Общие методы покомпонентной асимптотической эквивалентности разностно-динамических систем (РДС)

С.С. Сламжанова
Жетысуский государственный университет им. И.Жансугурова, Талдыкорган,
e-mail: Beksultan.82@mail.ru

Аннотация

В предлагаемой работе исследуется асимптотическая эквивалентность разностно-динамических систем (РДС) при некоторых ограничениях. Эквивалентности с этими ограничениями были названы покомпонентной асимптотической эквивалентностью. Получены результаты по разбиению совокупности РДС на классы эквивалентности покомпонентным свойствам, в которых поведение решений в бесконечности, в некотором смысле, однородно. Полученный результат является аналогом работы В.В.Немыцкого, который носит название эквивалентность по Немыцкому для систем дифференциальных уравнений. Из этой работы следует, как частный случай, асимптотическая эквивалентность по Ляпунову, по Левинсону, по Брауеру.

Классификация разностно-динамических систем на основе асимптотических свойств решений всегда занимает центральное место в задачах качественной теории РДС [1,2,3]. В общем случае эта задача (как в дифференциальных системах [4,5]) укладывается в следующую схему. Рассматривается некоторая совокупность РДС, где решения определены и некоторая группа преобразований, которая индуцирует отношение эквивалентности. Цели классификаций – получение всей совокупности инвариантов группы преобразований и распределение всех РДС по классам эквивалентности. Если в качестве совокупности РДС будем брать линейные однородные РДС, тогда важнейшей группой допустимых преобразований является группа преобразований Ляпунова [1,6]. Если к ней добавить задачу о вычислении инвариантов и их устойчивости, то эта совокупность совместно с методами решения составляет суть первого метода Ляпунова [5].

В [7] исследовалась асимптотическая эквивалентность РДС при некоторых ограничениях и была названа "покомпонентной асимптотической эквивалентностью". В предлагаемой работе продолжается исследование задачи, поставленной в [7]. А именно совокупность РДС разбивается на классы эквивалентности покомпонентным свойствам, в которых поведение решений в бесконечности, в некотором смысле, однородно. Этот вопрос для обыкновенных дифференциальных уравнений в свое время был рассмотрен Немыцким (в последствии получило название асимптотическая эквивалентность по Немыцкому). Нами доказано, что такое разбиение возможно и для РДС. Можно отметить, что из полученных результатов следует аналог эквивалентности Брауера, Ляпунова и Левинсона [4, 5, 8].

Рассмотрим РДС

$$x_{n+1} = A(n)\,x_n + f(n, x_n)\,, \tag{1}$$

$$y_{n+1} = A(n)\,y_n, \tag{2}$$

где $A(n)$: $N_{n_0} \to R^l$ – непрерывные отображения, $f \in C(D)$.

$$\|f\,(n, x_n)\| \le \lambda\left(n,\, |x_{i_1,n}|,\, ...,\, |x_{i_q,n}|\right) \le \psi\,(n)\,\|x_{i_q,n}\|, \tag{3}$$

здесь $x_{i_1 n}, \ldots, x_{i_q n}$ – компоненты вектора x, $1 \le i_1 \le ... \le i_q$, $x_q = colon\left(x_{i_1 n}, \ldots, x_{i_q n}\right)$, $x_{i_q n} \in R^q$. $\|\,\|$ – евклидова норма.

$\lambda : N_{n_0} \times R_+^q \to N \cup \{0\}$ $R_+^q = \left\{(\varphi_1, ..., \varphi_q) : \varphi_i \ge 0,\ \ i = \overline{1, q}\right\}$,

$\lambda\,(n, \varphi_1, ..., \varphi_q) \le \lambda\,(n, \overline{\varphi_1}, ..., \overline{\varphi_q})$ при $\varphi_i \le \overline{\varphi_i}$ $\left(i = \overline{1, q}\right)$ и $\forall n \in N_{n_0}$, $\psi : D_1 \to N$, $D_1 = N_{n_0}$, $\psi \in C\,(D_1)$. $Y(n)$ – фундаментальная матрица РДС-ы (2). $Y(n_0) = E$ и $Y\,(n) = (Y_{i\,j}(n))$ $Y^{-1} = (Y^{j\,i}\,(n))$.

