Об одной эллиптической системе дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярной линией и точкой на плоскости

Д.С. Жусупова, А.Б. Тунгатаров
ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, АО "Финансовая академия"
e-mail: zhus_dinara@mail.ru, tun-mat@list.ru

Аннотация

В работе получено многообразие непрерывных решений одной эллиптической системы дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярной линией и точкой на плоскости и решена задача типа Робина для нее в бесконечно угловой области свободного раствора.

Пусть $0 < \varphi_1 \leq 2\pi$ и $G = \{z = x + iy = re^{i\varphi} : 0 \leq r < \infty, 0 \leq \varphi \leq \varphi_1\}$. Рассмотрим в области G уравнение

$$U_{z\overline{z}} + \frac{\alpha(\varphi)}{2r}(U_z - U_{\overline{z}}) + \frac{\beta(\varphi)\overline{U}}{4(x-y)^{\lambda}r^{2-\lambda}} = \frac{f(\varphi)r^{\nu+\lambda-2}}{4(x-y)^{\lambda}}, \qquad (1)$$

где $\alpha(\varphi), \beta(\varphi), f(\varphi) \in C[0, \varphi_1]; \nu \geq 2, 0 < \lambda < 1$ -действительные числа, причем $\beta(\varphi) \neq 0$ для всех $\varphi \in [0, \varphi_1]$;

$$U_z = \frac{1}{2}\left(U_x + iU_y\right), U_{\overline{z}} = \frac{1}{2}\left(U_x - iU_y\right), U_{z\overline{z}} = (U_z)_{\overline{z}} \qquad (2)$$

Насколько нам известно, уравнения одновременно с сингулярной линией и точкой вида (1) ранее не были рассмотрены. Частные виды этого уравнения встречаются в задачах математической физики и дифференциальной геометрии. А.Бицадзе получено общее решение уравнения (1) и решена задача Дирихле для этого уравнения при $\alpha(\varphi) \equiv \beta(\varphi) \equiv f(\varphi) \equiv 0$ [1]. При $\lambda = 0$ уравнение (1) становится уравнением только с сингулярной точкой. Уравнение второго порядка с сингулярной точкой изучено в [2].
Решения уравнения (1) ищем в классе функций

$$W_p{}^2(G) \bigcap C(G), p \geq 1, \qquad (3)$$

где $W_p{}^2(G)$-пространство С.Л.Соболева [3].

Дифференциальные операторы (2) в полярных координатах записываются в виде [4]:

$$U_z = \frac{e^{-i\varphi}}{2}\left(U_r - \frac{i}{r}U_\varphi\right), U_{\overline{z}} = \frac{e^{i\varphi}}{2}\left(U_r + \frac{i}{r}U_\varphi\right), U_{z\overline{z}} = \frac{1}{4}\left(U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\varphi\varphi}\right) \qquad (4)$$

Применяя формулы (4), уравнение (1) записываем в полярных координатах:

$$Urr + \frac{1}{r}(1 - 2i\sin\varphi \cdot \alpha(\varphi))U_r - \frac{2i}{r^2}cos\varphi \cdot \alpha(\varphi)U_\varphi =$$

$$= \frac{f(\varphi)}{(\cos\varphi - \sin\varphi)^{\lambda}}r^{\nu-2} - \frac{\beta(\varphi)\overline{U_\varphi}}{r^2(\cos\varphi - \sin\varphi)^{\lambda}} \qquad (5)$$

Решения уравнения (5) из класса (3) будем искать в виде

$$U(r,\varphi) = r^{\nu}\psi(\varphi), \tag{6}$$

где $\psi(\varphi)$ - новая неизвестная функция из класса $C^2[0,\varphi_1]$.
Подставив функцию, заданную формулой (6), в уравнение (5), получим

$$\psi'' - 2\alpha(\varphi) i\cos\varphi\cdot\psi' + (\nu^2 - 2\nu i\alpha(\varphi)\sin\varphi)\psi =$$
$$= \frac{f(\varphi)}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^{\lambda}} - \frac{\beta(\varphi)}{(\cos\varphi-\sin\varphi)^{\lambda}}\overline{\psi} \tag{7}$$

Пусть $\psi_1(\varphi),\psi_2(\varphi)$ - фундаментальная система решений уравнения (7) при $\beta(\varphi)\equiv f(\varphi)\equiv 0$. Такая фундаментальная система решений существует в силу того, что коэффициенты уравнения (7) при $\beta(\varphi)\equiv f(\varphi)\equiv 0$ непрерывны в $[0,\varphi_1]$.
Применяя метод вариации постоянных, уравнение (7) приводим к интегральному уравнению

$$\psi(\varphi) = (B\psi)(\varphi) + c_1 J_0(\varphi) + c_2 I_0(\varphi) + F_0(\varphi), \tag{8}$$

