К построению решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода

С.А. Айсагалиев, А.А.Кабидолданова, Т.М.Сартаев

Институт математики и механики КазНУ им.аль-Фараби, Алматы

Аннотация

Предлагаются методы построения решения интегрального уравнения Фредгольма первого рода при различных требованиях на ядро оператора. Исследуются свойства приближенного решения уравнения.

Постановка задачи.

Рассматривается интегральное уравнение следующего вида

$$\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)u(\tau)d\tau = f(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{1}$$

где $K(t,\tau) = \|K_{ij}(t,\tau)\|$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, — известная матрица порядка $n \times m$, элементы матрицы $K(t,\tau)$, функции $K_{ij}(t,\tau)$ измеримы и принадлежат классу L_2 на квадрате

$$Q = \Big\{(t,\tau) \in R^2 | t \in I,\ \tau \in I\Big\}, \quad \int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t_1} |K_{ij}(t,\tau)|^2 d\tau dt < \infty,$$

функция $f(t) \in L_2(I, R^n)$ — задана, $u(\tau) \in L_2(I, R^m)$ — искомая функция, моменты времени t_0, t_1 — фиксированы, оператор $K : L_2(Q, R^m) \to L_2(I, R^n)$, $Ku = f$.

Обозначим через $u_* \in L_2(I, R^m)$ — решение уравнения (1), через $\bar{u} \in L_2(I, R^m)$ — приближенное решение.

В статье исследуются свойства приближенного решения уравнения (1) при различных требованиях на свойства элементов матрицы $K(t,\tau)$ и даются оценки нормы $\|u_* - \bar{u}\|_{L^2}$.

Ставятся следующие задачи:

Задача 1. Пусть элементы матрицы $K(t,\tau)$, $(t,\tau) \in Q$ и функции $f(t), t \in I$, определены и имеют производные s-го порядка по переменной t. Необходимо найти приближенное решение $\bar{u}(\tau) \in L_2(I, R^m)$ уравнения (1). Найти оценку $\|u_* - \bar{u}\|_{L^2}$.

Задача 2. Пусть элементы матрицы $K(t,\tau)$, $(t,\tau) \in Q$, функции $K_{ij}(t,\tau) \in L_2(Q, R^1)$ имеют следы $K_{ij}(\cdot,\tau) \in L_2(I, R^1)$ непрерывные в метрике $L_2(I, R^1)$, т.е.

$$\lim_{\tau \to \tau_*} \int_{t_0}^{t_1} |K_{ij}(t,\tau) - K_{ij}(t,\tau_*)|^2 dt = 0, \quad \tau_* \in [t_0, t_1].$$

Необходимо найти приближенное решение $\bar{u}(\tau) \in L_2(I, R^m)$ уравнения (1). Найти оценку $\|u_* - \bar{u}\|_{L^2}$.

Задача 3. Пусть матрица $K(t,\tau)$, $(t,\tau) \in Q$ имеет след $K(\cdot,\tau)$, непрерывный в метрике L_2 и известны матрицы $K(t_i,\tau)$, $i = \overline{0,N}$, $t_1 = t_N$. Найти приближенное решение $\bar{u}(\tau) \in L_2(I, R^m)$ и оценку $\|u_* - \bar{u}\|_{L^2}$.

Задача 4. Предположим, что известно решение интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)v(t,\tau)d\tau = f(t), \quad t \in I = [t_0, t_1], \tag{2}$$

где $v(t,\tau) \in L_2(Q, R^m)$. Необходимо найти приближенное решение $\bar{u}(\tau) \in L_2(I, R^m)$ уравнения (1) по известной функции $v(t,\tau)$. Найти оценку $\|u_* - \bar{u}\|_{L^2}$.

Заметим, что для существования $K_{ij}(\cdot,\tau) \in L_2(I, R^1)$ достаточно, чтобы функция $K_{ij}(t,\tau)$ имела обобщенную производную $\dfrac{\partial}{\partial\tau}K_{ij}(t,\tau) \in L_2(Q, R^1)$.

