Бесконечно малая термоупругая деформация тела, погруженного в риманово пространство

Н.П. Азанов
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы
e-mail: azanovnp@zmail.ru

Аннотация

В статье рассматривается бесконечно малая термоупругая деформация тела, погруженного в риманово пространство

1. Поверхности в евклидовом пространстве

Риманово пространство V_3 можно рассматривать как гладкую 3-мерную поверхность евклидова пространства E_{3+p}. Число p будем считать достаточно большим для того, чтобы погружение пространства V_n в пространство E_{3+p} принадлежало необходимому нам классу [4].

Рассмотрим в евклидовом пространстве E_{3+p} гладкую 3-мерную поверхность S, на которой реализуется метрика риманова пространства V_3. Пусть уравнения этой поверхности определены в параметрической форме

$$S: \quad x_i = x_i(u_1, u_2, u_3), \quad (i = \overline{1, 3+p}), \tag{1}$$

где x - криволинейные координаты системы отсчета X, расположенной в пространстве, окружающем S. Элемент дуги ds кривой, лежащей на S , определяется формулой

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} du^\alpha du^\beta, \quad (\alpha, \beta = \overline{1,3}), \tag{2}$$

где $g_{\alpha\beta}$ - метрика риманова пространства V_3. При этом линейный элемент E_{3+p} , будучи отнесенным к системе отсчета X, принимает вид

$$ds^2 = a_{ij} dx^i dx^j, \quad (i, j = \overline{1, 3+p}), \tag{3}$$

где a_{ij} - метрика евклидова пространства E_{3+p} .

Из параметрических уравнений поверхности (1) следует, что

$$g_{\alpha\beta} = a_{ij} x^i_\alpha x^j_\beta, \quad (i, j = \overline{1, 3+p}; \alpha, \beta = \overline{1,3}), \tag{4}$$

где $x^i_\alpha = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}$. Поскольку как a_{ij}, так и $g_{\alpha\beta}$ в (4) являются тензорами, эта формула указывает, что x^i_α можно рассматривать либо как контравариантный вектор пространства E_{3+p} , либо как ковариантный вектор 3-мерной поверхности S ([5] с.190).

Любой поверхностный вектор A^α может рассматриваться как вектор пространства E_{3+p} с компонентами A^i, определенными формулой ([3] с.139)

$$A^i = x^i_\alpha A^\alpha. \tag{5}$$

Рассмотрим кривую C, лежащую на данной 3-мерной поверхности S, и вектор A^i, определенный вдоль C. Если t- параметр C, мы можем вычислить внутреннюю производную $\frac{\delta A^i}{\delta t}$ вектора A^i, а именно

$$\frac{\delta A^i}{\delta t} = \frac{dA^i}{dt} + \hat{\Gamma}^i_{jk} A^j \frac{dx^k}{dt}. \tag{6}$$

В формуле (6) коэффициенты связности относятся к координатам x^i пространства E_{3+p} и составлены из метрики a_{ij}. Это указывается индексом $\hat{\Gamma}$ к символуΓ. С другой стороны, если мы рассматриваем поверхностный вектор A^α, определенный вдоль той же самой кривой C, мы сможем образовать внутреннюю производную по переменным поверхности, а именно

$$\frac{\delta A^\alpha}{\delta t} = \frac{dA^\alpha}{dt} + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\beta\eta} A^\beta \frac{du^\eta}{dt}.$$

В этом выражении коэффициенты связности $\tilde{\Gamma}$ сформированы для метрики $g_{\alpha\beta}$.