где

$$J_0(\varphi) = \psi_1(\varphi), I_0(\varphi) = \psi_2(\varphi), (B\psi)(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} b(\varphi,\gamma)\overline{\psi(\gamma)}d\gamma, F_0(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} g(\varphi,\gamma)d\gamma,$$

$$b(\varphi,\gamma) = \frac{\beta(\gamma)(\psi_1(\varphi)\psi_2(\gamma)-\psi_1(\gamma)\psi_2(\varphi))}{(\cos\gamma-\sin\gamma)^{\lambda}\Delta(\gamma)}, g(\varphi,\gamma) = -\frac{f(\gamma)}{\beta(\gamma)}b(\varphi,\gamma),$$
$$\Delta(\varphi) = \psi_1(\varphi)\psi_2'(\varphi) - \psi_1'(\varphi)\psi_2(\varphi).$$

$\Delta(\varphi)\neq 0$ в $[0,\varphi_1]$ как вронскиан фундаментальной системы решений уравнения (7) при $\beta(\varphi)\equiv f(\varphi)\equiv 0$.
Из условий $0<\lambda<1, \Delta(\varphi)\neq 0$ вытекает, что несобственные интегралы, определяющие функции $(B\psi)(\varphi)$ и $F_0(\varphi)$, сходятся.
Далее используем следующие функции и операторы:

$$\begin{aligned}
&\left(B^0\varphi\right)(\varphi) = \psi(\varphi), \left(B^1\varphi\right)(\varphi) = (B\psi)(\varphi), \left(B^k\varphi\right)(\varphi) = \left(B^{k-1}\psi\right)(\varphi),\\
&J_k(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} b(\varphi,\gamma)\overline{J_{k-1}(\gamma)}d\gamma, I_k(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} b(\varphi,\gamma)\overline{I_{k-1}(\gamma)}d\gamma,\\
&F_k(\varphi) = \int\limits_0^{\varphi} b(\varphi,\gamma)\overline{F_{k-1}(\gamma)}d\gamma (k=\overline{1,\infty}).
\end{aligned}$$

Действуя оператором B на равенство (8), получаем новое выражение для $(B\psi)(\varphi)$, которое обратно подставляем в (8):

$$\psi(\varphi) = \left(B^2\psi\right)(\varphi) + c_1 J_0(\varphi) + \overline{c}_1 J_1(\varphi) + c_2 I_0(\varphi) + \overline{c}_2 I_1(\varphi) + F_0(\varphi) + F_1(\varphi) \tag{9}$$

Опять действуя оператором B на равенство (9), получим другое новое выражение для $(B\psi)(\varphi)$, которое снова подставляем в (8):

$$\psi(\varphi) = \left(B^3\psi\right)(\varphi) + c_1\left(J_0(\varphi)+J_2(\varphi)\right) + \overline{c}_1 J_1(\varphi) + c_2\left(I_0(\varphi)+I_2(\varphi)\right) + \overline{c}_2 I_1(\varphi) +$$

$$+F_0(\varphi) + F_1(\varphi) + F_2(\varphi).$$

Повторяя этот процесс *2n-1* раз, имеем интегральное представление для $\psi(\varphi)$

$$\psi(\varphi) = \left(B^{2n}\psi\right)(\varphi) + c_1 \sum_{k=0}^{n} J_{2k}(\varphi) + \bar{c}_1 \sum_{k=1}^{n} J_{2k-1}(\varphi) + c_2 \sum_{k=0}^{n} I_{2k}(\varphi) +$$

$$+\bar{c}_2 \sum_{k=1}^{n} I_{2k-1}(\varphi) + \sum_{k=0}^{2n-1} F_k(\varphi) \tag{10}$$

Имеют место следующие легко проверяемые оценки:

$$|\left(B^k\psi\right)(\varphi)| \le |\psi|_0 \cdot \frac{(|b|_1 \cdot \varphi)^k}{k!}, |J_k(\varphi)| \le |\psi_1|_0 \cdot \frac{(|b|_1 \cdot \varphi)^k}{k!},$$

$$|I_k(\varphi)| \le |\psi_2|_0 \cdot \frac{(|b|_1 \cdot \varphi)^k}{k!}, |F_k(\varphi)| \le |g|_1 \cdot \frac{(|b|_1 \cdot \varphi)^k}{k!} \cdot \varphi, \tag{11}$$

где

$$|b|_1 = \max_{0\le\varphi,\gamma\le\varphi_1} |b(\varphi,\gamma)|, |g|_1 = \max_{0\le\varphi,\gamma\le\varphi_1} |g(\varphi,\gamma)|, |\psi|_0 = \max_{0\le\varphi\le\varphi_1} |\psi(\varphi)|.$$

Переходя к пределу в (10) при $n \to \infty$, при этом используя оценки (11), получим

$$\psi(\varphi) = c_1 P_2(\varphi) + \bar{c}_1 P_1(\varphi) + c_2 Q_2(\varphi) + \bar{c}_2 Q_1(\varphi) + F(\varphi), \tag{12}$$