Следует отметить, что: интегральное уравнение Фредгольма первого рода вида (1) относится к мало исследованной задаче интегральных уравнений; уравнение (1) может не при любой правой части $f(t) \in L_2(I, R^n)$ иметь решения ; оператор K — является компактным, оператор, обратный оператору K, не ограничен, т.е., если $Ku_1 = f_1$, $Ku_2 = f_2$, $\|f_1 - f_2\| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, то $u_1 = K^{-1}f_1$, $u_2 = K^{-1}f_2$ могут сильно отличаться друг от друга [1,2].

Как показано в работах [3-6], решения проблем управляемости процессов, описываемых интегро-дифференциальными уравнениями, сводится к существованию и построению решения интегрального уравнения (1). Поэтому исследование свойств решений уравнения (1) является актуальным.

В статье получены решения задач 1-4 на основе теорем, приведенных в работах [7-10], для интегральных уравнений вида (2) и уравнений вида

$$\int_{t_0}^{t_1} K(t)u(t)dt = a, \tag{3}$$

где $a \in R^n$ — постоянный вектор, $K(t) = \|K_{ij}(t)\|$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$, $K_{ij}(t) \in L_2(I, R^1)$, $u(t) \in L_2(I, R^m)$, t_0, t_1 $(t_1 > t_0)$ – некоторые числа.

Для полноты изложения ниже приведены эти результаты для уравнений (3) и (2). Далее будем пользоваться символом (*) для обозначения знака транспонирования.

Теорема 1 . *Интегральное уравнение (3) при любом $a \in R^n$ имеет решение тогда и только тогда, когда матрица $C(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} K(t)K^*(t)dt$ положительно определена.*

Теорема 2 . *Пусть матрица $C(t_0,t_1)$ положительно определена. Тогда общее решение интегрального уравнения (3) имеет вид*

$$u(t) = K^*(t)C^{-1}(t_0,t_1)a + v(t) - K^*(t)C^{-1}(t_0,t_1)\int_{t_0}^{t_1} K(\xi)v(\xi)d\xi, \quad t \in I, \tag{4}$$

где $v(t) \in L_2(I, R^m)$ – произвольная функция, $a \in R^n$ – любой вектор.

Как следует из формулы (4), функция $u(t), t \in I$, может быть представлена в виде $u(t) = u_1(t) + u_2(t)$, $t \in I$, где $u_1(t) = K^*(t)C^{-1}(t_0,t_1)a$, $t \in I$, — частное решение,

$u_2(t) = v(t) - K^*(t)C^{-1}(t_0,t_1)\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} K(t)v(t)dt$, $t \in I$, – решение однородного уравнения.

Заметим, что: 1. $\langle u_1, u_2\rangle_{L_2} = 0$, т.е. $u_1 \perp u_2$; 2. $\|u\|^2 = \|u_1\|^2 + \|u_2\|^2$, где $\|u_2\| = 0$ при $v(t) = 0$. 3. Функция $u_1(t), t \in I$ является решением интегрального уравнения (3) с минимальной нормой.

Теорема 3 . *Интегральное уравнение (2) имеет решение тогда и только тогда, когда матрица $C(t) = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)K^*(t,\tau)dt$, $t_1 > t_0$, для любого $t \in I$ положительно определена.*

Теорема 4 . *Пусть матрица $C(t), \forall t \in I$, положительно-определена. Тогда общее решение интегрального уравнения (2) имеет вид*

$$u(t,\tau) = K^*(t,\tau)C^{-1}(t)f(t) + \rho(t,\tau) - K^*(t,\tau)C^{-1}(t)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\xi)\rho(t,\xi)d\xi, \quad t \in I, \tag{5}$$

где $\rho(t,\tau) \in L_2(Q, R^m)$ — произвольная функция, $f(t) \in L_2(I, R^n)$.

Ниже приведенные результаты доказаны с применением теорем 1-4.

