# К глобальной асимптотической устойчивости динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством

*С.А. Айсагалиев, Б.К. Абенов*

*Институт математики и механики КазНУ им.аль-Фараби,Алматы*

**Аннотация**

Предлагаются новые эффективные критерии глобальной асимптотической устойчивости динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством на основе оценки несобственных интегралов.

**Постановка задачи.**

В теории динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством исследуются свойства решений дифференциальных уравнений следующего вида

$$\dot{x} = Ax + B\varphi(\sigma), \;\; \dot{\sigma} = Cx + R\varphi(\sigma), \;\; x(0) = x_0, \sigma(0) = \sigma_0, \; t \in I = [0, \infty), \qquad (1)$$

$$\varphi(\sigma) \in \Phi_0 = \{\varphi(\sigma) \in C^1(R^1, R^1) | \mu_1 < \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma} < \mu_2, \varphi(\sigma) = \varphi(\sigma + \Delta), \forall\sigma, \sigma \in R^1\}, \qquad (2)$$

где $A, B, C, R$ — постоянные матрицы порядков $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$, $1{\times}1$ соответственно, $\Delta$ — период функции $\varphi(\sigma)$, $\mu_1$, $\mu_2$ — заданные числа, $Re\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1, n}$, $\lambda_j$ — собственные значения матрицы $A$.

Положение равновесия системы (1), (2) определяется из решения алгебраических уравнений $Ax_* + B\varphi(\sigma_*) = 0$, $Cx_* + R\varphi(\sigma_*) = 0$. Если величина $R - CA^{-1}B \neq 0$, то стационарное множество $\Lambda$ системы (1), (2) равно $\Lambda = \{(x_*, \sigma_*) \in R^{n+1} | x_* = 0, \varphi(\sigma_*) = 0\}$.

Стационарное множество $\Lambda$ системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво, если для любой функции $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ и любого начального состояния $(x_0, \sigma_0) \in R^{n+1}$, $|x_0| < \infty$, $|\sigma_0| < \infty$, решение системы $x(t) = x(t; 0, x_0, \sigma_0, \varphi)$, $\sigma(t) = \sigma(t; 0, x_0, \sigma_0, \varphi)$, $t \in I$ обладает свойством $x(t) \to x_* = 0$, $\sigma(t) \to \sigma_*$ при $t \to \infty$, где $\varphi(\sigma_*) = 0$.

Критерием глобальной асимптотической устойчивости системы (1), (2) называются соотношения, связывающие конструктивные параметры системы $(A, B, C, R, \mu_1, \mu_2)$, при выполнении которых стационарное множество $\Lambda$ глобально асимптотически устойчиво.

Рассматриваются, в отдельности, следующие два случая:

$$1. \;\; \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi) d\xi = 0, \forall\sigma, \sigma \in R^1; \;\; 2. \;\; \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi) d\xi \neq 0, \forall\sigma, \sigma \in R^1.$$

В работе решены следующие задачи:

**Задача 1.** Найти новый эффективный критерий глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества $\Lambda$ системы (1), (2) для случая, когда $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi) d\xi = 0$ для любого $\sigma, \sigma \in R^1$.

**Задача 2.** Найти новый эффективный критерий глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества $\Lambda$ системы (1), (2) для случая, когда $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi) d\xi = \alpha \neq 0$ для любого $\sigma, \sigma \in R^1$.

Нелокальному исследованию свойств решений таких систем посвящены работы [1-5]. Основы качественных и качественно-численных методов изложены в [1,2]. Исследование свойств решений системы (1), (2) путем построения периодической функции Ляпунова приведено в

[3]. В работах [4,5] получены частотные критерии глобальной асимптотической устойчивости и предложен метод сведения. Несмотря на то, что каждые последующие работы нацелены на улучшение результатов предыдущих работ, является актуальным разработка новых эффективных критериев глобальной асимптотической устойчивости.

В отличие от работ [1-5], другой подход к исследованию свойств решений системы (1), (2) предложен в работах [6-11]. Данная работа является продолжением этих научных исследований. В отличие от известных методов, критерии глобальной асимптотической устойчивости получены на основе оценки несобственных интегралов вдоль решения системы. Примечательно то, что известные результаты, приведенные в [1-5], следуют из новых критериев глобальной асимптотической устойчивости.

