Суб-Риманова задача на трехмерной разрешимой группе Ли

А.Д. Мажитова
Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г. Алматы
e-mail: Akmaral.Mazhitova@kaznu.kz

Аннотация

В этой работе мы рассматриваем суб-Риманову задачу на трехмерной разрешимой группе Ли. Она основана на построении Гамильтоновой структуры для геодезических потоков метрики Карно-Каратеодори и на принципе максимума Понтрягина. Подобные задачи, которые еще называют задачами неголономной геометрии, были хорошо изучены на группе Гейзенберга [6]. В основе суб-Римановых задач лежит Принцип Максимума Понтрягина, применение которого к геометрическим задачам подробно описано в работе Аграчева А.А., Сачкова Ю.Л.[1]. В последнее время подробно изучены суб-Римановы структуры на компактной группе $SU(2)$ [4], на полупростых группах $SO(3)$ и $SL(2)$ [3], где системы уравнений для геодезических интегрируются в элементарных функциях и приведен анализ полученных уравнений, изучены cut locus. В нашем случае разрешимая группа Sol^3 некомпактна и неполупроста. Так как наша Гамильтонова система интегрируется в специальных эллиптических функциях, их исследования и анализ будут приведены в последующих работах.

Рассмотрим трехмерную группу Ли Sol^3 представленную матрицами вида

$$\begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & x \\ 0 & e^{z} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

алгебра Ли которой построена на базисных векторах

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

а их коммутационные отношения следующие

$$[e_1, e_2] = 0; \quad [e_1, e_3] = e_1; \quad [e_2, e_3] = -e_2.$$

Перейдем к новому базису так, чтобы через коммутаторы базисных векторов можно было получить все касательное пространство:

$$a_1 = e_1 + e_2; \quad a_2 = e_1 - e_2; \quad a_3 = e_3,$$

то есть

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad a_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

тогда для нового базиса коммутаторы следующие

$$[a_1, a_2] = 0; \quad [a_1, a_3] = a_2; \quad [a_2, a_3] = a_1.$$

Рассмотрим левоинвариантную метрику на Sol^3, которая в единице группы задается формой

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}.$$

Группу Sol^3 можно идентифицировать с пространством R^3 с помощью диффеоморфизма, который матрице (1) ставит в соответствие точку $q = (x, y, z)$ в R^3. Итак, $q = (x, y, z)$ точка на группе Sol^3. Тогда касательное пространство в каждой точке Sol^3 определяется матрицами вида

$$\partial_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \partial_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \partial_z = \begin{pmatrix} -e^{-z} & 0 & 0 \\ 0 & e^z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

а векторы e_1, e_2, e_3 с помощью левых сдвигов переходят в следующие векторы

$$L_q^*(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-z} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_q^*(e_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad L_q^*(e_3) = \begin{pmatrix} -e^{-z} & 0 & 0 \\ 0 & e^z & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то есть,

$$L_q^*(e_1) = e^{-z} \cdot \partial_x, \quad L_q^*(e_2) = e^z \cdot \partial_y, \quad L_q^*(e_3) = \partial_z. \tag{5}$$

Так как выбранная метрика левоинвариантна, то есть $< L_q^*(e_i), L_q^*(e_j) >= \delta_{ij}$, то мы имеем

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e^{2z} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь для нового базиса a_1, a_2, a_3 левые сдвиги следующие

$$L_q^*(a_1) = e^{-z} \cdot \partial_x + e^z \cdot \partial_y, \quad L_q^*(a_2) = e^{-z} \cdot \partial_x - e^z \cdot \partial_y, \quad L_q^*(a_3) = \partial_z. \tag{6}$$

Произведениям $< L_q^*(a_i), L_q^*(a_j) >$ соответствуют элементы матрицы Грамма для векторов a_1, a_2, a_3

$$< a_i, a_j >= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

Пусть G - наша разрешимая трехмерная группа, а $\mathcal{G}$ ее алгебра Ли с базисными векторами a_1, a_2, a_3 согласно (3). Разобьем алгебру Ли $\mathcal{G}$ на сумму подпространств $p \bigoplus k$, где $p = span\{a_1, a_3\}, \quad k = span\{a_2\}$. Теперь возьмем левоинвариантное распределение $L_q^*(p)$ на группе G и левоинвариантную Риманову метрику, которая задана матрицей (7), тогда эта пара задает левоинвариантную метрику Карно-Каратеодори и можно записать следующее равенство