Решение задачи 1. Рассмотрим случай, когда элементы матрицы $K(t,\tau)$ и вектор-функции $f(t), t \in I$ имеют производные s–го порядка по переменной t. Тогда

$$K_{ij}(t,\tau) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!}\frac{\partial^k K_{ij}(0,\tau)}{\partial t^k} t^k + r_{ij}(t,\tau), \quad f_j(t) = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{1}{k!}\frac{d^k f_j(0)}{dt^k} t^k + r_j(t), \quad i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m};$$

где $\dfrac{\partial^k K_{ij}(t,\tau)}{\partial t^k}$, $\dfrac{d^k f_i(t)}{dt^k}$ равномерно непрерывные функции в окрестности точки $t = 0$.

$$r_j(t) = \frac{1}{s!}\int\limits_0^t \frac{d^s f_j(\xi)}{dt^s}(t-\xi)^s d\xi, \qquad r_{ij}(t,\tau) = \frac{1}{s!}\int\limits_0^t \frac{\partial^s K_{ij}(\xi,\tau)}{\partial t^s}(t-\xi)^s d\xi.$$

Введем матрицу $T(\tau)$ порядка $ns \times m$ и вектор $\bar{a} \in R^{sn}$:

$$T(\tau) = \begin{pmatrix} K_0(\tau) \\ K_1(\tau) \\ \cdots \\ K_{s-1}(\tau) \end{pmatrix}, \quad \bar{a} = \begin{pmatrix} \bar{a}_0 \\ \bar{a}_1 \\ \cdots \\ \bar{a}_{s-1} \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \bar{a}_k = \begin{pmatrix} \dfrac{d^k f_1(0)}{dt^k} \\ \cdots \\ \dfrac{d^k f_m(0)}{dt^k} \end{pmatrix},$$

$K_k(\tau) = \left\| \dfrac{\partial^k K_{ij}(0,\tau)}{\partial^k t} \right\|$, $k = \overline{0, s-1}$, $i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}$,

Приравнивая коэффициенты при одинаковой степени $t_k, k = 0, 1, \ldots, s-1$, получим из (1) приближенное уравнение

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} T(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau = \bar{a}. \tag{6}$$

Теорема 5 . *Пусть матрица $C_1(t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} T(\tau)T^*(\tau)d\tau$ положительно определена. Тогда общее решение интегрального уравнения (6) имеет вид*

$$\bar{u}(\tau) = \bar{u}(\tau, w) = T^*(\tau)C_1^{-1}(t_0,t_1)\bar{a} + w(\tau) - T^*(\tau)C_1^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1} T(\xi)w(\xi)d\xi, \tag{7}$$

где $w(\tau) \in L_2(I, R^m)$ — произвольная функция.

Доказательство. Поскольку уравнение (6) относится к типу интегральных уравнений (3), то верны утверждения теорем 1,2. После замены $K(\tau), a$ на $T(\tau), \bar{a}$ соответственно, получим матрицу $C_1(t_0,t_1)$ и функцию $\bar{u}(\tau), \tau \in I$. **Теорема доказана.**

Оценим $\|u_* - \bar{u}\|_{L_2}$. Определим функцию $\bar{f}(t,w)$ по формуле

$$\bar{f}(t,w) = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)\bar{u}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)\bar{u}(\tau,w)d\tau,\ t \in I. \tag{8}$$

Тогда разность $u_*(\tau) - \bar{u}(\tau,w),\ \tau \in I$, является решением интегрального уравнения

$$\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)[u_*(\tau) - \bar{u}(\tau,w)]d\tau = f(t) - \bar{f}(t,w),\ \ t \in I. \tag{9}$$

Введем следующие обозначения

$$\Gamma(\tau) = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)dt, \quad b_0(w) = \int_{t_0}^{t_1} [f(t) - \bar{f}(t,w)]dt. \tag{10}$$

Можно показать,что $\bar{f}(t,w) = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)T^*(\tau)d\tau C_0^{-1}(t_0,t_1)\bar{a} + \int_{t_0}^{t_1}[K(t,\xi) - R(t)T(\xi)]w(\xi)d\xi$, где $R(t) = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)T^*(\tau)d\tau C_1^{-1}(t_0,t_1)$.