**Неособое преобразование.** Для формулировки основных результатов целесообразно исходную систему (1) путем неособого преобразования привести к специальному виду.

Пусть $\Delta(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda^1 + a_0$ — характеристический полином матрицы $A$. Как следует из теоремы Гамильтона-Кэли, $\Delta(A) = 0$. Тогда $A^n = = -a_{n-1}A^{n-1} - a_{n-2}A^{n-2} - \ldots - a_1 A - a_0 I_n$, где $I_n$ — единичная матрица порядка $n \times n$.

Справедлива следующая лемма.

**Лемма 1** . *Пусть постоянный вектор $\theta^* \in R^n$ такой, что*

$$\theta B = 0,\ \theta AB = 0, \ldots, \theta A^{n-2}B = 0, \theta A^{n-1}B \neq 0, \tag{3}$$

*где $(*)$ — знак транспонирования, $\theta$ — вектор-строка.*

*Тогда первое уравнение из (1) может быть представлено в виде*

$$\begin{aligned} &\dot{y}_1 = y_2, \dot{y}_2 = y_3, \ldots, \dot{y}_{n-1} = y_n, \\ &\dot{y}_n = -a_0 y_1 - a_1 y_2 - \ldots - a_{n-1}y_n + \theta A^{n-1}B\varphi(\sigma), \end{aligned} \tag{4}$$

*где $y_1 = \theta x$, $y_2 = \theta Ax$, $\ldots$, $y_n = \theta A^{n-1}x$, $x = x(t)$, $y_i = y_i(t), i = \overline{1,n}$.*

**Лемма 2** *Пусть выполнены условия леммы 1, и пусть, кроме того, ранг матрицы*

$$R = \|\theta^*, A^*\theta^*, \ldots, A^{*n-1}\theta^*\| \tag{5}$$

*порядка $n \times n$ равен $n$. Тогда:*

*1) существует вектор-строка $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1})$ такой, что*

$$\dot{\sigma} = \beta_0 y_1 + \beta_1 y_2 + \ldots + \beta_{n-1}y_n + R\varphi(\sigma); \tag{6}$$

*2) если $y_1 = \theta x = 0$, $y_2 = \theta Ax = 0, \ldots$, $y_n = \theta A^{n-1}x = 0$, то $x = 0$.*

Из лемм 1, 2 следует, что, если выполнены равенства (3) и ранг $R$=$n$, то система (1) равносильна системе (4), (6). Более того, из $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t)$=0, $i$=$\overline{1,n}$ следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} x(t)$=0.

**Свойства решений.** Представляет интерес исследование общего свойства решения системы (1), (2), а также систем (4), (6), (2).

**Теорема 1** . *Пусть матрица $A$ — гурвицева ,т.е. $Re\lambda_j(A) < 0$, $j = \overline{1,n}$, функция $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma + \Delta) \in \Phi_0$ и пусть, кроме того, выполнены равенства (3) и ранг $R = n$.*

*Тогда верны оценки*

$$|x(t)| \leq l_1, \ \ |\dot{x}(t)| \leq l_2, \ \ t \in I = [0, \infty), \tag{7}$$

$$|y_i(t)| \leq m_{i1}, \quad |\dot{y}_i(t)| \leq m_{i2}, i = \overline{1,n} \;\; t \in I, \tag{8}$$

$$|\dot{\sigma}(t)| \leq c_0, \;\; \forall t, t \in I, \tag{9}$$

*где $l_1 = const < \infty$, $l_2 = const < \infty$, $m_{i1} = const < \infty$, $m_{i2} = const < \infty$, $c_0 = const < \infty$. Кроме того, функции $x(t)$, $y_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $\sigma(t)$, $t \in I$ — равномерно непрерывны.*

**Теорема 2** . *Пусть выполнены условия лемм 1, 2. Тогда вдоль решения системы (4), (6) верны тождества*

$$\varphi(\sigma(t)) = \kappa^{-1}[\omega(t) + a_0 y_1(t) + a_1 y_2(t) + \ldots + a_{n-1} y_n(t)], t \in I, \tag{10}$$

$$\dot{\sigma}(t) = \delta_0 \omega(t) + \delta_1 y_1(t) + \delta_2 y_2(t) + \ldots + \delta_n y_n(t), t \in I, \tag{11}$$

$$\xi(t) = \frac{d\varphi(\sigma(t))}{dt} = \kappa^{-1}[\dot{\omega}(t) + a_0 y_2(t) + a_1 y_3(t) + \ldots + a_{n-1}\omega(t)], t \in I, \tag{12}$$

