Об одном подходе к исследованию линейной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений с нагружениями

Д.С. Джумабаев, К.И. Усманов
Институт математики МОН РК, Алматы, Казахстан
e-mail: anar@math.kz, dzhumabaev@list.ru

Аннотация

Получены необходимые и достаточные условия однозначной разрешимости линейной двухточечной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений с нагружениями, где оба конца отрезка являются точками нагружения.

Рассматривается линейная двухточечная краевая задача для интегро-дифференциальных уравнений с нагружениями

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + \int_0^T K(t,s)x(s)ds + \sum_{j=0}^{m} K_j(t)x(\theta_j) + f(t), \quad t \in [0,T], \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$Bx(0) + Cx(T) = d, \quad d \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

где $0 = \theta_0 < \theta_1 < \ldots < \theta_{m-1} < \theta_m = T$, $(n\times n)$-матрицы $A(t)$, $K_j(t)$ и n-вектор-функция $f(t)$ непрерывны на $[0,T]$, $(n \times n)$-матрицы $K(t,s)$ непрерывна на $[0,T]\times[0,T]$, $\|x\| = \max\limits_{i=1:n} |x_i|$, $\|A(t)\| = \max\limits_{i=1:n} \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}(t)|$.

Через $C([0,T],\mathbb{R}^n)$ обозначим пространство непрерывных функций $x : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} \|x(t)\|$.

В [1] предложен метод исследования и решения краевых задач для систем интегро-дифференциальных уравнений, основанный на методе параметризации [2].

В [3] этот метод применен к задаче (1), (2), когда точка $t = T$ не является точкой нагружения.

В настоящей работе задача (1), (2) исследуется в случае когда оба конца отрезка $[0,T]$ являются точками нагружения. Здесь, при применении метода параметризации, появляются трудности, связанные с нахождением представления $x(T)$ через введенные параметры.

Для преодоления этих трудностей предлагается следующая конструкция метода параметризации.

По выбранному числу $\ell \in \mathbb{N}$ произведем разбиение $[0,T) = \bigcup\limits_{r=1}^{(m+1)\ell} [t_{r-1}, t_r)$, где $t_0 = \theta_0 = 0$, $t_r = t_{r-1} + \dfrac{\theta_i - \theta_{i-1}}{\ell}$, когда $r = ((i-1)\ell+1) : (i\ell)$, $i = 1 : m$.

Обозначим через $x_r(t)$ сужение функции $x(t)$ на r-ый интервал $[t_{r-1}, t_r)$, $r = 1 : m\ell$ и, рассмотрим эквивалентную многоточечную краевую задачу

$$\frac{dx_r}{dt} = A(t)x_r + \sum_{i=1}^{m\ell} \int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t,s)x_i(s)ds + \sum_{j=0}^{m-1} K_j(t)x_{j\ell+1}(t_{j\ell}) +$$
$$+ K_m(t) \lim_{t\to T-0} x_{m\ell}(t) + f(t), \quad t \in [t_{r-1}, t_r), \quad r = 1 : m\ell, \tag{3}$$

$$Bx_1(0) + C \lim_{t\to T-0} x_{m\ell}(t) = d, \tag{4}$$

$$\lim_{t\to t_s-0} x_s(t) = x_{s+1}(t_s), \quad s = 1:(m\ell-1), \tag{5}$$

где (5) – условия склеивания решения во внутренних точках разбиения $[0,T]$.

Через $C([0,T],t_r,\mathbb{R}^{nm\ell})$ обозначим пространство систем функций $x[t]=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_{m\ell}(t))$ с нормой $\|x[\cdot]\|_2 = \max\limits_{r=1:m\ell} \sup\limits_{t\in[t_{r-1},t_r)} \|x_r(t)\|$, где функция $x_r:[t_{r-1},t_r)\to\mathbb{R}^n$ непрерывна на $[t_{r-1},t_r)$ и имеет конечный предел $\lim\limits_{t\to t_r-0} x_r(t)$, $r=1:m\ell$.

Решением задачи (3)-(5) является система функций $x[t]=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_{m\ell}(t)) \in \in C([0,T],t_r,\mathbb{R}^{nm\ell})$ с непрерывно дифференцируемыми на $[t_{r-1},t_r)$ функциями $x_r(t)$, удовлетворяющих системе интегро-дифференциальных уравнений с нагружениями (3) и условиям (4), (5).

