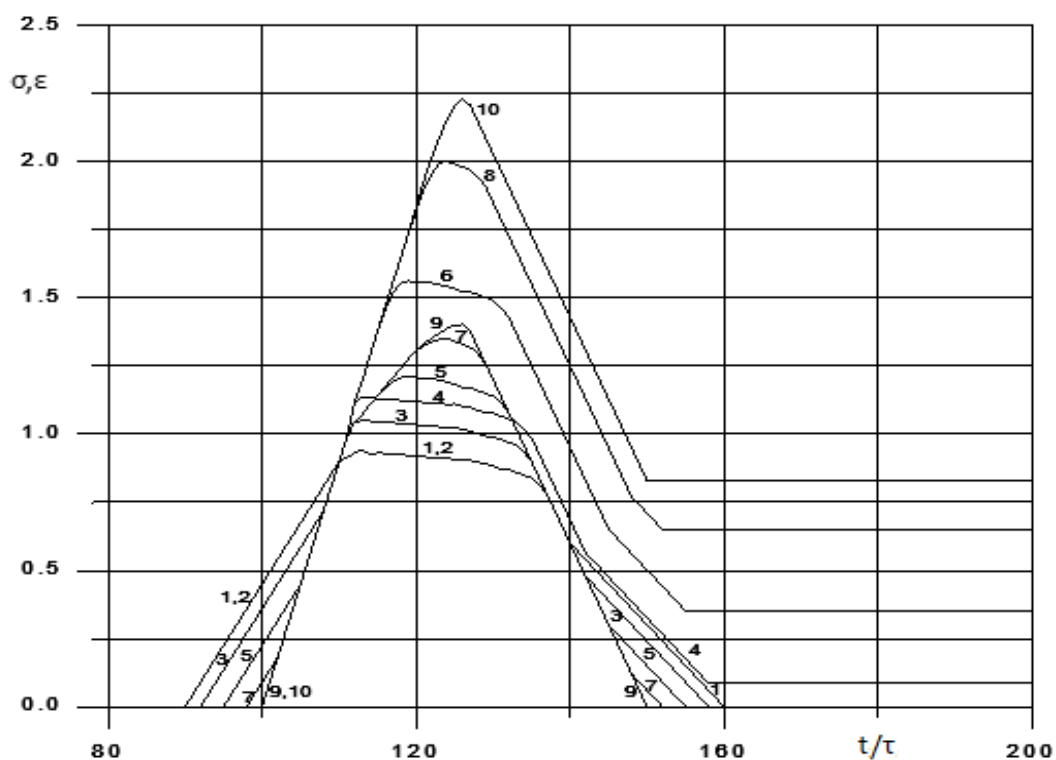


Рис.2. Осциллограммы σ, ϵ для точек стержня конечной длины 1- σ , 2- ϵ при $x=90h$, 3- σ , 4- ϵ при $x=92h$, 5- σ , 6- ϵ при $x=95h$, 7- σ , 8- ϵ при $x=98h$, 9- σ , 10- ϵ при $x=100h$.

Из кривых $1 + 3k$ видно, что скорость частиц ν в момент времени $t = 100\tau$ достигает жестко-закрепленного конца стержня и затем, отразившись от него и поменяв знак, движется в обратном направлении.

Из кривых $2 + 3k$, и $3 + 3k$ видно, что в момент времени $t = 110\tau$ ($k = 0$) весь стержень находится в упругом состоянии. Уровни напряжений и деформаций в области, примыкающей к жестко закрепленному концу, становятся постоянными. Это обусловлено интерференцией (наложением) падающей и отраженной от закрепленного конца волны. Из кривых $2 + 3k$ и $3 + 3k$ при $k = 1, 2$ и 3 видно, что после отражения волны от жестко закрепленного конца участок стержня $91h \leq x \leq 100h$, примыкающий к жестко закрепленному концу, находится в пластическом состоянии ($\sigma > 1$, $\varepsilon > 1$). Остальная часть стержня $0 \leq x \leq 91h$ находится в упругом состоянии. Из кривых $2 + 3k$ и $3 + 3k$ при $k = 3, 4$ и 5 видно, что при в эти моменты времени ($t \geq 135\tau$) уровни напряжений и деформаций снижаются и реализуется процесс разгрузки.

