О некоторых обратных задачах для уравнения теплопроводности дробного порядка

А.С. Бердышев[1], Б.Ж. Кадиркулов[2], Б.Х. Турметов[3]
[1] *КазНПУ им. Абая,* [2] *ТГИВ, Республика Узбекистан,* [3] *МКТУ им. Х. Ясави*
e-mail: berdyshev@mail.ru

Аннотация

Работа посвящена исследованию некоторых линейных обратных задач для уравнения диффузии дробного порядка, в которых вместе с решениями уравнения требуется найти и неизвестную правую часть.

Пусть $0 < \alpha$- некоторое действительное число. Для функции $\varphi(t)$ заданной на $(0,\ell)$, $\ell < \infty$ оператор интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля с началом в точке 0, определяется следующим образом [1,2]

$$D_{0t}^{\alpha}\varphi(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1}}, \ \ \alpha < 0 \\ \varphi(t), \ \alpha = 0 \\ \frac{d^n}{dt^n} D_{0t}^{\alpha-n}\varphi(t), \ \ n-1 < \alpha \le n, \ n \in N \end{cases}$$

Следующий оператор

$${}_C D_{0t}^{\alpha}\varphi(t) = D_{0t}^{\alpha-n}\varphi^{(n)}(t), \ \ n-1 < \alpha \le n, \ n \in N$$

называется оператором дробного дифференцирование в смысле Капуто [3].

Пусть $\alpha \in (0,1)$. В области $\Omega = (0,1) \times (0,1)$ для уравнение

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} u - u_{xx} = f(x) \tag{1}$$

рассмотрим следующую задачу

Задача DN1.Требуется найти функции $u(x,t)$, $f(x)$, связанные в области Ω уравне-нием (1), если для функции $u(x,t)$ на границах области Ω заданы условия

$$u(0,t) = u(1,t), u_x(0,t) = u_x(1,t), t \in [0,\ 1] \tag{2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u(x,1) = \psi(x), x \in [0,\ 1] \tag{3}$$

Отметим, что в данной постановке $f(x)$-неизвестная правая часть уравнения (1), а (2) являются нелокальными граничными условиями.

Задачи для дифференциальных уравнений дробного порядка с операторами дробного дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля или Капуто рассматривались в работах различных авторов. Наиболее полную библиографию по этим вопросам можно найти в работах [1-3].В работе [6] задача DN1 изучена для уравнения диффузии (случай $\alpha = 1$). По аналогии с этой работой в настоящей работе изучаются некоторые линейные обратные задачи для уравнения диффузии дробного порядка.

Определение. Регулярным решением задачи DN1 называется пара функций $u(x,t)$ и $f(x)$, такие, что $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$, $f(x) \in C^1[0,1]$, ${}_C D_{ot}^{\alpha}\left({}_C D_{0t}^{\alpha} u\right)$, ${}_C D_{0t}^{\alpha}(u_{xx}) \in C(\overline{\Omega})$, удовлетворяющую уравнению (1) в области Ω и условиям (2) и (3).

Метод исследования данной обратной задачи основан на исключении функции f(x) из уравнения (1) с помощью дробного дифференцирования по времени и переходе к задаче для уравнения диффузии дробного порядка, содержащий только одну неизвестную функцию [6].

Основным результатом настоящей работы является

Теорема 1. Пусть $\varphi(x), \psi(x) \in C^3\,[0,1]$ и удовлетворяют условиям $\varphi(0) = \varphi(1), \psi(0) = \psi(1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1), \psi'(0) = \psi'(1)$. Тогда задача DN1 имеет единственное регулярное решение.