Введем обозначение $\lambda_r \hat{=} x_r(t_{r-1})$ и на каждом интервале $[t_{r-1},t_r)$ произведем замену функции $u_r(t)=x_r(t)-\lambda_r$, $r=1:m\ell$. Введя еще один дополнительный параметр $\lambda_{m\ell+1} \hat{=} \lim\limits_{t\to T-0} x_{m\ell}(t)$, от задачи (3)-(5) перейдем к эквивалентной краевой задаче с параметрами

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(\lambda_r+u_r) + \sum_{i=1}^{m\ell}\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(t,s)(\lambda_i+u_i(s))ds +$$
$$+\sum_{j=0}^{m} K_j(t)\lambda_{j\ell+1} + f(t), \quad t\in[t_{r-1},t_r), \quad r=1:m\ell, \tag{6}$$

$$u_r(t_{r-1}) = 0, \quad r=1:m\ell, \tag{7}$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_{m\ell+1} = d, \quad d\in\mathbb{R}^n, \tag{8}$$

$$\lambda_r + \lim_{t\to t_r-0} u_r(t) = \lambda_{r+1}, \quad r=1:m\ell. \tag{9}$$

Решением задачи (6)-(9) является пара $(\tilde\lambda,\tilde u[t])$ с элементами $\tilde\lambda=(\tilde\lambda_1,\tilde\lambda_2,\ldots,\tilde\lambda_{m\ell},\tilde\lambda_{m\ell+1}) \in \in \mathbb{R}^{n(m\ell+1)}$, $\tilde u[t]=(\tilde u_1(t),\tilde u_2(t),\ldots,\tilde u_{m\ell}(t))\in C([0,T],t_r,\mathbb{R}^{nm\ell})$. Если $x^*(t)$ – решение задачи (1), (2), то пара $(\lambda^*,u^*[t])$ с элементами $\lambda^*=(\lambda_1^*,\lambda_2^*,\ldots,\lambda_{m\ell}^*,\lambda_{m\ell+1}^*)$, $\lambda_r^*=x^*(t_{r-1})$, $r=1:m\ell$, $\lambda_{m\ell+1}^*=x^*(T)$, $u^*[t]=(u_1^*(t),u_2^*(t),\ldots,u_{m\ell}^*(t))$, $u_r^*(t)=x^*(t)-x^*(t_{r-1})$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=1:m\ell$, будет решением задачи (6)-(9). И, наоборот, если пара $(\tilde\lambda,\tilde u[t])$ – решение задачи (6)-(9), то функция $\tilde x(t)$, определяемая равенствами $\tilde x(t)=\tilde\lambda_r+\tilde u_r(t)$, $t\in[t_{r-1},t_r)$, $r=1:m\ell$, $\tilde x(T)=\tilde\lambda_{m\ell+1}$, удовлетворяет системе интегро-дифференциальных уравнений с нагружениями (1) и краевым условиям (2).

Отметим, что, в отличие от случая из [3], в этой конструкции метода параметризации размерности введенных дополнительных параметров λ и системы функций $u[t]$ различны.

Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dfrac{dx}{dt}=A(t)x$ на отрезке $[0,T]$. Тогда при фиксированных значениях параметров специальная задача Коши (6), (7) для интегро-дифференциальных уравнений эквивалентна системе интегральных уравнений

$$u_r(t) = X(t)\int_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\lambda_r +$$
$$+ X(t)\int_{t_{r-1}}^{t}\sum_{i=1}^{m\ell}\int_{t_{i-1}}^{t_i} X^{-1}(\tau)K(\tau,s)\big(u_i(s)+\lambda_i\big)dsd\tau +$$
$$+ X(t)\int_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)\sum_{j=0}^{m}K_j(\tau)d\tau\lambda_{j\ell+1} + X(t)\int_{t_{r-1}}^{t} X^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau, \quad (10)$$

В (10) предполагая $t=\tau$, умножив обе части на $K(t,\tau)$, интегрируя по τ на $[t_{r-1},t_r)$ и складывая правые и левые части, получим

$$\sum_{r=1}^{m\ell}\int_{t_{r-1}}^{t_r}K(t,\tau)u_r(\tau)d\tau = \sum_{r=1}^{m\ell}\int_{t_{r-1}}^{t_r}K(t,\tau)X(\tau)\int_{t_{r-1}}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{m\ell}\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(\tau_1,s)u_i(s)dsd\tau_1 d\tau + \sum_{r=1}^{m\ell}\int_{t_{r-1}}^{t_r}K(t,\tau)X(\tau)\int_{t_{r-1}}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)\Big\{A(\tau_1)\lambda_r +$$
$$+\sum_{i=1}^{m\ell}\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(\tau_1,s)ds\lambda_i + \sum_{j=0}^{m}K_j(\tau_1)\lambda_{j\ell+1} + f(\tau_1)\Big\}d\tau_1 d\tau, \quad t\in[0,T]. \quad (11)$$