На рис.2 приведены зависимости от времени t (осциллограммы) напряжений σ (кривые $2k - 1$; $k = 1, 2, 3, 4, 5$), и деформаций ε (кривые $2k$; $k = 1, 2, 3, 4, 5$), в различных точках стержня: $x = 90h$ ($k = 1$), $x = 92h$ ($k = 2$), $x = 95h$ ($k = 3$), $x = 98h$ ($k = 4$), $x = 100h$ ($k = 5$). Из осциллограмм 1,2 видно, что точка $x = 90h$ все время находится в упругом состоянии. Другие точки, расположенные правее точки $x = 90h$, выходят за предел упругости, т.е. значения напряжений и деформаций в них превышают 1. Таким образом, часть стержня $x > 90h$, примыкающая к жестко закрепленному концу, деформируется пластически. Из кривых $k \geq 2$ видно, что в точках $x > 90h$ пластическое состояние наступает одновременно. Это обстоятельство обусловлено тем, что после отражения волны от жестко закрепленного конца распределение напряжения в этой области в течение некоторого промежутка времени будет равномерным. Кривая 2 на рис.1 также подтверждает эту закономерность. Из кривых $k \geq 2$ также видно, что уровни напряжений и остаточных деформаций повышаются с приближением точек (при возрастающем k) стержня к его жестко закрепленному концу.

Для выяснения зависимости протяженности пластической зоны в окрестности жестко закрепленного конца стержня и особенностей формирования и распространения волны разгрузки от характера приближенной нагрузки и отражения от жестко закрепленного конца были исследованы следующие восемь вариантов нагружения

$$\begin{aligned}
 I. A = 3, B = 3, t_0 = 20\tau, t_1 = 40\tau; & \quad II. A = 3, B = 2, t_0 = 20\tau, t_1 = 50\tau; \\
 III. A = 3, B = 1.5, t_0 = 20\tau, t_1 = 60\tau; & \quad IV. A = 3, B = 1, t_0 = 20\tau, t_1 = 80\tau; \\
 V. A = 3, B = 0.75, t_0 = 20\tau, t_1 = 100\tau; & \quad VI. A = 2, B = 3, t_0 = 30\tau, t_1 = 50\tau; \\
 VII. A = 1.5, B = 3, t_0 = 40\tau, t_1 = 60\tau; & \quad VIII. A = 1, B = 3, t_0 = 60\tau, t_1 = 80\tau;
 \end{aligned}$$

В рассматриваемых вариантах максимальные значения внешней нагрузки $f(t_0) = 0.9$ оставались постоянными, а скорости возрастания и убывания внешней нагрузки изменялись, соответственно менялось время действия внешней нагрузки. Варианты *I, II, III, IV, V* отличаются скоростью снижения нагрузки (меняется параметр B). В вариантах *I, VI, VII, VIII* меняется скорость нарастания нагрузки (меняется параметр A) при постоянном параметре B .