*где $\omega(t)$=$\dot{y}_n(t)$, $\dot{\omega}(t)$=$\ddot{y}_n(t)$, $t$∈$I$, $\delta_0 = R\kappa^{-1}$, $\kappa = \theta A^{n-1}B$, $\delta_j = \beta_{j-1} + R\kappa^{-1}a_{j-1}$, $j = \overline{1,n}$.*

**Несобственные интегралы.** На основе тождеств (10)-(12) и включения $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$ могут быть получены оценки несобственных интегралов вдоль решения системы (4), (6).

**Теорема 3** . *Пусть выполнены условия лемм 1,2, матрица $A$ — гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любой величины $\tau_1 > 0$ вдоль решения системы (4), (6) несобственный интеграл*

$$\begin{gathered} I_1 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\mu_1\dot{\sigma}(t) - \xi(t)]\tau_1[\xi(t) - \mu_2\dot{\sigma}(t)]dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [M_0\dot{\omega}^2(t) + M_1\omega^2(t) + \\ + M_2 y_1^2(t) + \ldots + M_{n+1}y_n^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt \geq 0, \end{gathered} \tag{13}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_1(t)\right]dt\right| = |\lim_{T\to\infty} F_1(T) - F_1(0)| < \infty. \tag{14}$$

**Теорема 4** *Пусть выполнены условия лемм 1,2, матрица $A$ — гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$. Тогда для любых величины $\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{n+1}$ вдоль решения системы (4), (6) несобственный интеграл*

$$\begin{gathered} I_2 = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\gamma_0\dot{\omega}(t) + \gamma_1\omega(t) + \sum_{i=1}^n \gamma_{i+1}y_i(t)]^2 dt = \lim_{T\to\infty}\int_0^T [\Gamma_0\dot{\omega}^2(t) + \Gamma_1\omega^2(t) + \\ + \Gamma_2 y_1^2(t) + \ldots + \Gamma_{n+1}y_n^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt \geq 0, \end{gathered} \tag{15}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int_0^T \left[\frac{d}{dt}F_2(t)\right]dt\right| = \left|\lim_{T\to\infty} F_2(T) - F_2(0)\right| < \infty. \tag{16}$$

Для случая, когда $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi = 0$, $\forall\sigma$, $\sigma \in R^1$ верна следующая теорема.

**Теорема 5** .*Пусть выполнены условия лемм 1,2, матрица $A$ — гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi = 0$. Тогда для любой величины $\tau_3$ вдоль решения (4), (6) несобственный интеграл*

$$
\begin{gathered}
I_3 = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \varphi(\sigma(t))\tau_3\dot{\sigma}(t)dt = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T [N_1\omega^2(t) + N_2y_1^2(t) + \ldots + N_{n+1}y_n^2(t)]dt+ \\
+ \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \left[\tfrac{d}{dt}F_3(t)\right] dt = \lim_{T\to\infty} \int\limits_{\sigma(0)}^{\sigma(T)} \varphi(\sigma(t))\tau_3 d\sigma < \infty,
\end{gathered}
\tag{17}
$$

$$
\left| \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_3(t)\right] dt \right| = \left| \lim_{T\to\infty} F_3(T) - F_3(0) \right| < \infty. \tag{18}
$$

Рассмотрим случай, когда $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi = \alpha \neq 0$. Пусть величина $\beta = \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} |\varphi(\sigma)|d\sigma$, где $\alpha, \beta$ — известные числа. Пусть величина $\nu = \dfrac{\alpha}{\beta}$.