Рассмотрим теперь тензорное поле x^i_α. Плодотворная идея тензорного дифференцирования была введена А.П. Норденом [3] , и мы будем близко следовать найденному изящному методу исследования. Следуя Нордену, мы назовем смешанной тензорной производной от x^i_α по параметру t следующую величину

$$\frac{\delta x^i_\alpha}{\delta t} = \frac{dx^i_\alpha}{dt} + \hat{\Gamma}^i_{jk} x^j_\alpha \frac{dx^k}{dt} - \tilde{\Gamma}^\beta_{\alpha\eta} x^i_\beta \frac{du^\eta}{dt},$$

а величину

$$x^i_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} + \hat{\Gamma}^i_{jk} x^j_\alpha x^k_\beta - \tilde{\Gamma}^\eta_{\alpha\beta} x^i_\eta \tag{7}$$

назовем смешанной ковариантной производной от x^i_α по u^η . Из формулы (7) видно, что

$$x^i_{\alpha,\beta} = x^i_{\beta,\alpha}. \tag{8}$$

Поскольку смешанная ковариантная производная от $g_{\alpha\beta}$ обращается в нуль, после дифференцирования соотношений (4) имеем

$$a_{ij} x^i_{\alpha,\eta} x^j_\beta + a_{ij} x^i_\alpha x^j_{\beta,\eta} = 0. \tag{9}$$

Циклическая перестановка свободных индексов в (9) дает нам еще две формулы. Если их сложить и вычесть из суммы (9), приняв во внимание соотношение симметрии (8), то мы получим

$$a_{ij} x^i_{\alpha,\beta} x^j_\eta = 0.$$

Это - соотношение ортогональности, констатирующее, что $x^i_{\alpha,\beta}$ является вектором пространства E_{3+p}, нормальным к 3-мерной поверхности S. Следовательно, существуют функции $\underset{k}{\Omega}_{\alpha\beta}$, такие, что ([6])

$$x^i_{\alpha,\beta} = \sum_k \underset{k}{\Omega}_{\alpha\beta} \underset{k}{\xi}^i, \quad (k = \overline{4, 3+p}), \tag{10}$$

где $\underset{k}{\xi}^i$ система вещественных единичных векторов в пространстве E_{3+p} взаимно ортогональных друг к другу и нормальных к 3-мерной поверхности S.

В произвольной точке P поверхности S рассмотрим произвольную систему координат на S. Пусть три штуки векторов $\underset{\gamma}{\vec{\lambda}}$ $(\gamma = \overline{1,3})$ являются базисными единичными векторами этой системы координат. Векторы $\underset{\gamma}{\vec{\lambda}}$, рассматриваемые как векторы пространства

E_{3+p} , образуют в нем подпространство E_3. Пусть векторы $\vec{\underset{k}{\xi}}$ $(k = \overline{4, 3+p})$ являются базисными векторами подпространства E_p нормального к E_3. Система векторов

$$\left\{ \underset{\gamma}{\lambda^i}(\gamma = \overline{1,3}), \underset{k}{\xi^i}(k = \overline{4, 3+p}) \right\}, \quad (i = \overline{1, 3+p}) \tag{11}$$

образует базис пространства E_{3+p} в точке P.

2. Движение частицы по поверхности

Движение частицы массы m в римановом пространстве трех измерений V_3 будем рассматривать как движение частицы по 3-мерной поверхности S, заданной соотношениями (1), в 3+p –мерном евклидовом пространстве E_{3+p} под действием силы $\vec{F}$. Сила $\vec{F}$ - результирующая всех внешних сил, действующих на частицу, и потому включающая также реакцию $\vec{R}$ поверхности на частицу. Если поверхность гладкая, $\vec{R}$ нормальна к S и представляет собой давление, вынуждающее частицу оставаться на поверхности S.

Пространственные компоненты v^i вектора скорости частицы связаны с поверхностными компонентами v^α формулой ([5])

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}\frac{du^\alpha}{dt} = x^i_\alpha \dot{u}^\alpha$$

или

$$v^\alpha = x^i_\alpha v^\alpha, \tag{12}$$

где $v^\alpha = \dot{u}^\alpha$.

Ускорение $a^i = \frac{\delta v^i}{\partial t}$ ([5]); отсюда уравнения (12) дают

$$a^i = x^i_\alpha \frac{\delta v^\alpha}{\delta t} + \frac{\delta x^i_\alpha}{\delta t} v^\alpha$$

или

$$a^i = x^i_\alpha a^\alpha + x^i_{\alpha,\beta} v^\alpha v^\beta, \tag{13}$$

где $a^\alpha = \frac{\delta v^\alpha}{\partial t}$.