Теорема 6 . *Пусть выполнены условия теоремы 5 и пусть, кроме того, матрица* $C_2(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1}\Gamma(\tau)\Gamma^*(\tau)d\tau$ *положительно определена. Тогда справедливо равенство*

$$\|u_* - \bar{u}\|^2_{L_2} = \inf_{w \in L_2} \int_{t_0}^{t_1} |\Gamma^*(\tau)C_2^{-1}(t_0,t_1)b_0(w)|^2 d\tau. \tag{11}$$

В случае, $w(\tau) \equiv 0, \tau \in [t_0,t_1]$ *справедлива оценка* $\|u_* - \bar{u}\|^2_{L_2} \le \int_{t_0}^{t_1} |\Gamma^*(\tau)C_2^{-1}(t_0,t_1)b_0(0)|^2 d\tau$*, где* $b_0(0) = \int_{t_0}^{t_1}[f(t) - \bar{f}(t,0)]dt,\ \bar{f}(t,0) = \int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)T^*(\tau)d\tau C^{-1}(t_0,t_1)\bar{a}, t \in I.$

Доказательство. Интегрируем по t соотношение (9). Согласно теореме Фубини, из (9) с учетом (10), получим

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)[u_*(\tau) - \bar{u}(\tau)]d\tau \right) dt = \int_{t_0}^{t_1} \Gamma(\tau)[u_*(\tau) - \bar{u}(\tau)]d\tau = \int_{t_0}^{t_1} [f(t) - \bar{f}(t,w)]dt.$$

Отсюда следует

$$\int_{t_0}^{t_1} \Gamma(\tau)[u_*(\tau) - \bar{u}(\tau)]d\tau = b_0(w). \tag{12}$$

Матрица $C_2(t_0,t_1) > 0$, следовательно выполнены условия теорем 1,2. Тогда решение интегрального уравнения (12) с минимальной нормой определяется по формуле

$$u_*(\tau) - \bar{u}(\tau) = \Gamma^*(\tau)C_2^{-1}(t_0,t_1)b_0(w),\ \ \tau \in [t_0,t_1].$$

Выберем произвольную функцию $w(\tau) \in L_2(I, R^n)$ из условия

$$\|\Gamma^* C_2^{-1}(t_0,t_1) b_0(w)\|_{L_2}^2 \to \inf, \quad w(\tau) \in L_2(I, R^m)$$

Тогда наилучшая норма разности $\|u_* - \bar{u}\|^2 = \inf\limits_{w \in L_2} \|\Gamma^* C_2^{-1}(t_0,t_1) b_0(w)\|_{L_2}^2$. Отсюда следует оценка (11). Так как $\inf\limits_{w \in L_2} \|\Gamma^* C_2^{-1}(t_0,t_1) b_0(w)\|_{L_2}^2 \le \|\Gamma^* C_2^{-1}(t_0,t_1) b_0(w)\|^2$, то справедливо и последнее утверждение теоремы. **Теорема доказана.**

Как следует из вышеизложенного, если уравнение (1) имеет решение, элементы матрицы $K(t,\tau)$ и вектор-функции $f(t), t \in I$, имеют производные любого порядка, то норма $\|u_* - \bar{u}\|_{L_2} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$. Если уравнение (1) не имеет решения, то $\|u_* - \bar{u}\|_{L_2} \xrightarrow[s\to\infty]{} 0$.

Отметим, что если в равенстве (11) нижняя грань достигается при $w_* \in L_2(I, R^m)$, то наилучшее приближение $\bar{u}(\tau) = \bar{u}(\tau, w_*)$, $\tau \in I$.

Решение задачи 2. Пусть элементы матрицы $K(t,\tau)$ функции $K_{ij}(t,\tau) \in L_2(Q, R^1)$ имеют следы $K_{ij}(\cdot,\tau) \in L_2(Q, R^1)$. Пусть в $L_2(Q, R^1)$ дана полная система $1, t, t^2, \dots$, а соответствующая полная ортогональная система $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots$. Пусть выполнены условия теоремы Фубини,т.е.