Рассмотрим множества

$$L = \{1, 2, ..., l\},\ \ B \subseteq L,\ \ L_0 \subseteq M \subseteq L,\ \ M = L \backslash B \quad L_0 \ne \emptyset \tag{4}$$

Пусть функции $\mu_i : N_{n_0} \to Z_+ = L \cup \{0\}$ $m_i : N_{n_0} \to Z_+$ удовлетворяют неравенствам

$$\mu_i\,(n) \ge \max_{j \in L_0} |y_{ij}\,(n)|,\quad n \in N_{n_0},\quad i = i_1, ..., i_q, \tag{5}$$

$$m_i\,(n) \ge \max\left\{\max_{i \in M}\left(y_{ij}\,(n)\right), \mu_i\,(n)\right\},\ \ n \in N_{n_0},\ \ i = i_1, ..., i_q \tag{6}$$

и Q – гладкое многообразие, принадлежащее пространству R^l.

Укажем достаточные условия по компонентной слабой асимптотической эквивалентности РДС (1) и (2) относительно $\mu_i(n)$ при $n \to \infty$ на многообразии Q.

Многообразие Q**.** Будем считать, что Q – гладкое многообразие пространства R^l, обладающее следующим свойством: если $x_n \in Q$, то $x_j = 0$ при $j \notin M$, где $x_n = colon\,(x_1, x_2, ..., x_l)$.

Основные условия. Все решения РДС (2) (n, n_0, γ), $\gamma \in Q$ существуют при любом $n_0 \ge N_{n_0}$ и $n \ge N_{n_0}$. Для любой точки $\gamma_n = colon\left(\gamma_{h_1}, \gamma_{n_2}, ..., \gamma_{n_q}\right)$, $\gamma_n \in Q$, и любого положительного C, $C > \sum\limits_{k \in M} |\gamma_k|$, рассмотрим множество $\left(0,\ C - \sum\limits_{k \in M} |\gamma_k|\right)$. Тогда, если $\delta \in \left(0,\ C - \sum\limits_{k \in M} |\gamma_k|\right)$то при достаточно большом n_0 выполняются неравенства

$$\sum_{k \in M \cap L_0} \sum_{s = n_1}^{+\infty} \left|y^{jk}\,(s)\right| \lambda\,(s, Cm\,(s)) \le \frac{\delta}{3l} \tag{7}$$

$$\sum_{s = n}^{+\infty} \left|\sum_{k \in M \backslash L_0} y_{ik}\,(n)\, y^{jk}\,(s)\right| \lambda\,(s, Cm\,(s)) \le \frac{\delta}{3l} \mu_i\,(n) \tag{8}$$

$$\sum_{s = n_1}^{n} \left|\sum_{k \in B} y_{ik}\,(n)\, y^{jk}\,(s)\right| \lambda\,(s, Cm\,(s)) \le \frac{\delta}{3l} \mu_i\,(n) \tag{9}$$

$n_0 \le n \le +\infty$, $j \in L$, $m(s) = \left(m_{l_1}(s), ..., m_{i_q}(s)\right)$

Отображение P**.** Будем считать, что $i_1 = 1$, $i_2 = 2, ..., i_q = q$. Пусть

$$\Omega = \left\{\varphi : \varphi \in C\big(N_{n_0}, R^l\big), |\varphi_i(n)| \le C_1 m_i(n), i = \overline{1, q}, |\varphi_i\,(n)| \le C_2 P_i\,(n)\,, i = \overline{q + 1, l}, n \ge n_0\right\},$$

(10)

где C – фиксированное положительное число, C_1 и C_2 - произвольные положительные числа:

$$P_i(n) = C\sum_{j\in M}|y_{ij}(n)| + \sum_{s=n_1}^{n}\left|\sum_{\substack{j\in L\\ k\in B}} y_{ik}(n)\,y^{jk}(s)\right|\lambda(s, Cm(s)) +$$

$$+\sum_{s=n}^{+\infty}\left|\sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y_{ik}(n)\,y^{jk}(s)\right|\lambda(s, Cm(s)), \quad i=\overline{q+1,l}$$