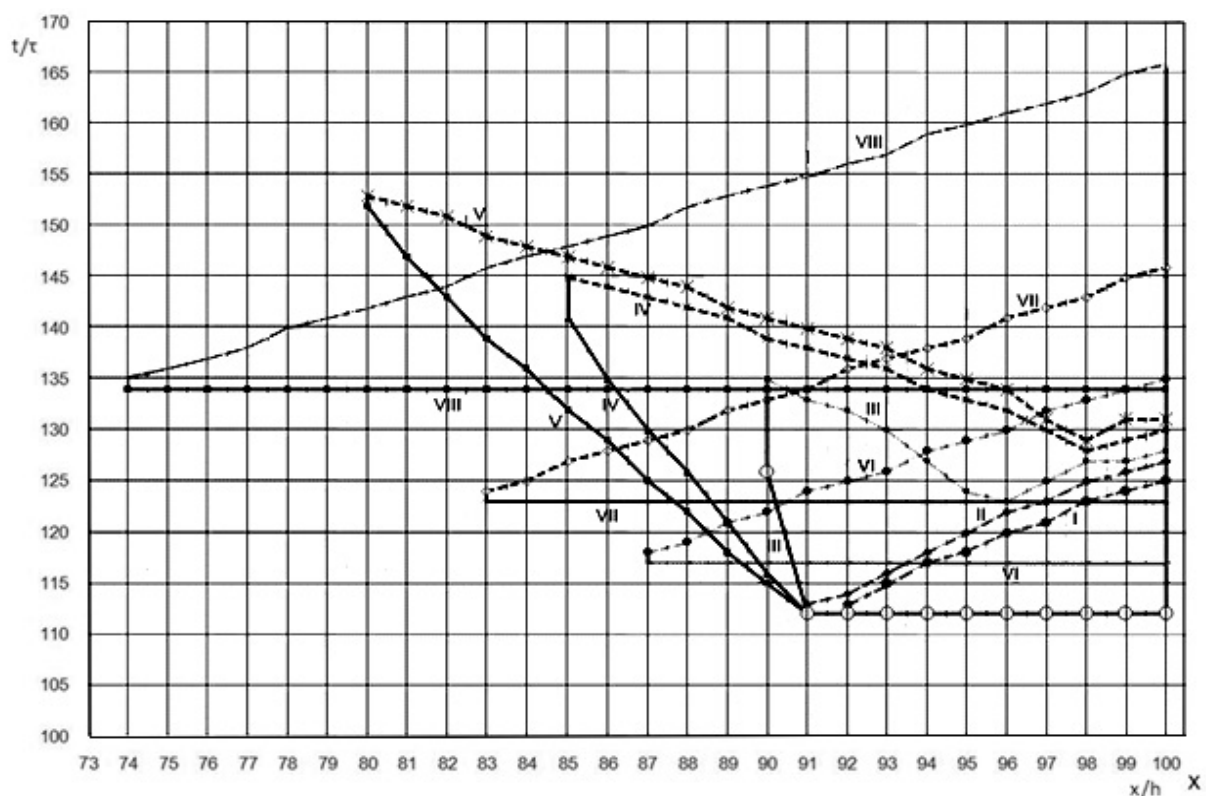


Рис.3. Волновая картина движения

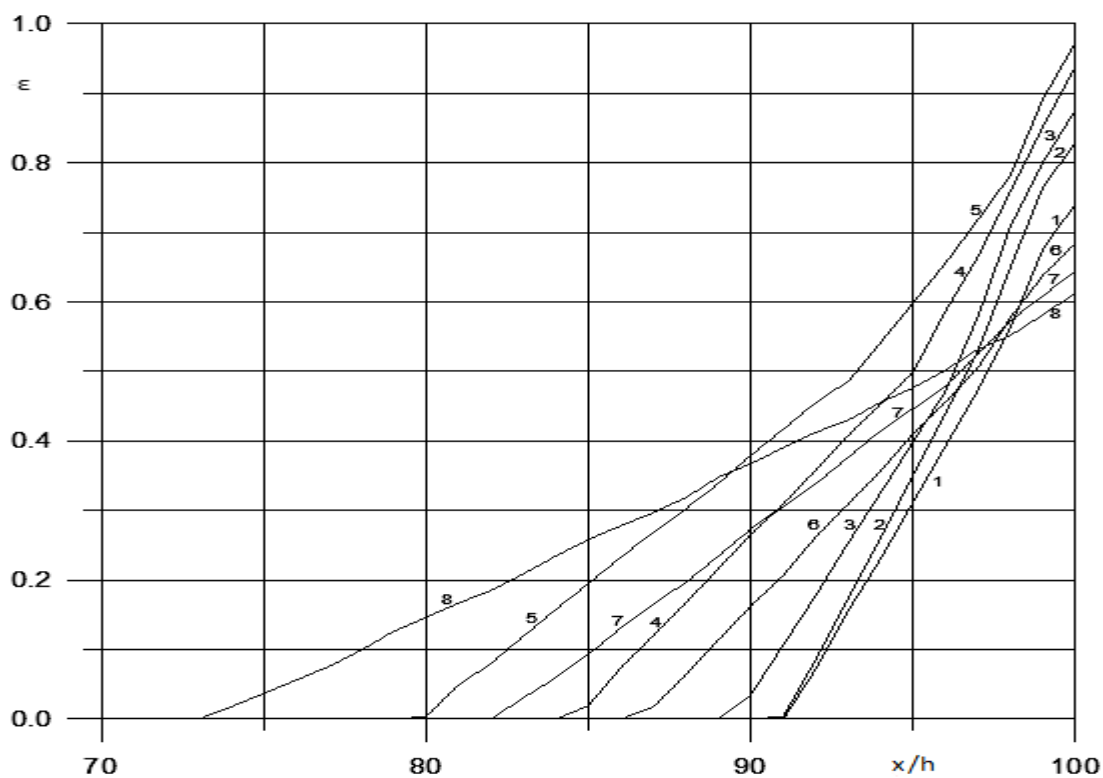


Рис.4. Распределение остаточных деформации вдоль стержня при различных вариантах нагружения: 1- $t_0=20\tau$, $t_1=40\tau$, 2- $t_0=20\tau$, $t_1=50\tau$, 3- $t_0=20\tau$, $t_1=60\tau$, 4- $t_0=20\tau$, $t_1=80\tau$, 5- $t_0=20\tau$, $t_1=100\tau$, 6- $t_0=30\tau$, $t_1=50\tau$, 7- $t_0=40\tau$, $t_1=60\tau$, 8- $t_0=60\tau$, $t_1=80\tau$.

На рис. 3 представлены волновые картины движения в координатах x, t для указанных вариантов. Сплошные линии соответствуют передним фронтам пластических волн. Штриховыми линиями обозначен фронт волны разгрузки. Область, заключенная между сплошной и штриховой линией (она обозначена одинаковыми номерами), является областью пластических деформаций.

Из сравнения волновой картины движения для вариантов $I, VI, VII, VIII$ видно, что при уменьшении скорости возрастания внешней нагрузки и постоянной скорости ее убывания протяженность пластической области увеличивается (область пластических деформации расширяется) и соответственно время пребывания этих точек в сформированной пластической области также увеличивается. Таким образом, при ударных нагрузках, меньших предела упругости (в нашем случае 0.9), формирование зоны пластических деформаций в окрестности закрепленного конца зависит от скорости нарастания нагрузки.

Из кривых I, II и III, IV, V , соответствующих передним фронтам пластических волн (сплошные линии), видно, что в точках, лежащих в области $91h \leq x \leq 100h$, зона пластических деформаций формируется одновременно в момент времени $t = 112\tau$. Из кривых III, IV, V можно заметить, что в области $80h \leq x \leq 90h$ зона пластических деформаций формируется несколько позже. Выше отмеченные особенности происходят из-за интерференции падающей и отраженной от жестко закрепленного конца волны, когда уровень напряжений возрастая превышает предел упругости и точки, расположенные в этой области, постепенно справа налево входят в зону пластичности.