Если воспользоваться формулой (10), уравнения (13) примут вид

$$a^i = x^i_\alpha a^\alpha + \sum_k \underset{k}{\Omega_{\alpha\beta}} v^\alpha v^\beta \underset{k}{\xi^i}, \quad (k = \overline{4, 3+p}). \tag{14}$$

Поскольку $F^i = ma^i$, находим

$$F^i = m x^i_\alpha a^i + \sum_k m \underset{k}{\Omega_{\alpha\beta}} v^\alpha v^\beta \underset{k}{\xi^i}. \tag{15}$$

Первый член правой части уравнения (15) - компонента вектора силы в касательном пространстве к 3-мерной поверхности S, второй же член - компонента вектора силы в нормальном пространстве поверхности S. Умножая соотношения (15) на $a_{ij}x^j_\eta$, получим

$$a_{ij}x^j_\eta F^i = m a_{ij} x^i_\alpha x^j_\beta a^\alpha + \sum_k m \underset{k}{\Omega_{\alpha\beta}} v^\alpha v^\beta a_{ij} x^j_\eta \underset{k}{\xi^i} = m g_{\alpha\eta} a^\alpha + 0,$$

поскольку $a_{ij}x^j_\alpha x^j_\eta = g_{\alpha\eta}$ в силу (4), а $a_{ij}x^j_\eta \underset{k}{\xi^i} = 0$, так как поверхностные векторы x^j_α образуют прямой угол с каждым $\underset{k}{\xi^i}$ $(k = \overline{4, 3+p})$. Если это выражение переписать сокращенно

$$x^j_\eta F_j = ma_\eta$$

и положить $F_\eta \equiv x^j_\eta F_j$, то мы получим три штуки ньютоновых уравнений

$$F_\alpha = ma_\alpha$$

связывающих поверхностный вектор силы F_α с поверхностным вектором ускорения a_α.

3 Тензор напряжений

Движение сплошной среды в римановом пространстве трех измерений V_3 будем рассматривать как движение сплошной среды по 3-мерной поверхности S, заданной соотношениями (1) в 3+p-мерном евклидовом пространстве E_{3+p}.

Пусть имеем деформируемое тело W (W⊂S), находящееся в равновесии под действием внешних сил. Мысленно рассечем его некоторой 2-мерной поверхностью Z (Z⊂S) на две части. Отбросив одну часть, заменим ее действие на оставленную распределенными по поверхности сечения внутренними силами связзм между частицами тела, лежащими по обе стороны сечения. Теперь силы, действующие в точках поверхности сечения, могут быть отнесены к внешним поверхностным силам. Для равновесия оставшейся части эти силы должны быть выбраны так, чтобы с заданными силами, действующими на рассматриваемую часть тела, составляли уравновешенную систему сил. Обозначим через $\Delta V^i, \Delta L^i \quad (i = \overline{1, 3+p})$, соответственно, главный вектор и главный момент сил, распределенных по элементу 2-мерной поверхности $\Delta\omega$ сечения Z. В пространстве E_{3+p} это мы можем делать. Рассматривая 2-мерную поверхность Z как гиперповерхность S, можно найти единичный поверхностный вектор M^α нормальный к Z в точке P. В силу (5) ему будет соответствовать пространственный вектор

$$M^i = x^i_\alpha M^\alpha \tag{16}$$

который также является единичным и нормальным к Z. Следовательно, 2-мерная поверхность сечения Z в точке P, как точке пространства E_{3+p} имеет нормалями векторы M^i и $\underset{k}{\xi^i}$ $\left(k = \overline{4, 3+p}\right)$. Направление нормали M^i к элементу $\Delta\omega$ будем считать положительным, если она направлена от оставшейся части к отброшенной.