Допустим, что

$$\|\varphi\|_\Omega = \max\begin{cases} \max\limits_i \sup\limits_{n\ge n_0} \frac{|\varphi_i(n)|}{m_i(n)}, & i=\overline{1,q} \\ \max\limits_i \sup\limits_{n\ge n_0} \frac{|\varphi_i(n)|}{P_i(n)}, & i=\overline{q+1,l} \end{cases} \tag{11}$$

Определив естественным образом операции линейного пространства на множестве Ω, получим банахово пространство.

Пусть $C_1 = C$, $C_2 = 1$. Тогда получим подмножество $S \subset \Omega$. Подберем число δ так, чтобы выполнялось неравенство

$$0 < \delta < C - \sum_{k\in M}|\gamma_k|,$$

где γ_k- действительные числа, являющиеся координатами точки $\gamma \in Q$ и $\sum\limits_{k\in M}|\gamma_k| < C$. На S определим оператор L следующим образом:

$$\begin{aligned}(L\varphi(n))_i &= \sum_{k\in M} y_{ik}(n)\,\gamma_k + \sum_{s=n_1}^{n}\sum_{\substack{j\in L\\ k\in B}} y_{ik}(n)\,y^{jk}(s)\,f_j(s,\varphi(s)) - \\ &- \sum_{s=n}^{+\infty}\sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y_{ik}(n)\,y^{jk}(s)\,f_j(s,\varphi(s)).\end{aligned} \tag{12}$$

Предположим, $Q = \{(x_1,...,x_n) : \, x_j = 0, \, j \notin M\}$ и выполняется дополнительное условие

$$\sum_{s=n_1}^{+\infty}\left|\sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y^{jk}(s)\right|\psi(s)\|m(s)\| < R < +\infty, \tag{13}$$

где $\|m\,(s)\| = \sup\limits_i m_i\,(s)$, $i = i_1, ...i_q$.

Асимптотическая эквивалентность по Немыцкому.

Теорема 1. Пусть выполняются основные условия и условие (13). Тогда оператор L на шаре S имеет единственную неподвижную точку, если:

а) существует функция $\psi :\ D_1 \to R'_+,\ \ \psi \in C(D)$ такая, что

$$|f_j\,(n,\,\varphi_1) - f_j\,(n,\,\varphi_2)| \le \psi\,(n)\left|\varphi_{1_p} - \varphi_{2_p}\right|,\quad j = \overline{1,\,l},\quad 1 \le p \le l,\ \ \forall \varphi_1,\ \ \varphi_2 \in R^n;$$

б)
$$\frac{1}{m_i(n)}\left[\sum_{s=n_1}^{n}\left|\sum_{\substack{j \in L\\ k \in B}} y_{ik}(n) y^{jk}(s)\right|\psi(s) m_i(s) + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=n}^{+\infty}\left|\sum_{\substack{j \in L\\ k \in M}} y_{ik}(n) y^{jk}(s)\right|\psi(s) m_i(s) + \right] \le r < 1,\ \ i = \overline{1,q},$$

в)
$$\frac{1}{p_i(n)}\left[\sum_{s=n_1}^{n}\left|\sum_{\substack{j \in L\\ k \in B}} y_{ik}(n) y^{jk}(s)\right|\psi(s) p_i(s) + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=n}^{+\infty}\left|\sum_{\substack{j \in L\\ k \in M}} y_{ik}\,(n)\, y^{jk}\,(s)\right|\psi(s) p_i(s) + \right] \le r < 1,\ \ i = \overline{q+1,\,l}$$