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^{t_1} K_{ij}(t,\tau) u_j(\tau) d\tau \right) \varphi_k(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^{t_1} K_{ij}(t,\tau) \varphi_k(t) dt \right) u_j(\tau) d\tau =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} l_{ijk}(\tau) u_j(\tau) d\tau, \quad i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$\int_{t_0}^{t_1} f_i(t) \varphi_k(t) dt = a_{ik}, \quad i = \overline{1,n}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{где } \ f_i(t) \in L_2(I, R^1), i = \overline{1,n}.$$

Тогда

$$\int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_0}^{t_1} K(t,\tau) u(\tau) d\tau \right) \varphi_k(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \left(\begin{array}{l} \left(\int_{t_0}^{t_1} K_{11}(t,\tau) \varphi_k(t) dt \right) u_1(\tau) d\tau + ... + \\ \cdots \\ \left(\int_{t_0}^{t_1} K_{n1}(t,\tau) \varphi_k(t) dt \right) u_1(\tau) d\tau + ... + \end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{l} + \left(\int_{t_0}^{t_1} K_{1m}(t,\tau) \varphi_k(t) dt \right) u_m(\tau) d\tau \\ \cdots \\ + \left(\int_{t_0}^{t_1} K_{nm}(t,\tau) \varphi_k(t) dt \right) u_m(\tau) d\tau \end{array} \right) = \int_{t_0}^{t_1} \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} l_{1ik}(\tau) u_i(\tau) \\ \cdots \\ \sum\limits_{i=1}^{m} l_{nik}(\tau) u_i(\tau) \end{pmatrix} d\tau = \int_{t_0}^{t_1} L_k(\tau) u(\tau) d\tau,$$

$$c_k = \int_{t_0}^{t_1} f(t) \varphi_k(t) dt = \begin{pmatrix} \int_{t_0}^{t_1} f_1(t) \varphi_k(t) dt \\ \cdots \\ \int_{t_0}^{t_1} f_n(t) \varphi_k(t) dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{1k} \\ c_{2k} \\ \cdots \\ c_{nk} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Теперь для каждого k имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L_k(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau = c_k, k = 1, 2, \dots, \text{ где } L_k(\tau) \text{ матрица порядка } n\times n, c_k \in R^n.$$

Усеченное уравнение для значений $k = 1, 2, \dots, N$ имеет вид

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} L^{(N)}(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau = c^{(N)}, \text{ где } L^{(N)}(\tau) = \begin{pmatrix} L_1(\tau) \\ \cdots \\ L_N(\tau)\end{pmatrix}, \quad c^{(N)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \cdots \\ c_N\end{pmatrix}. \tag{13}$$

Теорема 7 . *Пусть матрица* $C_3(t_0, t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} L^{(N)}(\tau)[L^{(N)}(\tau)]^* d\tau$ *порядка* $Nn \times Nn$ *положительно определена. Тогда общее решение интегрального уравнения (13) имеет вид*

$$\bar{u}(\tau) = \bar{u}(\tau, w_1) = [L^{(N)}(\tau)]^* C_3^{-1}(t_0, t_1)\Big[C^{(N)} - \int\limits_{t_0}^{t_1} L^{(N)}(\xi)w_1(\xi)d\xi\Big] + w_1(\tau), \quad \tau \in I, \tag{14}$$

где $w_1(\tau) \in L_2(I, R^m)$ *– произвольная функция.*

Доказательство теоремы следует из теорем 1, 2. Вычислим функцию $\bar{f}(t, w_1)$ по формуле

$$\bar{f}(t, w_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)\bar{u}(\tau)d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)\bar{u}(\tau, w_1)d\tau =$$

$$= \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)[L^N(\tau)]^* d\tau \cdot C_3^{-1}(t_0, t_1)C^{(N)} + \int\limits_{t_0}^{t_1} [K(t,\xi) - R_1(t)L^{(N)}(\xi)]w_1(\xi)d\xi,$$

где $R_1(t) = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)[L^{(N)}(\tau)]^* d\tau \cdot C_3^{-1}(t_0, t_1)$. Тогда разность $u_*(\tau) - \bar{u}(\tau, w_1),\ \tau \in I$ является решением интегрального уравнения

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)[u_*(\tau) - \bar{u}(\tau, w_1)]d\tau = f(t) - \bar{f}(t, w_1), \quad t \in I.$$

Теорема 8 . *Пусть выполнено условие теоремы 7, и пусть, кроме того, матрица* $C_2(t_0, t_1)$ *положительно определена. Тогда справедливо равенство*

$$\|u_* - \bar{u}\|^2_{L_2} = \inf_{w_1 \in L_2} \int\limits_{t_0}^{t_1} |\Gamma^*(\tau)C_2^{-1}(t_0, t_1)b_1(w_1)|^2 d\tau, \tag{15}$$