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned}
\Phi_\ell(t) &= \sum_{r=1}^{m\ell}\int_{t_{r-1}}^{t_r}K(t,s)u_r s(s)ds,\\
M_r(\ell,t) &= \int_{t_{r-1}}^{t_r}K(t,\tau)X(\tau)\int_{t_{r-1}}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)A(\tau_1)d\tau_1 d\tau +\\
&\quad +\sum_{i=1}^{m\ell}\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(t,\tau)X(\tau)\int_{t_{i-1}}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)\int_{t_{r-1}}^{t_r}K(\tau_1,s)dsd\tau_1 d\tau,\\
P_j(\ell,t) &= \sum_{r=1}^{m\ell}\int_{t_{r-1}}^{t_r}K(t,\tau)X(\tau)\int_{t_{r-1}}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)K_j(\tau_1)d\tau_1 d\tau,\\
F(\ell,t) &= \sum_{i=1}^{m\ell}\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(t,\tau)X(\tau)\int_{t_{i-1}}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)f(\tau_1)d\tau_1 d\tau,
\end{aligned}$$

и уравнение (11) запишем в виде

$$\Phi_\ell(t) = \sum_{i=1}^{m\ell}\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(t,\tau)X(\tau)\int_{t_{i-1}}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)\Phi_\ell(\tau_1)d\tau_1 d\tau +$$
$$+\sum_{r=1}^{m\ell}M_r(\ell,t)\lambda_r + \sum_{j=0}^{m}P_j(\ell,t)\lambda_{j\ell+1} + F(\ell,t). \quad (12)$$

Выберем число $\ell_0 \in \mathbb{N}$ удовлетворяющим неравенству $q(\ell_0) \equiv \beta T\tilde{h}\dfrac{1}{\ell_0}e^{\alpha\tilde{h}/\ell_0} < 1$, где $\beta =$

$\max\limits_{(t,\tau)\in[0,T]\times[0,T]}\|K(t,\tau)\|$, $\tilde h=\max\limits_{i=1:m}(\theta_i-\theta_{i-1})$, $\alpha=\max\limits_{t\in[0,T]}\|A(t)\|$. Тогда в силу оценки

$$\Big\|\sum_{i=1}^{m\ell}\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(t,\tau)X(\tau)\int_{t_{i-1}}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)\Phi_\ell(\tau_1)d\tau_1d\tau\Big\|\leqslant\beta T\frac{\tilde h}{\ell}e^{\alpha\tilde h/\ell}\max_{t\in[0,T]}\|\Phi_\ell(t)\|,\quad t\in[0,T],$$

для любого натурального числа $\ell\geqslant\ell_0$ уравнение (12) имеет единственное решение. Далее мы будем предполагать, что $\ell\geqslant\ell_0$ и равенствами

$$\begin{aligned}
M_r^{(0)}(\ell,t) &= M_r(\ell,t),\\
M_r^{(k)}(\ell,t) &= \sum_{i=1}^{m\ell}\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(t,\tau)X(\tau)\int_{t_{i-1}}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)M_r^{(k-1)}(\ell,\tau_1)d\tau_1d\tau,\quad k=1,2,...,\\
P_j^{(0)}(\ell,t) &= P_j(\ell,t),\\
P_j^{(k)}(\ell,t) &= \sum_{i=1}^{m\ell}\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(t,\tau)X(\tau)\int_{t_{i-1}}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)P_j^{(k-1)}(\ell,\tau_1)d\tau_1d\tau,\quad k=1,2,...,\\
F^{(0)}(\ell,t) &= F(\ell,t),\\
F^{(k)}(\ell,t) &= \sum_{i=1}^{m\ell}\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(t,\tau)X(\tau)\int_{t_{i-1}}^{\tau}X^{-1}(\tau_1)F^{(k-1)}(\ell,\tau_1)d\tau_1d\tau,\quad k=1,2,...,
\end{aligned}$$

определим последовательности матриц и векторов, зависящих от $t\in[0,T]$.