$$\widetilde{g}_{ij} = \widetilde{g}_p + t \cdot \widetilde{g}_k,$$

где $t \to \infty$. Таким образом, получим следующие компоненты метрики

$$\widetilde{g}_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1+t}{2} \cdot e^{2z} & \frac{1-t}{2} & 0 \\ \frac{1-t}{2} & \frac{1+t}{2} \cdot e^{-2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а обратные элементы к ней будут

$$\widetilde{g}^{ij} = \begin{pmatrix} \frac{1+t}{2t} \cdot e^{-2z} & -\frac{1-t}{2} & 0 \\ -\frac{1-t}{2} & \frac{1+t}{2t} \cdot e^{2z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Возьмем функцию Гамильтона $H = \dfrac{1}{2}\widetilde{g}^{ij}p_i p_j$ и получим при $t \to \infty$ следующий вид гамильтониана для нашей задачи

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{4}e^{-2z}p_x^2 + \frac{1}{2}p_x p_y + \frac{1}{4}e^{2z}p_y^2 + p_z^2. \tag{9}$$

Из известных равенств, выполняющихся для функции Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{z} = \frac{\partial H}{\partial p_z},$$

$$\dot{p_x} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{p_y} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{p_z} = -\frac{\partial H}{\partial z},$$

где точка означает производную по t, выпишем уравнения Гамильтона для (9)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \frac{1}{2}e^{-2z}p_x + \frac{1}{2}p_y \\ \dot{y} &= \frac{1}{2}e^{2z}p_y + \frac{1}{2}p_x \\ \dot{z} &= p_z \\ \dot{p_x} &= 0 \\ \dot{p_y} &= 0 \\ \dot{p_z} &= \frac{1}{2}e^{-2z}p_x^2 - \frac{1}{2}e^{2z}p_y^2. \end{aligned} \tag{10}$$

Система (10) имеет три первых интеграла:

$$I_1 = H, \quad I_2 = p_x, \quad I_3 = p_y,$$

значит наша система дифференциальных уравнений (10) полностью интегрируема. Не теряя общности, будем считать, что все геодезические берут начало в единице группы, то есть справедливы следующие начальные условия для системы (10):

$$x(0) = 0, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0. \tag{11}$$

В дальнейшем будем полагать, что

$$H = \frac{1}{2}, \quad \frac{p_x}{\sqrt{2}} = a - const, \quad \frac{p_y}{\sqrt{2}} = b - const.$$

Подставим это все в гамильтониан (9) и получим

$$1 = \left(e^{-z} \cdot a + e^{z} \cdot b\right)^2 + p_z^2, \tag{12}$$

значит,

$$p_z = \sqrt{1 - \left(e^{-z} \cdot a + e^{z} \cdot b\right)^2}.$$

Из третьего уравнения системы (10) найдем равенство для нахождения переменной t, подставив полученное выше выражение для p_z

$$t = \int \frac{dz}{\sqrt{1 - \left(e^{-z} \cdot a + e^{z} \cdot b\right)^2}}, \tag{13}$$

сделаем замену переменных $u = e^z$, тогда (13) препишется в виде

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - \left(a + bu^2\right)^2}}. \tag{14}$$

Последнее выражение не интегрируется в элементарных функциях, а является эллиптическим интегралом. В особых случаях, когда эллиптический интеграл вырождается выражения получаются в элементарных функциях. Рассмотрим сначала вырожденные для нашей системы случаи, когда
1) $a = 0, \quad b \neq 0$;
2) $b = 0, \quad a \neq 0$;
3) $D = 0$,
где D - это дискриминант подкоренного выражения в уравнении (14).

1) $a = 0, \quad b \neq 0$, тогда $p_x = 0, \quad p_y = \sqrt{2}b$.
Уравнение (14) перепишется в виде

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - b^2u^4}}.$$

Проинтегрируем, затем преобразуем полученное выражение, сделав обратную замену переменной $u = e^z$

$$e^t = \frac{Cbe^z}{1 + \sqrt{1 - b^2e^{2z}}},$$

где $C = const$ и $C > 0$. Из последнего выражения можно найти постоянную C, учитывая начальное условие (11),

$$C = \frac{1+\sqrt{1-b^2}}{b}, \tag{15}$$

и выражение для координатной функции $z(t)$

$$e^z = \frac{2Ce^t}{b\left(C^2+e^{2t}\right)},$$

значит

$$z(t) = \ln \frac{2Ce^t}{b\left(C^2+e^{2t}\right)}, \tag{16}$$

что с учетом найденной постоянной C перепишется в виде

$$z(t) = \ln \frac{2(1+\sqrt{1-b^2})\cdot e^t}{2(1+\sqrt{1-b^2})-b^2+b^2e^{2t}}. \tag{17}$$