Доказательство. Так как справедливо неравенства

$$\frac{\left|(L\varphi_1)_i - (L\varphi_2)_i\right|}{m_i(s)} \le \frac{1}{m_i(s)}\left[\sum_{s=n_1}^{n}\left|\sum_{\substack{j \in L\\ k \in B}} y_{ik}(n) y^{jk}(s)\right|\left|f_j\,(s, \varphi_1) - f_j\,(s, \varphi_2)\right| + \right.$$
$$\left. + \sum_{s=n}^{+\infty}\left|\sum_{\substack{j \in L\\ k \in M}} y_{ik}(n) y^{jk}(s)\right|\left|f_j\,(s, \varphi_1) - f_j\,(s, \varphi_2)\right|\right] \le$$

$$\leq \frac{1}{m_i(s)}\left[\sum_{s=n_1}^{n}\left|\sum_{\substack{j\in L\\ k\in B}} y_{ik}(n)y^{jk}(s)\right|\psi(s)\frac{\left|\psi_{1_p}(s)-\psi_{2_p}(s)\right|}{m_i(s)}m_i(s)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=n}^{+\infty}\left|\sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y_{ik}(n)y^{jk}(s)\right|\psi(s)\frac{\left|\psi_{1_p}(s)-\psi_{2_p}(s)\right|}{m_i(s)}m_i(s)\right], \quad i=\overline{1,\,q},$$

$$\frac{\left|(L\varphi_1)_i-(L\varphi_2)_i\right|}{p_i(s)}\leq \frac{1}{p_i(s)}\left[\sum_{s=n_1}^{n}\left|\sum_{\substack{j\in L\\ k\in B}} y_{ik}(n)y^{jk}(s)\right|\left|f_j\left(s,\varphi_1\right)-f_j\left(s,\varphi_2\right)\right|+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=n}^{+\infty}\left|\sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y_{ik}(n)y^{jk}(s)\right|\left|f_j\left(s,\varphi_1\right)-f_j\left(s,\varphi_2\right)\right|\right]\leq$$

$$\leq \frac{1}{p_i(s)}\left[\sum_{s=n_1}^{n}\left|\sum_{\substack{j\in L\\ k\in B}} y_{ik}(n)y^{jk}(s)\right|\psi(s)\frac{\left|\psi_{1_p}(s)-\psi_{2_p}(s)\right|}{p_i(s)}p_i(s)+\right.$$

$$\left.+\sum_{s=n}^{+\infty}\left|\sum_{\substack{j\in L\\ k\in M}} y_{ik}(n)y^{jk}(s)\right|\psi(s)\frac{\left|\psi_{1_p}(s)-\psi_{2_p}(s)\right|}{p_i(s)}p_i(s)\right], \quad i=\overline{q+1,\,l}.$$

То

$$\|L\varphi_1-L\varphi_2\|_{\Omega}\leq r\|\varphi_1-\varphi_2\|_{\Omega}, \quad 0<r<1. \tag{14}$$

Следовательно, оператор L на шаре S имеет единственную неподвижную точку, так как L – оператор сжатия. Теорема доказана.

Из теоремы 5 [7] при условиях теоремы 1 вытекает покомпонентная асимптотическая эквивалентность (слабая асимптотическая эквивалентность) по Левинсону относительно функций $\mu_i(n)$, $i=i_1,...,i_q$ при $n\to\infty$ на многообразии Q.

Сейчас мы рассмотрим теорему 1, когда условие a) имеет вид

a^*) $|f_j(n,\varphi_1) - f_j(n,\varphi_2)| \le \psi(n)\,|\varphi_{1_1} - \varphi_{2_1}|$, $j = \overline{1,l}$.

Теорема 2. Пусть выполняются условие теоремы 1, где условие а) заменено условием a^*) и

$$\sum_{s=n_1}^{+\infty} \left|y^{jk}(s)\right| \psi(s) < +\infty, \quad j \in L, \ k \in M, \tag{15}$$

$$\overline{\mu}_1(s) \ge \max_{j\in L}\{|y_{1j}(s)|\},$$

$$\sum_{s=n_1}^{+\infty} \left|y^{jp}(s)\right| \overline{\mu}_1(s)\,\psi(s) < +\infty, \quad j \in L, \ p \in L. \tag{16}$$

Тогда РДС (1) и (2) покомпонентно асимптотически эквивалентны (слабо асимптотически эквивалентны) по Немыцкому относительно функций $\mu_i(n)$, $i = i_1, ..., i_q$ при $n \to \infty$ на многообразии Q.