Доказательство. Обозначим $v(x,t) = {}_C D_{ot}^{\alpha} u$. Действуя оператором ${}_C D_{ot}^{\alpha}$ обеим частям равенств (1) и (2), учитывая также граничные условия (3) относительно неизвестной функции $v(x,t)$ получаем следующую нелокальную задачу :

$$ {}_C D_{ot}^{\alpha} v - v_{xx} = 0, (x,t) \in \Omega \tag{4}$$

$$ v(0,t) = v(1,t), v_x(0,t) = v_x(1,t), t \in [0,1], \tag{5}$$

$$ v(x,0) = \varphi''(x) + f(x), v(x,1) = \psi''(x) + f(x), x \in [0,1] \tag{6}$$

Для получения решение рассматриваемой задачи мы будем использовать метод разделения переменных. Решение задачи будем искать в виде произведения

$$ v(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{7}$$

Отсюда следует, что функции X(x) и T(t) должны удовлетворять дифференциальным уравнениям

$$ X''(x) - \lambda\, X(x) = 0, \tag{8}$$

$$ {}_C D_{0t}^{\alpha} T(t) - \lambda\, T(t) = 0. \tag{9}$$

где λ постоянная разделения. Поскольку функция (7) должна удовлетворят краевым условиям (2), то получаем

$$ X(0) = X(1), X'(0) = X'(1). \tag{10}$$

Известно [6], что задача (8),(10) имеет решение вида $X_0(x) = C_0$, при $\lambda = 0$ и решение вида

$$ X_n(x) = C_n^1 \cos \mu_n x + C_n^2 \sin \mu_n x$$

при $\lambda_n = -\mu_n^2 = -(2\pi n)^2, n \in N$

Собственным значениям λ_n соответствуют следующие решения дифференциального уравнения (9) (см.[5])

$$ T_n(t) = E_{\alpha,1}(-4\pi^2 n^2 t^{\alpha}).$$

Здесь $E_{\alpha,1}(z)$- известная функция Миттаг-Леффлера, которая имеет вид [4]

$$ E_{\alpha,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha\, k + 1)}$$

Функции $v_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$ по построению удовлетворяют уравнению (4) в области Ω и граничным условиям (5). То же самое справедливо для суммы ряда

$$ v(x,t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^1 E_{\alpha,1}(-4\pi^2 n^2 t^{\alpha}) \cos 2\pi n x + \sum_{n=1}^{\infty} C_n^2 E_{\alpha,1}(-4\pi^2 n^2 t^{\alpha}) \sin 2\pi n x, \tag{11}$$

где C_0, C_n^1, C_n^2 - постоянные, требующие определения.

Для нахождения неизвестных коэффициентов C_0, C_n^1, C_n^2 и функции f(x) воспользуемся условиям (6).

Тогда используя (11) имеем

$$C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^1\cos 2\pi nx+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2\sin 2\pi nx-\varphi''(x)=$$

$$C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^1E_{\alpha,1}(-4\pi^2n^2)\cos 2\pi nx+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2E_{\alpha,1}(-4\pi^2n^2)\sin 2\pi nx-\psi''(x).$$

Из условия теоремы следует, что функцию $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ можно разложить в ряд вида

$$\varphi''(x)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n^1\cos 2\pi nx+\sum_{n=1}^{\infty}A_n^2\sin 2\pi nx,$$

$$\psi''(x)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}B_n^1\cos 2\pi nx+\sum_{n=1}^{\infty}B_n^2\sin 2\pi nx,$$

где

$$A_0=\int\limits_0^1\varphi''(x)dx, A_n^1=2\int\limits_0^1\varphi''(x)\cos 2\pi nxdx, A_n^2=2\int\limits_0^1\varphi''(x)\sin 2\pi nxdx,$$

$$B_0=\int\limits_0^1\psi''(x)dx, B_n^1=2\int\limits_0^1\psi''(x)\cos 2\pi nxdx, B_n^2=2\int\limits_0^1\psi''(x)\sin 2\pi nxdx.$$

Тогда для определения C_0, C_n^1, C_n^2 получим условию

$$A_0=B_0,\quad C_n^1-A_n^1=C_n^1E_{\alpha,1}(-4\pi^2n^2)-B_n^1,$$

$$C_n^2-A_n^2=C_n^2E_{\alpha,1}(-4\pi^2n^2)-B_n^2$$

Откуда находим выражения для неизвестных коэффициентов и правой части f(x) заданного уравнения

$$C_n^1=\frac{A_n^1-B_n^1}{1-E_{\alpha,1}(-4\pi^2n^2)}; C_n^2=\frac{A_n^2-B_n^2}{1-E_{\alpha,1}(-4\pi^2n^2)}; n\in N, \tag{12}$$

$$f(x)=v(x,0)-\varphi''(x)=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^1\cos 2\pi nx+\sum_{n=1}^{\infty}C_n^2\sin 2\pi nx-\varphi''(x), \tag{13}$$

где C_0 - пока произвольная постоянная.