**Теорема 6** . *Пусть выполнены условия лемм 1,2 , матрица $A$ — гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi = \alpha \neq 0$. Тогда для любых величин $\tau_4$, $\tau_5 > 0$ вдоль решения системы (4), (6) несобственный интеграл*

$$
\begin{gathered}
I_4 = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \left[\varphi(\sigma(t))\tau_4\dot{\sigma}(t) - \tfrac{\tau_4^2\nu^2}{4\tau_5}\varphi^2(\sigma(t)) - \tau_5\dot{\sigma}^2(t)\right] dt = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T [P_1\omega^2(t)+ \\
+P_2y_1^2(t) + \ldots + P_{n+1}y_n^2(t)]dt + \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \left[\tfrac{d}{dt}F_4(t)\right] dt \leq \\
\leq \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T [\varphi(\sigma(t)) - \nu|\varphi(\sigma(t))|]\tau_4\dot{\sigma}(t)dt < \infty,
\end{gathered}
\tag{19}
$$

$$
\begin{gathered}
\left| \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \left[\tfrac{d}{dt}F_4(t)\right] dt \right| = |\lim_{T\to\infty} F_4(T) - F_4(0)| < \infty, \\
\left| \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T [\varphi(\sigma(t)) - \nu|\varphi(\sigma(t))|]\tau_4\dot{\sigma}(t)dt \right| < \infty.
\end{gathered}
\tag{20}
$$

**Теорема 7** .*Пусть выполнены условия лемм 1,2, матрица $A$ — гурвицева, функция $\varphi(\sigma) \in \Phi_0$, $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi = \alpha \neq 0$. Тогда для любых величин $\delta_1 > 0$, $\delta_2$, $\delta_3$ вдоль решения системы (4), (5) несобственный интеграл*

$$
\begin{gathered}
I_5 = \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \left[-\delta_1\xi^2 - \frac{\delta_2^2}{\delta_1}\dot{\sigma}^2 - \frac{\delta_3^2\nu^2}{\delta_1}\varphi^2 - 2\delta_2\xi\dot{\sigma} + \frac{\delta_2\delta_3}{\delta_1}\varphi\dot{\sigma}\right] dt = \\
= \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T [L_0\dot{\omega}^2 + L_1\omega^2 + L_2y_1^2 + \ldots + L_{n+1}y_n^2]dt + \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \left[\frac{d}{dt}F_5(t)\right] dt \leq \\
\leq \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \left(-\frac{2\delta_3\nu}{\delta_1}\right)\xi|\varphi|dt + \lim_{T\to\infty} \int\limits_0^T \frac{\delta_2\delta_3}{\delta_1}[\varphi - \nu|\varphi|]\dot{\sigma}dt < \infty,
\end{gathered}
\tag{21}
$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\left(-\frac{2\delta_3\nu}{\delta_1}\right)\xi|\varphi|dt\right|<\infty,\left|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\frac{\delta_2\delta_3}{\delta_1}[\varphi-\nu|\varphi|]\dot{\sigma}dt\right|<\infty \tag{22}$$

**Теорема 8** *.Пусть выполнены условия лемм 1,2, матрица $A$ — гурвицева, функция $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$. Тогда для любых величин $h_0,h_1,h_2$, вдоль решения системы (4), (6) несобственный интеграл*

$$I_6=\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T[h_0\ddot{\sigma}(t)+h_1\dot{\sigma}(t)+h_2\varphi(\sigma(t))]^2dt=\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T[H_0\dot{\omega}^2(t)+H_1\omega^2(t)+$$
$$+H_2y_1^2(t)+\ldots+H_{n+1}y_n^2(t)]dt+\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\left[\frac{d}{dt}F_6(t)\right]dt\geq 0, \tag{23}$$

$$\left|\lim_{T\to\infty}\int\limits_0^T\left[\frac{d}{dt}F_6(t)\right]dt\right|=|\lim_{T\to\infty}F_6(T)-F_6(0)|<\infty. \tag{24}$$

**Глобальная асимптотическая устойчивость.** На основе результатов изложенных выше, могут быть сформулированы критерии глобальной асимптотической устойчивости стационарного множества $\Lambda$ системы (1), (2) для случаев

$$\text{а)}\int\limits_\sigma^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi=0;\quad \text{б)}\int\limits_\sigma^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi=\alpha\neq 0$$

в отдельности.