Полагая, что в рассмотренной нами модели сплошной среды между ее частицами осуществляется только центральное воздействие, имеем

$$\lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{\Delta L^i}{\Delta\omega} = 0, \quad \lim_{\Delta\omega\to 0}\frac{\Delta V^i}{\Delta\omega} = \underset{M}{T^i}.$$

Вектор $\underset{M}{T^i}$ называется вектором напряжения на элементе 2-мерной поверхности с нормалями M^i и $\underset{k}{\xi^i}$ $\left(k = \overline{4, 3+p}\right)$ в точке P.

Пусть вектор напряжения $\underset{M}{T^i}$ характеризует действие тела A на тело B, передающееся через элемент поверхности сечения Z, а напряжение $\underset{-M}{T^i}$ характеризует действие тела B на тело A, передающееся через тот же элемент поверхности Z.

На основании третьего закона Ньютона имеет место равенство

$$\underset{-M}{T^i} = -\underset{M}{T^i}.$$

Пусть наше тело W отнесено к адаптированной системе координат (11) в точке P. Поскольку все точки тела W можно рассматривать как точки пространства E_3, можно говорить о координатном триэдре, относящемся к данной точке пространства E_3. Рассмотрим в точке P триэдр, мысленно выделенный из недеформированного тела тремя координатными 2-мерными поверхностями, определяемыми ковариантными базисными векторами $\underset{\gamma}{\lambda_i}$ и 2-мерной поверхностью Z, нормалью к которой служит некоторое направление вектора M^i, определенного соотношениями (16), проходящее через ту же точку P. Рассматривая данный триэдр в пространстве E_{3+p}, указанные 2-мерные поверхности имеют нормалями векторы $\underset{\gamma}{\lambda_i}, \underset{k}{\xi^i} \quad \left(k = \overline{4, 3+p}\right)$ и $M^i, \underset{k}{\xi^i} \quad \left(k = \overline{4, 3+p}\right)$, соответственно. Обозначим через $\underset{\gamma}{d\omega} \quad \left(\gamma = \overline{1, 3}\right)$ и $\underset{M}{d\omega}$ соответствующие 2-мерные объемы этих поверхностей. На данных 2-мерных поверхностях действуют силы $-\underset{\gamma}{T^i}\underset{\gamma}{d\omega}$ и $\underset{M}{T^i}\underset{M}{d\omega}$, где $\underset{\gamma}{T^i}$ и $\underset{M}{T^i}$ - соответствующие векторы напряжений. Кроме того, массовая сила выделенного триэдра равна $\rho \left(F^i - a^i\right) d\tau$ (здесь ρ - плотность материала недеформированной среды, $d\tau$- объем триэдра, a^i - его ускорение).

На основании принципа отвердевания и начала Даламбера уравнения движения триэдра будут иметь вид ([2] с.32)

$$\underset{M}{T^i}\underset{M}{d\omega} - \sum_{\gamma=1}^{3} \underset{\gamma}{T^i}\underset{\gamma}{d\omega} - \rho \left(F^i - a^i\right) d\tau = 0. \tag{17}$$

Поскольку в пространстве E_3 для триэдра сумма векторов 2-мерных объемов равна нулю, то

$$M^i \underset{M}{d\omega} = \sum_{\gamma=1}^{3} \underset{\gamma}{d\omega}\underset{\gamma}{\lambda^i}. \tag{18}$$

Учитывая, что x^j_α являются компонентами базисного вектора $\underset{\alpha}{\lambda^i}$ для каждого α, $M^i = M^\alpha \underset{\alpha}{\lambda^i}$. Вместо (18) будем иметь $M^\alpha \underset{M}{d\omega} = \underset{\alpha}{d\omega}$. Подставим это в (17), тогда

$$\underset{M}{T^i} - \underset{\gamma}{T^i} M^\gamma - \rho \left(F^i - a^i\right) \frac{d\tau}{\underset{M}{d\omega}} = 0.$$