Вернемся к функции $u(x,t)$. Учитывая равенство $v(x,t)={}_CD_{ot}^{\alpha}u$ для функции $u(x,t)$ получим равенство

$$u(x,t)=D_{0t}^{-\alpha}v(x,t)+u(x,0)$$

Тогда

$$u(x,t)=\frac{C_0}{\Gamma(\alpha+1)}t^{\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n^1}{4\pi^2n^2}\left(1-E_{\alpha,1}(-4\pi^2n^2t^{\alpha})\right)\cos 2\pi nx+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n^2}{4\pi^2n^2}\left(1-E_{\alpha,1}(-4\pi^2n^2t^{\alpha})\right)\sin 2\pi nx+\varphi(x). \tag{14}$$

Для нахождения коэффициента C_0 воспользуемся вторым условием (3):

$$\frac{C_0}{\Gamma(\alpha+1)} = \psi(x) - \varphi(x) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^1 - B_n^1}{4\pi^2 n^2} \cos 2\pi nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2 - B_n^2}{4\pi^2 n^2} \sin 2\pi nx$$

Отсюда

$$C_0 = \Gamma(\alpha+1) \int_0^1 [\psi(x) - \varphi(x)]\, dx. \tag{15}$$

Таким образом, решение задачи определяется по формулам (14), где коэффициенты C_0, C_n^1, C_n^2 находятся по формулам (12) и (15) единственным образом.

Теперь покажем, что пара функций $(u(x,t), f(x))$, определяемые как суммы рядов (13) и (14) будет регулярным решением задачи DN1.

Сначала покажем, что $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$. Используя следующую оценку

$$|E_{\alpha,1}(z)| \le \frac{M}{1+z}, \arg(z) = \pi, M > 0$$

функции Миттаг-Леффлера [4], из формулы (14) получим

$$|u(x,t)| \le \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} |C_0| + M \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{4\pi^2 n^2} \left|C_n^1\right| + \left|C_n^2\right| \right] + |\varphi(x)|$$

Учитывая известное (см.[4]) асимптотическое разложение функции типа Миттаг-Леффлера

$$E_{\alpha,\mu}(z) = -\sum_{k=0}^{p} \frac{z^{-k}}{\Gamma(\mu - k/\alpha)} + O(z^{-p-1})$$

при $\arg(z) = \pi$, из (12) несложно получить, что $\left|C_n^i\right| \le C \left[\left|A_n^i\right| + \left|B_n^i\right|\right], C > 0, i = 1, 2.$

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4\pi^2 n^2} \left[\left|C_n^1\right| + \left|C_n^2\right|\right]$ сходится и следовательно, функция u(x,t) является непрерывной функцией в области $\overline{\Omega}$.

Аналогично можно показать, что $f(x) \in C[0,1]$, ${}_C D_{ot}^{\alpha} \left({}_C D_{ot}^{\alpha} u\right)$, ${}_C D_{ot}^{\alpha}(u_{xx}) \in C(\overline{\Omega})$.

Теорема доказана.

Аналогично, как выше возможно постановка и решение следующих задач.

Задача DN2. Требуется найти функции $u(x,t)$, $f(x)$, связанные в области Ω уравнением (1), если для функции $u(x,t)$ на границах области Ω заданы условия

$$u(0,t) = 0, u(1,t) = 0, t \in [0,\ 1] \tag{16}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), u(x,1) = \psi(x), x \in [0,\ 1] \tag{17}$$