Применяя метод последовательных приближений, единственное решение уравнения (12) найдем в виде

$$\Phi_\ell(t)=\sum_{r=1}^{m\ell}D_r(\ell,t)\lambda_r+\sum_{j=0}^{m}G_j(\ell,t)\lambda_{j\ell+1}+F_\ell(t),\tag{13}$$

где $D_r(\ell,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}M_r^{(k)}(\ell,t)$, $G_j(\ell,t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}P_j^{(k)}(\ell,t)$, $F_\ell(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}F^{(k)}(\ell,t)$.

Подставим (13) в правую часть (10) и получим следующее представление функции $u_r(t)$ через параметры

$$\begin{aligned}
u_r(t)=X(t)\int_{t_{r-1}}^{t}X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\lambda_r+\sum_{i=1}^{m\ell}X(t)\int_{t_{r-1}}^{t}X^{-1}(\tau_1)\Big(D_i(\ell,\tau)+\\
+\int_{t_{i-1}}^{t_i}K(\tau_1,s)ds\Big)d\tau\lambda_i+\sum_{j=0}^{m}X(t)\int_{t_{r-1}}^{t}X^{-1}(\tau)\big(G_j(\ell,\tau)+K_j(\tau)\big)d\tau\lambda_{j\ell+1}+\\
+X(t)\int_{t_{r-1}}^{t}X^{-1}(\tau)\big(f(\tau)+F_\ell(\tau)\big)d\tau.
\end{aligned}\tag{14}$$

Переходя в обоих частях (14) к пределу при $t\to t_r-0$, $r=1:(m\ell+1)$, и, подставляя выражения, соответствующие $\lim\limits_{t\to t_r-0}u_r(t)$ в (9), а также, умножая обе части (8) на $h_m=(\theta_m-\theta_{m-1})/\ell$, получим систему линейных уравнений относительно введенных параметров λ_r, $r=1:(m\ell+1)$,

$$h_m\big(B\lambda_1+C\lambda_{m\ell+1}\big)=h_md,\tag{15}$$

$$\Big(I + X(t_r)\int_{t_{r-1}}^{t_r} X^{-1}(\tau)A(\tau)d\tau\Big)\lambda_r + \sum_{i=1}^{m\ell} X(t_r)\int_{t_{r-1}}^{t_r} X^{-1}(\tau)\Big(D_i(\ell,\tau)+$$
$$+\int_{t_{i-1}}^{t_i} K(\tau,s)ds\Big)d\tau\lambda_i + \sum_{j=0}^{m} X(t_r)\int_{t_{r-1}}^{t_r} X^{-1}(\tau)\big(G_j(\ell,\tau)+K_j(\tau)\big)d\tau\lambda_{j\ell+1}-$$
$$-\lambda_{r+1} = -X(t_r)\int_{t_{r-1}}^{t_r} X^{-1}(\tau)\big(f(\tau)+F_\ell(\tau)\big)d\tau, \quad r = 1 : m\ell. \quad (16)$$

Матрицу размерности $(m\ell+1)n \times (m\ell+1)n$, соответствующую левой части системы линейных уравнений (15), (16), обозначим через $Q_{*,*}(\ell)$ и эту систему запишем в виде

$$Q_{*,*}(\ell)\lambda = -F_{*,*}(\ell), \quad \lambda \in \mathbb{R}^{n(m\ell+1)}, \quad (17)$$

где $F_{*,*}(\ell) = \Big(-h_m d, X(t_1)\int_{t_0}^{t_1} X^{-1}(\tau)(f(\tau)+F_\ell(\tau))d\tau, \ldots, X(t_{m\ell-1})\int_{t_{m\ell-2}}^{t_{m\ell-1}} X^{-1}(\tau)(f(\tau)+$ $+F_\ell(\tau))d\tau, X(T)\int_{t_{m\ell-1}}^{T} X^{-1}(\tau)(f(\tau)+F_\ell(\tau))d\tau\Big).$

Система уравнений (17) обладает следующим свойством.

Лемма 1 *Пусть $\ell \geqslant \ell_0$. Тогда справедливы утверждения:*

а) вектор $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_{m\ell+1}^*) \in \mathbb{R}^{n(m\ell+1)}$, составленный из значений решения задачи (1), (2) – функции $x^*(t)$ в точках разбиения отрезка $\lambda_r^* = x^*(t_{r-1})$, $r = 1 : (m\ell+1)$, удовлетворяет системе уравнений (17);

б) функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_t)$, $r = 1 : m\ell$, $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_{m\ell+1}$, где $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \ldots, \tilde{\lambda}_{m\ell+1}) \in \mathbb{R}^{n(m\ell+1)}$ – решение системы уравнений (17), система функций $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \ldots, \tilde{u}_{m\ell}(t))$ – решение специальной задачи Коши (6), (7) при $\lambda_r = \hat{\lambda}_r$, $r = 1 : (m\ell+1)$, будет решением задачи (1), (2).