Пусть при постоянном направлении M^i расстояние от точки P до поверхности сечения Z стремится к нулю. Принимая во внимание, что $\frac{d\tau}{\underset{M}{d\omega}} \to 0$, из последнего соотношения имеем

$$\underset{M}{T^i} = \underset{\gamma}{T^i} M^\gamma.$$

Вектор напряжений $\underset{\gamma}{T^i}$ может быть представлен 3+p составляющими по отношению к векторам базиса (11), то есть

$$\underset{\gamma}{T^i} = \underset{\gamma}{T^\alpha}\underset{\gamma}{\lambda^i} + \underset{\gamma}{T^k}\underset{k}{\xi^i}.$$

Откуда

$$\underset{M}{T}^i = \underset{\gamma}{T}^\alpha M^\gamma \underset{\gamma}{\lambda}^i + \underset{\gamma}{T}^k M^\gamma \underset{k}{\xi}^i.$$

В то же время имеет место разложение

$$\underset{M}{T}^i = \underset{M}{T}^\alpha \underset{\alpha}{\lambda}^i + \underset{M}{T}^k \underset{k}{\xi}^i. \tag{19}$$

Следовательно,

$$\underset{M}{T}^\alpha = \underset{\gamma}{T}^\alpha M^\gamma.$$

Учитывая, что $\underset{M}{T}^\alpha$ поверхностные компоненты вектора напряжений, найдем

$$\underset{M}{T}^\alpha = E^{\alpha\beta} M_\beta. \tag{20}$$

Величины $E^{\alpha\beta}$ составляют контравариантные компоненты тензора второго ранга. Тензор $E^{\alpha\beta}$ будем называть контравариантным поверхностным тензором напряжений.

4 Закон Гука

Рассмотрим соотношения между напряжениями и деформацией для определенного класса сплошной среды, которую мы будем называть упругой средой.

Упругой средой называется среда, в которой компоненты тензора напряжений E_{ij} в каждой частице являются функциями компонент тензора деформации γ_{ij} , компонент метрического тензора g_{ij} , температуры T и, возможно, других параметров физико-химической природы χ_i

$$E_{ij} = f_{ij}\left(\gamma_{\alpha\beta}, g_{\alpha\beta}, T, \chi_\alpha\right).$$

Конкретный вид функций f_{ij} может быть различным для различных конкретных моделей упругих сред. Опыт показывает, что напряжения и деформации во многих средах связаны между собой так называемым законом Гука

$$E_{ij} = C_{ij}^{mn} \gamma_{mn}, \tag{21}$$

где C_{ij}^{mn} являются компонентами четырехвалентного тензора. Этот тензор является физической характеристикой данной сплошной среды и зависит, вообще говоря, от температуры T и других физико-химических параметров, характеризующих состояние рассматриваемой среды.

В связи с тем, что закон Гука получен опытным путем, не будет криминала в том, чтобы считать его верным и для трехмерного риманова пространства. В пользу этого предположения можно привести следующий довод: если закон Гука верен для тела $W \in E_3$, имеющего форму мембраны, натянутой на какую-либо поверхность в E_3 , а поверхность можно считать двумерным римановым пространством V_2 с метрикой этой поверхности, то получается, что закон Гука верен для тела $W \in V_2$.

По аналогии с классической теорией упругости, сплошную среду в V_3 будем называть однородной если

$$\nabla_k C_{ij}^{mn} = 0,$$

а если свойства этой среды одинаковы по всем направлениям - изотропной.

Для однородной изотропной среды закон Гука записывается в следующем виде

$$E_{ij} = \lambda\sigma g_{ij} + 2\mu\gamma_{ij} \tag{22}$$

где λ и μ так называемые модули упругости, постоянные для данной среды (их обычно называют коэффициентами Ламе), σ - первый инвариант тензора деформации (так называемое объемное расширение)

$$\sigma = g^{ij}\gamma_{ij}. \tag{23}$$

Будем считать, для однородной изотропной среды в V_3 закон (22) выполняется.

Из (22) и (23) для первого инварианта тензора напряжений θ получим

$$\theta = g^{ij}E_{ij} = \lambda\sigma g^{ij}g_{ij} + 2\mu g^{ij}\gamma_{ij} = (3\lambda + 2\mu)\,\sigma, \tag{24}$$

где 3 - размерность риманова пространства.