На рис.3 показана картина волны разгрузки для указанных вариантов нагружения. Из кривых волны разгрузки $I, II, VI, VII, VIII$ (штриховые линии) видно, что волна разгрузки начинается из начальной точки пластической области и последовательно разгружая точки находящиеся в пластическом состоянии со временем доходит до жестко закрепленного конца и, тем самым, стержень полностью разгрузиться. С приближением точек к жестко закрепленному концу время пребывания в пластическом состоянии увеличивается. Разгрузка происходит из-за интерференции падающей и отраженной от жесткого закрепленного конца волны, когда уровень напряжений в этой точке начинает снижаться. Из кривых волны разгрузки III, IV, V видно некоторые особенности волны разгрузки, разгрузка начинается с внутренних точек пластической области и передвигается со временем в обе стороны. Если скорость разгрузки велика, то разгрузка идет из передней точки фронта пластической волны и приближается к закрепленному концу. Если скорости разгрузки малы, то начало разгрузки имеет место в окрестности закрепленного конца и фронт волны разгрузки расходится в две стороны: в сторону закрепленного конца и вдогонку за передним фронтом пластической волны. Так как скорость волны разгрузки превышает скорость распространения пластической волны, то она через некоторое время нагоняет передний фронт пластической волны. Можно выбрать такую скорость убывания и времени действия внешней нагрузки, что разгрузка может начинаться с закрепленного конца.

На рис. 4 приведены кривые распределения остаточных деформаций вдоль стержня для рассмотренных выше вариантов: $I - VIII$. Из кривых I, II, III, IV, V видно, что при постоянной скорости нагружения и снижении скорости убывания внешней нагрузки область пластических деформаций расширяется, уровень остаточных деформации увеличивается. Из кривых $I, VI, VII, VIII$ видно, что при уменьшении скорости на-

гружения и при постоянной скорости убывания внешней нагрузки уровни остаточных деформации увеличиваются.