**Теорема 9** *.Пусть выполнены следующие условия:*

*1) матрица $A$ — гурвицева, $\varphi(\sigma)\in\Phi_0$, функция $\dfrac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma}$ — равномерно непрерывна для любого $\sigma$, $\sigma\in R^1$;*

*2) существует вектор $\theta^*\in R^n$ такой, что $\theta B=0$, $\theta AB=0$, $\ldots$, $\theta A^{n-2}B=0$, $\kappa=\theta A^{n-1}B\neq 0$;*

*3) ранг матрицы $R=\|\theta^*,A\theta^*,\ldots,A^{*n-1}\theta^*\|$ равен $n$;*

*4) $\int\limits_\sigma^{\sigma+\Delta}\varphi(\xi)d\xi=0$;*

*5) выполнены равенства $M_0+\Gamma_0=0, M_i+\Gamma_i=N_i, i=\overline{1,n+1}$;*

*Тогда стационарное множество $\Lambda$ системы (1), (2) глобально асимпотически устойчиво.*

Теперь рассмотрим случай, когда

$$\varphi(\sigma)\in\Phi_0=\{\varphi(\sigma)\in C^1(R^1,R^1)|\mu_1<\frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma}<\mu_2,\varphi(\sigma)=\varphi(\sigma+\Delta),\forall\sigma,\sigma\in R^1\}. \tag{25}$$

**Теорема 10** *. Пусть выполнены условия 1) - 4) теоремы 9, и пусть, кроме того, выполнены равенства*

$$M_0+H_0=0,\ \ M_i+H_i=N_i,\ i=\overline{1,n+1}. \tag{26}$$

*Тогда*

$$\lim_{T\to\infty}[h_0\ddot{\sigma}(t) + h_1\dot{\sigma} + h_2\varphi(\sigma(t))] = 0. \tag{27}$$

*Если, кроме того, решение системы второго порядка*

$$h_0\ddot{z} + h_1\dot{z} + h_2\varphi(z) = 0, t \in I \tag{28}$$

*глобально асимптотически устойчиво, то стационарное множество $\Lambda$ системы (1), (25) глобально асимптотически устойчиво.*

Теоремы 9-10 были сформулированы и доказаны для случая, когда $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi = 0$. Теперь рассмотрим случай, когда $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi = \alpha \neq 0$.

**Теорема 11** . *Пусть выполнены условия теоремы 6, и пусть, кроме того:*

*1.* $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi = \alpha \neq 0$, $\beta = \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} |\varphi(\xi)|d\xi$, $\nu = \dfrac{\alpha}{\beta}$, $\dfrac{d\varphi}{d\sigma}$*–равномерно непрерывна.*

*2. выполнены равенства* $M_0 + \Gamma_0 = 0, M_i + \Gamma_i = P_i, i = \overline{1, n+1}$.

*Тогда стационарное множество $\Lambda$ системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво.*

**Теорема 12** . *Пусть выполнены условия теоремы 7, и пусть, кроме того:*

*1.* $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi = \alpha \neq 0$, $\beta = \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} |\varphi(\xi)|d\xi$, $\nu = \dfrac{\alpha}{\beta}$, *функция* $\psi(\sigma) = \dfrac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma}$ *— равномерно непрерывна по $\sigma$, $\sigma \in R^1$;*

*2. выполнены равенства* $M_0 + H_0 = L_0, M_i + H_i = L_i, i = \overline{1, n+1}$.

*Тогда стационарное множество $\Lambda$ системы (1), (2) глобально асимптотически устойчиво.*

**Теорема 13** . *Пусть выполнены условия теоремы 8, и пусть, кроме того:*

*1.* $\int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} \varphi(\xi)d\xi = \alpha \neq 0$, $\beta = \int\limits_{\sigma}^{\sigma+\Delta} |\varphi(\xi)|d\xi$, $\nu = \frac{\alpha}{\beta}$, *функция* $\psi(\sigma) = \frac{d\varphi(\sigma)}{d\sigma}$*–равномерно непрерывна по $\sigma$, $\sigma \in R^1$;*

*2. выполнены равенства*

$$M_0 + H_0 = L_0, M_i + H_i = L_i, i = \overline{1, n+1}. \tag{29}$$

*Тогда* $\lim\limits_{T\to\infty}[h_0\ddot{\sigma}(t) + h_1\dot{\sigma}(t) + h_2\varphi(\sigma(t))] = 0$.