Справедливость этого утверждения устанавливается аналогично доказательству леммы 1 из [4, с. 34] с учетом специфики интегро-дифференциальных уравнений с нагружениями.

Определение 1 *Задача (1), (2) называется однозначно разрешимой, если для любой пары $(f(t), d)$, где $f(t) \in C([0,T], \mathbb{R}^n)$, $d \in \mathbb{R}^n$, она имеет единственное решение.*

Теорема 1 *Для однозначной разрешимости задачи (1), (2) необходимо, чтобы матрица $Q_{*,*}(\ell)$ была обратимой для всех $\ell \geqslant \ell_0$ и достаточно, чтобы она была обратимой при некотором $\ell \geqslant \ell_0$.*

Доказательство. Необходимость. Рассмотрим однородную краевую задачу (1), (2) с $f(t) = 0$, $d = 0$. Для этой задачи система уравнений (17) имеет вид

$$Q_{*,*}(\ell)\lambda = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}^{n(m\ell+1)}. \quad (18)$$

Предположим, что при некотором $\tilde{\ell} \geqslant \ell_0$ матрица $Q_{*,*}(\tilde{\ell})$ не имеет обратную. Тогда однородная система линейных уравнений (18) при $\ell = \tilde{\ell}$ имеет ненулевое решение $\tilde{\lambda} = (\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, ..., \tilde{\lambda}_{m\tilde{\ell}+1}) \in R^{n(m\tilde{\ell}+1)}$.

Рассмотрим систему интегральных уравнений (10) при $f(t) = 0$, $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r$, $r = 1 : (m\tilde{\ell}+1)$. Так как $\tilde{\ell} \geqslant \ell_0$, то эта система имеет единственное решение $\tilde{u}[t] = (\tilde{u}_1(t), \tilde{u}_2(t), \ldots, \tilde{u}_{m\ell}(t))$, которое является решением специальной задачи Коши (6), (7) при $f(t) = 0$, $\lambda_r = \tilde{\lambda}_r$, $r =$

$1 : (m\tilde{\ell} + 1)$. Согласно лемме 1 функция $\tilde{x}(t)$, определяемая равенствами $\tilde{x}(t) = \tilde{\lambda}_r + \tilde{u}_r(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = 1 : m\tilde{\ell}$, $\tilde{x}(T) = \tilde{\lambda}_{m\tilde{\ell}+1}$ будет ненулевым решением однородной краевой задачи (1), (2). Это противоречит однозначной разрешимости задачи (1), (2), так как однородная задача имеет так же и нулевое решение.

Достаточность. Пусть матрица $Q_{*,*}(\ell^*)$ обратима при некотором $\ell^* \geqslant \ell_0$. Для любой пары $(f(t), d)$, $f(t) \in C([0, T], \mathbb{R}^n)$, $d \in \mathbb{R}^n$, составим систему $n(m\ell^* + 1)$ линейных уравнений относительно параметров (17). Отсюда, используя обратимость матрицы $Q_{*,*}(\ell^*)$, найдем значение $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_{m\ell^*+1}^*)$. Решая систему интегральных уравнений (10) при найденном λ^* определим систему функций $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t), \ldots, u_{m\ell}^*(t))$. Тогда функция $x^*(t)$, определяемая равенствами $x^*(t) = \lambda_r^* + u_r^*(t)$, $t \in [t_{r-1}, t_r)$, $r = 1 : m\ell^*$, $x^*(T) = \lambda_{m\ell^*+1}^*$, будет решением задачи (1), (2).

Единственность решения доказывается методом от противного. Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Джумабаев Д.С. Критерий однозначной разрешимости линейной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений // Математический журнал. 2008. Т. 8. №2 (28). С. 44-48.*

[2] *Джумабаев Д.С. Признаки однозначной разрешимости линейной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1989. Т. 29, №1. С. 50-66.*

[3] *Усманов К.И. Об однозначной разрешимости линейной краевой задачи для систем интегро-дифференциальных уравнений с нагружениями // Математический журнал. 2009. Т. 9. №4 (34). С. 90-95.*

[4] *Джумабаев Д.С., Иманчиев А.Е. Корректная разрешимость линейной многоточечной краевой задачи // Математический журнал. 2005. Т. 5. №1 (15). С. 30-38.*