Рассматривался ещё один вариант нагружения:

$$f(t) = \begin{cases} At & \text{при } t \leq t_0, \\ At_0 & \text{при } t_0 < t \leq t_1, \\ At_0 - B(t - t_1) & \text{при } t_1 < t \leq t_2, \\ 0 & \text{при } t > t_2. \end{cases}$$

Максимальная внешняя нагрузка, по-прежнему, равна 0.9. Внешняя нагрузка до момента времени $t = t_0 = 20\tau$ линейно возрастает, а затем до момента времени $t = t_1 = 30\tau$ сохраняет постоянное значение $f(t_0) = 0.9$ и, наконец, линейно снижается до нуля в момент времени $t = t_2 = 50\tau$. Сравнивая результаты расчетов с результатами варианта II, можно видеть, что в данном случае максимальные значения напряжений и остаточных деформаций в рассматриваемых точках превышают их значения, полученные в варианте II. Сравнивая соответствующие результаты можно увидеть область постоянных значений напряжений и деформаций в рассматриваемом варианте увеличивается. Таким образом продолжительность действия максимальной нагрузки приводит к повышению уровня и области формирования пластических деформаций в окрестности закрепленного конца.

Заключение. Исследовано влияние характера нагружения на формирование пластической зоны у жестко закрепленного конца стержня.

Показано

– со снижением скорости нарастания и продолжительности действия внешней нагрузки при постоянной скорости её снижения увеличивается область пластической зоны, при высоких скоростях нарастания внешней нагрузки пластическая зона может формироваться у закрепленного конца,

– с возрастанием скорости снижения нагрузки изменяется характер распространения волны разгрузки.

Список литературы

- [1] Рахматуллин Х.А., Демьянов Ю.А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. - М.:, 1961. - 400 с.
- [2] Рахматуллин Х.А., Жубаев Н., Ормонбеков Т. Распространение волн деформаций. - Фрунзе: "Илим 1985. - 148 с.
- [3] Жубаев Н.Ж., Кальц А.Л., Карымсаков К.У. Численные методы исследования двухмерных волн напряжений. - Алма-Ата: Издательство "Наука 1988. - 215 с.
- [4] Тарабрин Г.Т., Кострюков Г.Е. Два метода построения волны Рахматуллина. // Известия вузов. Строительство., 2003, №8, с. 25 - 32.
- [5] Каримбаев Т.Д., Мамаев Ш. Теория течения при переменных скоростях деформаций. // -Алма-Ата:, с. 52 - 58.

- [6] Мамаев Ш., Каримбаев Т.Д. Влияние скорости деформирования на распространение упруговязкопластических волн в стержнях. // Механика и моделирование процессов технологий. 1994, №1, с. 84 - 90.
- [7] Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. - М.: Наука, 1988, - 288 с.

Sh. Mamayev, *Influence of pinned at the end of the shaft and the nature of the load distribution on the loading unloading of Elastoplastic waves* The Bulletin of KazNU, ser. math., mech., inf. 2011, №4(71), 92 – 100

In this paper, we consider a system of equations of two-phase warm boundary layer near the surface rupture of the plate at an arbitrary rate of injection. The boundary condition relative to temperature determines the process of convective heat transfer between the surface plate and the environment (injected fluid) The method of successive approximations of the problem reduces to solving an integro-differential equations with relative to temperature. It was based on the zero order approximation formulas are constructed first approximation for the temperature field.

Ш. Мамаев, *Сырықтың қатты бекітілген ұшының және жүктеу сипатының серпімді пластикалық және жеңілдету толқындарының таралуына әсері*, ҚазҰУ хабаршысы, мат., мех., инф. сериясы 2011, №4(71), 92 – 100

Жұмыста ұзындығы шектелген сырықты динамикалық жүктеудің пластикалық облыстың пайда болуына және жеңілдету толқынына әсері сандық зерттеледі. Сыртқы жүктеменің өсуі және әсер ету уақыты кемігенде, жүктеменің кемуі тұрақты болған жағдайда, пластикалық облыс үлкейеді. Сыртқы жүктеменің өсу жылдамдығы өте жоғары болған жағдайда пластикалық облыс сырықтың қатты бекітілген ұшында пайда болады. Сыртқы жүктеменің кему жылдамдығы өскенде жеңілдету толқынының таралуы өзгереді.