где

$$P_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(\varphi), P_2(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(\varphi), Q_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k-1}(\varphi),$$

$$Q_2(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k}(\varphi), F(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(\varphi).$$

Используя неравенства (11), оценим функции $P_1(\varphi), P_2(\varphi), Q_1(\varphi), Q_2(\varphi), F(\varphi)$:

$$|P_1(\varphi)| \le |\psi_1|_0 \operatorname{sh}(|b|_1 \cdot \varphi), |P_2(\varphi)| \le |\psi_1|_0 \operatorname{ch}(|b|_1 \cdot \varphi),$$

$$|Q_1(\varphi)| \le |\psi_2|_0 \operatorname{ch}(|b|_1 \cdot \varphi), |Q_2(\varphi)| \le |\psi_2|_0 \operatorname{sh}(|b|_1 \cdot \varphi),$$

$$|F(\varphi)| \le |g|_1 \exp\left(|b|_1 \cdot \varphi\right) \cdot \varphi.$$

Из формул (6) и (12) следует

$$U(r,\varphi) = r^\nu \left(c_1 P_2(\varphi) + \bar{c}_1 P_1(\varphi) + c_2 Q_2(\varphi) + \bar{c}_2 Q_1(\varphi) + F(\varphi)\right) \tag{13}$$

Используя свойства функций $P_1(\varphi), P_2(\varphi), Q_1(\varphi), Q_2(\varphi), F(\varphi)$, можно показать, что функция $U(r,\varphi)$,определяемая по формуле (13), принадлежит классу (3) и удовлетворяет уравнению (1). Следовательно имеет место

Теорема 1 *Уравнение* (1) *имеет многообразие решений из класса* (3), *которое определяется по формуле* (13).

Теперь рассмотрим краевую задачу типа Робина для уравнения (1).

Задача R *Найти решение уравнения (1) в классе (3), удовлетворяющее граничным условиям*

$$U(r,0) = \alpha_1 r^{\nu}, U'_{\varphi}(r,0) = \alpha_2 r^{\nu}, \tag{14}$$

где α_1, α_2*-действительные числа.*

Решение задачи Для решения задачи используем формулу (13). Имеем

$$P_1(0) = Q_1(0) = F(0) = 0, P_2(0) = \psi_1(0), Q_2(0) = \psi_2(0),$$

$$P'_1(0) = Q'_1(0) = F'(0) = 0, P'_2(0) = \psi'_1(0), Q'_2(0) = \psi'_2(0) \tag{15}$$

Если подставим (13) в (14), то с учетом (15) получим

$$c_1\psi_1(0) + c_2\psi_2(0) = \alpha_1, \quad c_1\psi'_1(0) + c_2\psi'_2(0) = \alpha_2.$$

Так как $\Delta(0) \neq 0$, то решение этой системы существует и определяется по формуле

$$c_1 = \frac{\alpha_1 \cdot \psi'_2(0) - \alpha_2 \cdot \psi_2(0)}{\Delta(0)}, c_2 = \frac{\alpha_2 \cdot \psi_1(0) - \alpha_1 \cdot \psi'_1(0)}{\Delta(0)}$$

Полученные значения c_1 и c_2 подставляем в (13):

$$U(r,\varphi) = \frac{r^{\nu}}{\Delta(0)} \Big(\left(\alpha_1 \cdot \psi'_2(0) - \alpha_2 \cdot \psi_2(0)\right) P_2(\varphi) + \Big(\alpha_1 \cdot \overline{\psi'_2(0)} - \alpha_2 \cdot \overline{\psi_2(0)}\Big) P_1(\varphi) +$$

$$+ \left(\alpha_2 \cdot \psi_1(0) - \alpha_1 \cdot \psi'_1(0)\right) Q_2(\varphi) + \Big(\alpha_2 \cdot \overline{\psi_1(0)} - \alpha_1 \cdot \overline{\psi'_1(0)}\Big) Q_1(\varphi) + F(\varphi) \Big) \tag{16}$$

Таким образом справедлива

Теорема 2 *Задача R имеет единственное решение в виде (6), которое определяется по формуле (16).*

Список литературы

[1] *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. - М.: Наука, 1981. - 448с.

[2] *Тунгатаров А.Б., Алтынбек С.А.* Задача Дирихле для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка типа Фукса. // Вестник ЕНУ им.Л.Н.Гумилева, серия естественно-технических наук, 2006, №6(52). - С. 21-28.

[3] *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. - М. : ГИФМЛ, 1959. - 616с.

[4] *Алтынбек С.А.* Об одной неоднородной линейной системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка типа Фукса на плоскости. // Евразийский математический журнал, 2006, № 2. - С. 10-22.