Интегрируя первое уравнение системы (10) в условиях первого случая, получим

$$x(t) = \frac{b}{\sqrt{2}}\cdot t. \tag{18}$$

Второе уравнение системы (10), подставляя выражение (16) и учитывая (11), проинтегрируем,

$$y(t) = -\frac{\sqrt{2}C^2}{b(C^2+e^{2t})} + \frac{\sqrt{2}C^2}{b(C^2+1)}. \tag{19}$$

Таким образом, для первого случая уравнение геодезических выглядят так:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{b}{\sqrt{2}}\cdot t \\ y(t) &= -\frac{\sqrt{2}\left(2(1+\sqrt{1-b^2})-b^2\right)}{2b(1+\sqrt{1-b^2})-b^3+b^3e^{2t}} + \frac{\sqrt{2}\left(2(1+\sqrt{1-b^2})-b^2\right)}{2b(1+\sqrt{1-b^2})} \\ z(t) &= \ln \frac{2(1+\sqrt{1-b^2})\cdot e^t}{2(1+\sqrt{1-b^2})-b^2+b^2e^{2t}}. \end{aligned} \tag{20}$$

2) $b = 0, \quad a \neq 0$, тогда $p_y = 0, \quad p_x = \sqrt{2}a$.
Уравнение (14) перепишется в виде

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}. \tag{21}$$

Проинтегрируем это выражение и сделаем обратную замену $u = e^z$,

$$e^t = (e^z + \sqrt{e^{2z}-a^2}\cdot C_2),$$

где $C_2 = const$ и $C_2 > 0$. Из последнего выражения можно найти постоянную C_2, учитывая начальное условие (11),

$$C_2 = \frac{1}{1+\sqrt{1-a^2}}, \tag{22}$$

тогда можно найти выражение для $z(t)$

$$z(t) = \ln\frac{C_2^2a^2+e^{2t}}{2C_2e^t}, \tag{23}$$

где C_2 записывается в виде (22). Первое уравнение системы (10) в условиях случая **2)** с подстановкой выражения (22) проинтегрируем с учетом (11)

$$x(t) = -\frac{\sqrt{2}a_2^2}{e^{2t}+C_2^2a^2} + \frac{\sqrt{2}aC_2^2}{1+C_2^2a^2}. \tag{24}$$

Интегрируя второе уравнение системы (10) в наших условиях с учетом (11), получим

$$y(t) = \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot t. \tag{25}$$

Таким образом, для второго случая уравнение геодезических выглядят так:

$$\begin{aligned}
x(t) &= -\frac{\sqrt{2}\cdot a}{e^{2t}\left[2(1+\sqrt{1-a^2})-a^2\right]+a^2} + \frac{\sqrt{2}\cdot a}{2(1+\sqrt{1-a^2})}\\
y(t) &= \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot t\\
z(t) &= \ln\left(\frac{a^2}{2(1+\sqrt{1-a^2})\cdot e^t} + \frac{(1+\sqrt{1-a^2})\cdot e^t}{2}\right).
\end{aligned} \tag{26}$$

3) $D = 1-4ab = 0$, тогда

$$ab = \frac{1}{4}. \tag{27}$$

С другой стороны, равенство (12) при начальных условиях (11), можно записать в виде

$$(a+b)^2 + p_z^2 = 1, \tag{28}$$

значит,

$$|a+b| \le 1. \tag{29}$$

Из условий (27) и (29) ясно, что $a = b = \frac{1}{2}$ или $a = b = -\frac{1}{2}$, а при этих значениях из равенства (28) следует, что $p_z = 0$. Тогда решение системы (11) для третьего случая, при $D = 0$, будет линейным:

$$x(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad y(t) = \frac{t}{\sqrt{2}}, \quad z(t) = 0, \quad a = b = \frac{1}{2}; \tag{30}$$

$$x(t) = -\frac{t}{\sqrt{2}}, \quad y(t) = -\frac{t}{\sqrt{2}}, \quad z(t) = 0, \quad a = b = -\frac{1}{2}. \tag{31}$$