где $b_1(w_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [f(t) - \bar{f}(t, w_1)]dt$. *В случае* $w_1(\tau) \equiv 0,\ \tau \in [t_0, t_1]$ *справедлива оценка*

$$\|u_* - \bar{u}\|^2_{L_2} \le \int\limits_{t_0}^{t_1} |\Gamma^*(\tau)C_2^{-1}(t_0, t_1)b_1(0)|^2 d\tau,$$

где $b_1(0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} [f(t) - \bar{f}(t, 0)]dt, \quad \bar{f}(t, 0) = \int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)[L^{(N)}(\tau)]^* d\tau \cdot C_3^{-1}(t_0, t_1)C^{(N)}, \quad t \in I.$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 6.

Решение задачи 3. Предположим, что элементы матрицы $K(t,\tau)$ функции $K_{ij}(t,\tau)$, $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$, $(t,\tau)\in Q$ имеют следы $K_{ij}(\cdot,\tau)\in L_2(I,R^1)$ непрерывные в метрике L_2, $K(\cdot,\tau)=\|K_{ij}(\cdot,\tau)\|$, $i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$.

Отрезок $[t_0,t_1]$ разобьем на N частей и рассмотрим интегральное уравнение (1) для моментов времени $t_k\in I$, $k=\overline{0,N}$, $t_N=t_1$. В результате имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t_k,\tau)\bar u(\tau)d\tau=f(t_k),\ \ k=\overline{0,N}.$$

Введем следующие матрицы и вектора

$$\overline{K}=\begin{pmatrix}K_0(\tau)\\ K_1(\tau)\\ \cdots\\ K_N(\tau)\end{pmatrix},\qquad d=\begin{pmatrix}d_0\\ d_1\\ \vdots\\ d_N\end{pmatrix}\in R^{n(N+1)},\ \ K_i(\tau)=K(t_i,\tau),\quad d_i=f(t_i)\in R^n,\ \ i=\overline{0,N}.$$

Тогда приближенное интегральное уравнение запишется в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\overline{K}(\tau)\bar u(\tau)d\tau=d. \tag{16}$$

Теорема 9 . *Пусть матрица* $C_4(t_0,t_1)=\int\limits_{t_0}^{t_1}\overline{K}(\tau)\overline{K}^*\tau d\tau$ *положительно определена. Тогда общее решение интегрального уравнения (16) имеет вид*

$$\bar u(\tau)=\bar u(\tau,w_2)=\overline{K}^*(\tau)C_4^{-1}(t_0,t_1)d+w_2(\tau)-\overline{K}^*(\tau)C_4^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\overline{K}(\xi)w_2(\xi)d\xi, \tag{17}$$

где $\tau\in I$, $w_2(\tau)\in L_2(I,R^m)$ *— произвольная функция.*

Доказательство теоремы следует из теорем 1, 2.

Теорема 10 . *Пусть выполнено условие теоремы 9, и пусть, кроме того, матрица* $C_2(t_0,t_1)$ *положительно определена. Тогда справедливо равенство*

$$\|u_*-\bar u\|^2_{L_2}=\inf_{w_2\in L_2}\int\limits_{t_0}^{t_1}|\Gamma^*(\tau)C_2^{-1}(t_0,t_1)b_2(w_2)|^2d\tau, \tag{18}$$

где $b_2(w_2)=\int\limits_{t_0}^{t_1}[f(t)-\bar f(t,w_2)]dt$, $\bar f(t,w_2)=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t,\tau)\bar u(\tau)d\tau=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t,\tau)\overline{K}^*(\tau)d\tau\times$ $\times C_4^{-1}(t_0,t_1)d+\int\limits_{t_0}^{t_1}[K(t,\xi)-R_2(t)\overline{K}(\xi)]w_2(\xi)$, $R_2(t)=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t,\tau)\overline{K}^*(\tau)d\tau\cdot C_4^{-1}(t_0,t_1)$.