Теорема 2. Если функции $\varphi(x), \psi(x) \in C^3\,[0,\ 1]$, удовлетворяют условиям

$$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(1) = \psi(1) = 0,$$

$$\varphi''(0) = \psi''(0) = \varphi''(1) = \psi''(1) = 0$$

то существует единственное решение задачи (1), (16), (17) и оно определяется по формулам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n E_{\alpha,1}(-\pi^2 n^2)}{1 - E_{\alpha,1}(\pi^2 n^2)} \sin \pi nx - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{E_{\alpha,1}(\pi^2 n^2) - 1} \sin \pi nx,$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{C_n}{\pi^2n^2}\left(1-E_{\alpha,1}(\pi^2n^2t^\alpha)\right)\sin\pi nx+\varphi(x),$$

где

$$A_n=2\int\limits_0^1\varphi''(x)\sin\pi nxdx, B_n=2\int\limits_0^1\psi''(x)\sin\pi nxdx, C_n=\frac{A_n-B_n}{1-E_{\alpha,1}(-\pi^2n^2)}, n\in N.$$

Задача DN3. Требуется найти функции $u(x,t)$, $f(x)$, связанные в области Ω уравнением (1), если для функции $u(x,t)$ на границах области Ω заданы условия

$$u(0,t)=0, u_x(0,t)=u_x(1,t), t\in[0,\ 1],$$

$$u(x,0)=\varphi(x), u(x,1)=\psi(x), x\in[0,1]$$

Теорема 3. Пусть функции $\varphi(x),\psi(x)\in C^3\left[0,\ 1\right]$, удовлетворяют условиям

$$\varphi(0)=\psi(0)=0, \varphi'(0)=\varphi'(1), \psi'(0)=\psi'(1).$$

Тогда задача DN3 имеет единственное решение и оно определяется по формулам

$$f(x)=C_0x+\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k-1}x\cos2\pi kx+\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k}\sin2\pi kx-\varphi''(x),$$

$$u(x,t)=\varphi(x)+\frac{C_0}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha x+\sum_{k=1}^{\infty}C_{2k-1}D_{0t}^{-\alpha}(d_k(t))x\cos2\pi kx+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[C_{2k}D_{0t}^{-\alpha}(d_k(t))+C_{2k-1}D_{0t}^{-\alpha}(e_k(t))\right]\sin2\pi kx,$$

где

$$C_0=2\Gamma(\alpha+1)\int\limits_0^1\left[\psi(x)-\varphi(x)\right]dx$$

$$C_{2k-1}=\frac{A_{2k-1}-B_{2k-1}}{1-d_k(1)}, C_{2k}=\frac{A_{2k}-B_{2k}}{1-d_k(1)}-\frac{e_k(1)}{(1-d_k(1))^2}(A_{2k-1}-B_{2k-1}), k\in N,$$

$$A_0=2\int\limits_0^1\varphi''(x)dx, A_{2k-1}=4\int\limits_0^1\varphi''(x)\cos2\pi kxdx, A_{2k}=4\int\limits_0^1\varphi''(x)(1-x)\sin2\pi kxdx,$$

$$B_0=2\int\limits_0^1\psi''(x)dx, B_{2k-1}=4\int\limits_0^1\psi''(x)\cos2\pi kxdx, B_{2k}=4\int\limits_0^1\psi''(x)(1-x)\sin2\pi kxdx,$$

$$d_k=E_{\alpha,1}(-2\pi kt^\alpha), e_k(t)=-4\pi k\cdot\int\limits_0^t s^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-2\pi ks^\alpha)E_{\alpha,1}(-2\pi k(t-s)^\alpha)ds.$$

Список литературы

[1] *Самко С.Г., Кильбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложение. Минск, Наука и техника. 1987. - 688 с.

[2] *Нахушев А.М.* Элементы дробного исчисления и их приложения. Нальчик. 2000. -298 с.

[3] *Псху А.В.* Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка. Нальчик. 2005.

[4] *Джрбашян М.М.* Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области.-М.,1966.- 672 с.

[5] *Кадиркулов Б.Ж., Турметов Б.Х.* Об одном обобщении уравнении теплопроводности. // Uzbek Mathematical Journal. 2006. №3. pp. 40-45.

[6] *Калиев И.А., Первушина М.М.* Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности. Сборник научных трудов международной конференции "Информационные технологии и обратные задачи рационального природопользования"г. Ханты-Мансийск. 2005, с.51-55.