Найдем решение системы (10) для общего случая и теперь $D \neq 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0$. Интеграл (12) приведем к виду эллиптической функции Якоби (смотри [2] и [5])

$$v = \int_1^{dnv} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-k'^2)}}, \tag{32}$$

который является одним из частных случаев эллиптческого интеграла первого рода в форме Лежандра

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

где k называется модулем этого интеграла и с k' они связаны равенством

$$k^2 + k'^2 = 1.$$

Рассмотрим подкоренное выражение в равенстве (14) и разложим его на множители

$$u^2 - \left(a + bu^2\right)^2 = -b^2u^4 + (1-2ab)u^2 - a^2 =$$

$$= -b^2(u^2 - \sigma_1^2)(u^2 - \sigma_2^2) = \sigma_1^4 b^2 \left(1 - \frac{u^2}{\sigma_1^2}\right) \cdot \left(\frac{u^2}{\sigma_1^2} - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right),$$

в последнем выражении сделаем замену

$$w = \frac{u}{\sigma_1} \tag{33}$$

и подставим его в (14)

$$t = \frac{1}{\sigma_1 b} \cdot \int \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2) \cdot \left(w^2 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)}}. \tag{34}$$

Мы получили в точности эллиптическую функцию Якоби (32), где $k'^2 = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}$,

$$\sigma_1 b \cdot t = \int_1^{dn(\sigma_1 bt)} \frac{dw}{\sqrt{(1-w^2) \cdot \left(w^2 - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2}\right)}},$$

значит

$$w = dn(\sigma_1 bt, \quad k).$$

Сделав обратную замену (33) и $u = e^z$, учитывая начальные условия (11) и $dn(0,k) = 1$, получим

$$z(t) = \ln dn(\sigma_1 bt, \quad k).$$

Подставляя последнее выражение в первое уравнение системы (10) и интегрируя в эллиптических функциях, получим выражение для $x(t)$:

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{a}{\sigma_1 b}\left(-\frac{k^2 sn(\sigma_1 bt)\cdot cn(\sigma_1 bt)}{k'^2\sqrt{1-k^2 sn^2(\sigma_1 bt)}} + \frac{1}{k'^2}\cdot E(am(\sigma_1 bt),\quad k)\right) + bt\right] + C_3.$$

Так как $sn(0,k)=0, \quad cn(0,k)=1, \quad am(0,k)=0$ и $E(0,k)=0$, то $C_3=0$. А из второго уравнения - выражение для функции $y(t)$:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sigma_1}\cdot E(am(\sigma_1 bt),\quad k) + at\right) + C_4,$$

а по (11) следует, что $C_4 = 0$. Таким образом, можно выписать общие уравнения геодезических для нашей группы Ли

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{ak^2 sn(\sigma_1 bt)\cdot cn(\sigma_1 bt)}{\sqrt{2}\sigma_1 bk'^2\sqrt{1-k^2 sn^2(\sigma_1 bt)}} + \frac{a\cdot E(am(\sigma_1 bt),\quad k)}{\sqrt{2}\sigma_1 bk'^2} + \frac{b}{\sqrt{2}}t \\ y(t) &= \frac{E(am(\sigma_1 bt),\quad k)}{\sqrt{2}\sigma_1} + \frac{a}{\sqrt{2}}t \\ z(t) &= \ln dn(\sigma_1 bt,\quad k). \end{aligned} \tag{35}$$

Список литературы

[1] *А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков*, Геометрическая теория управления, - М.: Физматлит, 2005. - 392 с.

[2] *Е.П. Аксенов*, Специальные функции в небесной механике, - М: Наука, 1986. - 321 с.

[3] *U.Boscain, F.Rossi*, Invariant Carnot-Caratheodory metrics on S^3, $SO(3)$, $SL(2)$ and lens spaces, - Preprint SISSA, 2007. - 24 p.

[4] *O.Calin, D.-Ch.Chang, I.Markina*, SubRiemannian geometry on the sphere S^3. //arxiv.org>math>arXiv:0804.1695, - 2008. - 13 p.

[5] *И.С.Градштейн, И.М.Рыжик*, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, - М.: Физматгиз, 1963. - 1100 с.

[6] *I.A.Taimanov*, Integrable geodesic flows of non-holonomic metrics. // J.Dynam. Control Sistem 3(1997), - 129-147 p.