В случае $w_2(\tau)\equiv 0$, $\tau\in I$ *справедлива оценка* $\|u_*-\bar u\|^2_{L_2}\le\int\limits_{t_0}^{t_1}|\Gamma^*(\tau)C_2^{-1}(t_0,t_1)b_2(0)|^2d\tau$, *где* $b_2(0)=\int\limits_{t_0}^{t_1}[f(t)-\bar f(t,0)]dt$, $\quad\bar f(t,0)=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t,\tau)K^*(\tau)d\tau\cdot C_4^{-1}(t_0,t_1)d$, $\ t\in I$.

Доказательства аналогичных теорем приведены выше.

Решение задачи 4. Пусть выполнены условия теорем 3, 4. Тогда общее решение интегрального уравнения (2) определяется по формуле (5), где $p(t,\tau) \in L_2(I, R^m)$ — произвольная функция. В частности функция $p(t,\tau)$ может быть представлена в виде

$$p(t,\tau) = \Sigma(t,\tau) f(t), \quad (t,\tau) \in Q,$$

где $\Sigma(t,\tau)$ — произвольная матрица порядка $m \times n$ с элементами из L_2.

Теперь соотношение (5) запишется в виде

$$u(t,\tau) = P(t,\tau) f(t), \quad (t,\tau) \in Q, \tag{19}$$

где $P(t,\tau) = K^*(t,\tau)C^{-1}(t) + \Sigma(t,\tau) - K^*(t,\tau)C^{-1}(t)\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\tau)\Sigma(t,\tau)d\tau$ — матрица порядка $m \times n$. В случае, когда $\Sigma(t,\tau) = 0$, матрица $P(t,\tau) = K^*(t,\tau)C^{-1}(t)$, $(t,\tau) \in Q$.

Как следует из формулы (19), при выбранной матрице $\Sigma(t,\tau)$ порядка $m \times n$, имеем

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_1} u(t,\tau)dtd\tau = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_1} P(t,\tau)f(t)dtd\tau = e_\Sigma \in R^m, \tag{20}$$

где e_Σ — постоянный вектор зависящий от Σ. Используя левую часть уравнения (1) для значения $f(t), t \in I$, из (20) получим $e_\Sigma = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_1} P(t,\tau)\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} K(t,\xi)u(\xi)d\xi\right)dtd\tau$. Далее последовательно применяя теорему Фубини получим

$$e_\Sigma = \int\limits_{t_0}^{t_1}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} P(t,\tau)K(t,\xi)dt\right)u(\xi)d\xi d\tau = \int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\int\limits_{t_0}^{t_1} F(\tau,\xi)d\tau\right)u(\xi)d\xi = \int\limits_{t_0}^{t_1}\Lambda(\xi)u(\xi)d\xi,$$

где $F(\tau,\xi) = \int\limits_{t_0}^{t_1} P(t,\tau)K(t,\xi)dt$, $\Lambda(\xi) = \int\limits_{t_0}^{t_1} F(\tau,\xi)d\tau$. В результате, мы имеем уравнение

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \Lambda(\tau)\bar{u}(\tau)d\tau = e_\Sigma. \tag{21}$$

Теорема 11 . *Пусть матрица $C(t)$, $t \in I$ положительно определена, и пусть, кроме того, матрица $C_5(t_0,t_1) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\Lambda(\tau)\Lambda^*(\tau)d\tau$ положительно определена. Тогда общее решение интегрального уравнения (21) определяется по формуле*

$$\bar{u}(\tau) = \bar{u}(\tau, w_3) = \Lambda^*(\tau)C_5^{-1}(t_0,t_1)e_\Sigma + w_3(\tau) - \Lambda^*(\tau)C_5^{-1}(t_0,t_1)\int\limits_{t_0}^{t_1}\Lambda(\xi)w_3(\xi)d\xi \quad \tau \in I,$$

где $w_3(\tau) \in L_2(I, R^m)$ — произвольная функция.

Доказательство теоремы 11 следует из теорем 1, 2.