*Если, кроме того, решение системы второго порядка $h_0\ddot{z} + h_1\dot{z} + h_2\varphi(z) = 0, t \in I$ глобально асимптотически устойчиво, то стационарное множество $\Lambda$ системы (1), (25) глобально асимптотически устойчиво.*

**Замечание.** Теоремы 9, 11, 12 были доказаны для случая, когда $\mu_1 < \psi(\sigma) < \mu_2$, $\forall\sigma$, $\sigma \in R^1$, где $\psi(\sigma) = \frac{d\varphi}{d\sigma}$. Данные теоремы остаются верными и для случая $\mu_1 \le \psi(\sigma) \le \mu_2$, $\forall\sigma$, $\sigma \in R^1$, если многообразие $[\mu_1 - \psi(\sigma)][\psi(\sigma) - \mu_2] = 0$ не содержит целых траекторий, кроме точек стационарного множества $\Lambda$.

Отметим, что многообразие $[\mu_1 - \psi(\sigma)][\psi(\sigma) - \mu_2] = 0$ содержит целые траектории, если $[\mu_1 - \psi(\sigma(t))][\psi(\sigma(t)) - \mu_2] \equiv 0, \forall t, t \in [t_*, \infty)$, где $\sigma(t), t \in [t_*, \infty)$ — решение системы (1), (2).

Заметим, что если $\mu_1 \le \psi(\sigma) \le \mu_2, \forall\sigma, \sigma \in R^1$, то $[\mu_1 - \psi(\sigma)][\psi(\sigma) - \mu_2] \ge 0$, $\forall\sigma$, $\sigma \in R^1$. Произведение $0 \le [\mu_1\dot{\sigma}(t) - \xi(t)]\tau_1[\xi(t) - \mu_2\dot{\sigma}(t)] = \tau_1[\mu_1 - \psi(\sigma(t))][\psi(\sigma(t)) - \mu_2]\dot{\sigma}^2(t)$, $\tau_1 > 0, \forall t, t \in [t_*, \infty)$. Если многообразие $[\mu_1 - \psi(\sigma)][\psi(\sigma) - \mu_2] = 0$ не содержит целых траекторий, то из оценки $0 \le I_1 = \lim\limits_{T\to\infty}[\mu_1\dot{\sigma}(t) - \xi(t)]\tau_1[\xi(t) - \mu_2\dot{\sigma}(t)]dt < \infty$, следует, что $\dot{\sigma}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

В качестве примера рассмотрены уравнения движения системы фазовой автоподстройки частоты с пропорционально интегрирующим фильтром [12], решение которого подтвердило эффективность предлагаемого метода.

## Список литературы


[1] *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. -М.: Физматгиз, 1959.

[2] *Tricomi F.* Integrazione di unequazione differenziale presentatasi in electrotechnica.// Annali della Roma Schuola Normale Superiore de Pisa Scienza Physiche e Mathematiche, v.2, № 2, 1933.

[3] *Бакаев Ю.Н.* Оптимальный прием сигналов частотной модуляции в условиях эффекта Доплера.// Радиотехника и электроника, 1965, т. 10, № 1.

[4] *Леонов Г.А.* Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством.// Сибирский математический журнал, 1976, № 1.

[5] *Гелиг А.Х., Леонов Г.А., Якубович В.А.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия. -М.: Наука, 1978.

[6] *Айсагалиев С.А., Иманкул Т.Ш.* Теория фазовых систем. -Алматы: "Қазақ университеті 2005.

[7] *Айсагалиев С.А., Абенов Б.К., Иманкул Т.Ш.* Алгебраичесские критерии глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем.// Вестник КазНУ. Серия мтаематика, механика, информатика. - Алматы, 2002, № 7(35).

[8] *Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А.* К проблеме глобальной асимптотической устойчивости динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством.// Доклады НАН РК, 1999, № 3.

[9] *Айсагалиев С.А., Айпанов Ш.А.* К теории глобальной асимптотической устойчивости фазовых систем.// Дифференциальные уравнения, 1999, т.35, № 8.

[10] *Айсагалиев С.А.* К теории абослютной устойчивости регулируемых систем.// Дифференциальные уравнения, 1994, т.30, № 5.

[11] *Айсагалиев С.А.* Управляемость и оптимальное управление в нелинейных системах.// Известия РАН, серия Теория системы управления, 1993, № 3.

[12] *Белюстина Л.Н., Быков В.В., Кавелева К.Г., Шалфеев В.Д.* О величине полосы захвата системы ФАП с пропорционально интегрирующим фильтром.// Известия вузов, Радиофизика, 1970, т. 13, № 4.