Доказательство. Так как

$$|y_k(n_0) - \overline{y}_k(n)| \le |x_k(n_0) - \overline{x}_k(n)| + \sum_{s=n_1}^{+\infty} \sum_{\substack{j \in L \\ k \in M}} \left|y^{jk}(s)\right|\psi(s)\,|x_1(s) - \overline{x}_1(s)|, \quad k \in M, \tag{17}$$

$$|x_1(n_0) - \overline{x_1}(n)| < \sum_{j\in M} y_{1j}|\gamma_j - \overline{\gamma_j}| + \sum_{s=n_1}^{+\infty}\sum_{p,j\in L} \left|y_{kp}(n)\,y^{jp}(s)\right|\psi(s)\,|x_1(s) - \overline{x_1}(s)|, \tag{18}$$

$$\frac{|x_1(n) - x_2(n)|}{\overline{\mu}_i(n)} \le d_1\sum_{j\in M}\left|\gamma_1 - \overline{\gamma}_j\right| + d_2\sum_{s=n_1}^{n}\sum_{p,j\in L}\left|y^{jp}(s)\right|\psi(s)\,\overline{\mu}_1(s)\,\frac{|x_1(s) - \overline{x_1}(s)|}{\overline{\mu}_1(s)} \tag{19}$$

то из (19) получим

$$|x_1(n) - \overline{x_1}(n)| \le d_3\|x_q(n_0) - \overline{x_q}(n_0)\|, \tag{20}$$

где

$$\|x_q(n_0) - \overline{x_q}(n_0)\| = \sum_{j\in M}\left|\gamma_1 - \overline{\gamma}_j\right| = \sum_{j\in M}|x_j(n_0) - \overline{x_j}(n_0)|.$$

Тогда, используя неравенство (20), из соотношения (17) получим

$$|y_k(n_0) - \overline{y_k}(n_0)| \le ||x_q(n_0) - \overline{x_q}(n_0)|| \left(1 + d_3\sum_{s=n_1}^{n}\sum_{\substack{j \in M \\ k \in L}}\left|y^{jk}(s)\right|\overline{\mu}_1(s)\,\psi(s)\right), \quad d_3 > 0. \tag{21}$$

Пусть

$$\|x_q(n_0) - \overline{x_q}(n_0)\| < \delta.$$

Тогда

$$|y_k(n_0) - \overline{y_k}(n_0)| < \varepsilon.$$

Следовательно, РДС (1) и (2) покомпонентно асимптотически эквивалентны (слабо асимптотически эквивалентны) по Немыцкому относительно функций $\mu_i(n)$, $i = i_1, ..., i_q$ при $n \to \infty$ на многообразии Q (где $x_q = colon\left(x_{i_1 n}, ..., x_{i_q n}\right)$, $x_{i_q n} \in R^q$).

Теорема доказана.

Список литературы

[1] *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем. М. Мир, 1971, 312 с.

[2] *Бромберг П.В.* Устойчивости и автоколебания импульсных систем регулирования "ОборонГИЗ" М. 1953, 224 с.

[3] *Бопаев К.Б.* Нормальная форма –нелинейных разностно-динамических систем // Математикческий журнал.Алматы.2003 г. том 3 №1(7), С. 42-54

[4] *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1950, 472 с.

[5] *Видаль П.* Нелинейные импульсные системы. "Энергия". Москва. 1974, 336 с.

[6] *Бопаев К.Б., Бопаева С.К.* Асимптотически эквивалентные РДС // Вестник ЖГУ, №1-2/04, - С. 48-52.

[7] *Сламжанова С.С.* Покомпонентная асимптотическая эквивалентность РДС // Математический журнал (Алматы). 2009. №3(33), С. 83-93.

[8] *Brauer F.* Nonlinear differential equations with forcing terms // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. vol. 15. p. 758-765.