Теперь мы можем получить выражение для тензора деформации через тензор напряжений. В силу (22)

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2\mu}\left(E_{ij} - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}\theta g_{ij}\right). \tag{25}$$

Вместо коэффициентов Ламе λ и μ в теории упругости принято вводить следующие характеристики материалов: модуль Юнга E и коэффициент Пуассона κ так, чтобы

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{E}\{(1 + \kappa)\,E_{ij} - \kappa\theta g_{ij}\}. \tag{26}$$

Из (25) и (26) следует, что

$$E = \frac{\mu\,(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}; \tag{27}$$

$$\kappa = \frac{\lambda}{2\,(\lambda + \mu)}. \tag{28}$$

Эти формулы определяют модуль Юнга и коэффициент Пуассона через коэффициенты Ламе в V_3 и полностью согласуются с их аналогами в евклидовом трехмерном пространстве.

5 Бесконечно малая термоупругая деформация тела

Рассмотрим бесконечно малую деформацию

$$\bar{x}_i = x_i + u_i(x)\tau \qquad (i = 1, 2, 3)$$

тела в римановых пространстве. Здесь u_i - компоненты вектора деформации, τ- бесконечно малый параметр.

Условия совместности (интегрируемости) для тензора

$$2\gamma_{ij} = \nabla_i u_j + \nabla_j u_i \tag{29}$$

бесконечно малой деформации в произвольном римановом пространстве имеют вид (см. [1]):

$$\nabla_s \nabla_i \gamma_{jk} + \nabla_j \nabla_k \gamma_{si} - \nabla_s \nabla_k \gamma_{ji} - \nabla_j \nabla_i \gamma_{sk} - R_{sji.}^{\;\;\;\;m} \gamma_{mk} - R_{sjk.}^{\;\;\;\;m} \gamma_{im} = g_{pk} D\, R_{sji.}^{\;\;\;\;p} \qquad (30)$$

где g_{pk}- метрический тензор, $R_{sji.}^{k}$- тензор кривизны исходного риманова пространства, символ D обозначает производную Ли по направлению векторного поля u_i, символ ∇_i обозначает ковариантное дифференцирование.

Для термоупругого тела деформация γ_{ij} состоит из термической деформации $\gamma_{ij}^{(1)}$ и упругой деформации $\gamma_{ij}^{(2)}$

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{(1)} + \gamma_{ij}^{(2)}. \qquad (31)$$

При термическом расширении изотропное тело деформируется таким образом, что компоненты деформации $\gamma_{ij}^{(1)}$ определяются выражением

$$\gamma_{ij}^{(1)} = \alpha t g_{ij}, \qquad (32)$$

где t – обозначает отклонение температуры тела, когда деформация и напряжения равны нулю, α - коэффициент линейного расширения тела. Компоненты упругой деформации определяются соотношением (26). Подставляя (26) и (32) в уравнение (31), получим уравнение

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{E}\{(1+\kappa)\, E_{ij} - \kappa\theta g_{ij}\} + \alpha t g_{ij}. \qquad (33)$$

Очевидно, что на тензор γ_{ij} должны накладываться условия интегрируемости Бельтрами – Митчелла [1].

Список литературы

[1] *Азанов Н.П.*, Уравнения совместности Сен-Венана и Бельтрами-Митчелла в римановом пространстве. // Труды геометрического семинара. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1989, вып. 19. - С. 9-13.

[2] *Амензаде Ю.А.*, Теория упругости. - М.: Высшая школа, 1976. - 272 с.

[3] *Норден А.П.*, Пространства аффинной связности. - М.: Наука, 1976. - 432 с.

[4] *Поздняк Э.Г., Соколов Д.Д.*, Изометрические погружения римановых пространств в евклидовы. // Алгебра. Топология. Геометрия. Итоги науки. Т. 15. - 1977. - С. 173-211.

[5] *Сокольников И.С.*, Тензорный анализ. - М.: Наука, 1971. - 367 с.

[6] *Эйзенхарт Л.П.*, Риманова геометрия. - М.: ИЛ, 1949. - 316 с.