Вычислим вектор-функцию

$$\bar{f}(t,w_3)=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t,\tau)\bar{u}(\tau,w_3)d\tau=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t,\tau)\Lambda^*(\tau)d\tau\cdot C_5^{-1}(t_0,t_1)e_\Sigma+$$

$$+\int\limits_{t_0}^{t_1}[K(t,\xi)-R_3(t)\Lambda(\xi)]w_3(\xi)d\xi,\quad R_3(t)=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t,\tau)\Lambda^*(\tau)d\tau\cdot C_5^{-1}(t_0,t_1).$$

В частности, когда $\Sigma(t,\tau)=0$, функция $\bar{f}(t,0)=\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t,\tau)\Lambda^*(\tau)d\tau\cdot C_5^{-1}(t_0,t_1)e_0$, где $\Lambda(\tau)=\int\limits_{t_0}^{t_1}F(t,\tau)dt$, $F(t,\tau)=\int\limits_{t_0}^{t_1}K^*(\xi,t)C^{-1}(\xi)K(\xi,\tau)d\xi$. Пусть $u_*(\tau)\in L_2(I,R^m)$ — решение уравнения (1). Тогда $\int\limits_{t_0}^{t_1}K(t,\tau)[u_*(\tau)-\bar{u}(\tau,w_3)]d\tau=f(t)-\bar{f}(t,w_3),\ \ t\in I$. Отсюда следует, что (см.(12))

$$\int\limits_{t_0}^{t_1}\Gamma(\tau)[u_*(\tau)-\bar{u}(\tau,w_3)]d\tau=b_3(w_3),\quad b_3(w_3)=\int\limits_{t_0}^{t_1}[f(t)-\bar{f}(t,w_3)]dt. \tag{22}$$

Теорема 12 . *Пусть выполнены условия теоремы 11, и пусть, кроме того, матрица* $C_2(t_0,t_1)$ *положительно определена. Тогда верно равенство*

$$\|u_*-\bar{u}\|_{L_2}^2=\inf_{w_3\in L_2}\int\limits_{t_0}^{t_1}|\Gamma^*(\tau)C_2^{-1}(t_0,t_1)b_3(w_3)|^2d\tau, \tag{23}$$

В случае $\Sigma(t,\tau)=0,\ w_3=0$, *справедлива оценка* $\|u_*-\bar{u}\|_{L_2}^2\le\int\limits_{t_0}^{t_1}|\Gamma^*(\tau)C_2^{-1}(t_0,t_1)b_3(0)|^2d\tau$.

Доказательство теоремы 12 следует из теорем 1, 2.

Если нижняя грань в (23) достигается при $w_{3*}(\tau)\in L_2(I,R^m)$, то наилучшее приближение равно $\bar{u}(\tau,w_{3*}),\ \ \tau\in I$.

Список литературы

[1] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. // - М.: Наука, 1989, - 623 с.

[2] *Краснов М.Л.* Интегральные уравнения. // - М.: Наука, 1975, - 363 с.

[3] *Айсагалиев С.А., Айсагалиев Т.С.* Методы решения краевых задач. - Алматы: Қ азақ университетi, 2002, - 348 с.

[4] *Айсагалиев С.А.* Конструктивная теория краевых задач оптимального уравнения. - Алматы: Қ азақ университетi, 2007, - 327 с.

[5] *Айсагалиев С.А., Кадиболданова А.А.* Управляемость линейных систем интегро-дифференциальных уравнений. // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2009, N1(60), С. 66-78.

[6] *Айсагалиев С.А., Белогуров А.П., Сартаев Т.М.* К проблеме управляемости и быстородействия процесса для параболического уравнения с ограниченным управлением. // Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2009, N1(60), С 57-65.

[7] *Айсагалиев С.А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений.// Дифференциальные уравнения. 1991, Т. 27, N9, С. 1475-1486.

[8] *Айсагалиев С.А., Айсагалиева С.С.* Конструктивный метод решения задачи управляемости для обыкновенных дифференциальных уравнений. // Дифференциальные уравнения. 1993, Т.29, N4, С. 555-567.

[9] *Айсагалиев С.А.* Управляемость и оптимальное управление нелинейных систе.// Изв. РАН. Сер. Теория систем управления, 1993. N3. С. 88-99.

[10] *Айсагалиев С.А.* Оптимальное управление линейными системами с закрепленными концами траектории и ограниченным управлением. // Дифференциальные уравнения. 1996, Т.32, N6, С. 1-7.