Качественный анализ системы уравнений при описании кинетики дефектной структуры полимеров после облучения

Б.А. Алиев
Казахский национальный университет имени аль-Фараби
e-mail: aliyevb72@mail.ru

Аннотация

В работе приставлен качественный анализ системы уравнений, который описывает изменение концентрации радикалов в полимере после облучения. Определены особые направления и характер интегральных кривых на бесконечности фазовой плоскости.

В предыдущей работе нами рассматривалась система нелинейных уравнений (1), которая описывает убывание концентрации радикалов в полимерах после облучения. Предполагается, что два разных типа радикала взаимодействуют между собой, а также каждый тип радикала может взаимодействовать с себе подобным. Это автономная система, правые части ее определены во всей плоскости R^2. Анализ системы (1) состоит из двух частей: поведение вблизи особых направлений, который нами уже рассмотрен и поведение на бесконечности. Параметры a_1, a_2, $c>0$, считаем, что $a_1>a_2$. Параметр c – переменный. Считаем, что параметры x, y, a_1, a_2, c – безразмерные. Физический смысл x, y – относительные концентрации радикалов, т.е. величины безразмерные, тогда $[a_1]$, $[a_2]$, $[]$=1/время. Поэтому для того, чтобы сделать коэффициенты a_1, a_2, с безразмерными достаточно взять некоторый характерный масштабный интервал времени и заменить $t \to t/\tau$, т.е. ввести безразмерное время. В дальнейшем считаем, что время тоже безразмерно.

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -x(a_1x+cy) \\ \dot{y} = -y(cx+a_2y) \end{cases} \tag{1}$$

Для исследования поведения траекторий на бесконечности применим к системе (1) преобразование Пуанкаре

$$\begin{cases} x = 1/X \\ y = Y/X. \end{cases} \tag{2}$$

В координатах $(X;Y)$ после введения параметра $d\tau = \dfrac{dt}{X}$ система (1) примет вид:

$$\begin{aligned} X' &= \frac{dX}{d\tau} = X(a_1+cy) \\ Y' &= \frac{dY}{d\tau} = Y[(a_1-c)+(c-a_2)Y]. \end{aligned} \tag{3}$$

Состояние равновесия системы (3) – при $X=0$ это точки $A(0,0)$ и $B\left(0;\,\frac{(a_1-c)}{(a_2-c)}\right)$. В дальнейшем будем пока считать, что $c \neq a_1$, a_2 и $c \neq \sqrt{a_1a_2}$, эти точки рассматриваются отдельно. Найдем якобиан системы (3)

$$J = \begin{bmatrix} a_1+cY & cX \\ 0 & (a_1-c)+2(c-a_2)Y \end{bmatrix}, \tag{4}$$

$$J(A) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 - c \end{bmatrix}, \tag{5}$$

$$J(B) = \begin{bmatrix} (a_1 a_2 - c^2)/(a_2 - c) & 0 \\ 0 & -(a_1 - c) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Для исследования поведения на концах оси OY применим другое преобразование Пуанкаре:

$$\begin{cases} x = Y/X \\ y = 1/X. \end{cases} \tag{7}$$

Система (A) в этих координатах примет вид (после замены $d\tau = dt/X$)

$$\begin{aligned} X' &= \frac{dX}{d\tau} = X(cY + a_2) \\ Y' &= \frac{dY}{d\tau} = Y((c - a_1)Y + (a_2 - c)). \end{aligned} \tag{8}$$

Концам оси OY отвечает точка $C(0,0)$, якобиан

$$J(C) = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & a_2 - c \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Все якобианы (5), (6), (9) имеют диагональную форму, на диагоналях расположены характеристические числа. Точки A, B, C – простые состояния равновесия (кроме c=a_2,c=a_1, c=$\sqrt{a_1 a_2}$), так что их характер полностью определен знаками характеристических чисел. Сведем данные в таблицу 1.

Таблица 1

Область измене-ния c	Точки	Знаки характе-рист. чисел	Характер точки	
$c \in (0, a_2)$	A B C	$+\,+$ $+\,-$ $+\,+$	Неустойч.узел Седло Неустойч. узел	Рисунок 1
$c \in (a_2;\ \sqrt{a_1 a_2})$	A B C	$+\,+$ $-\,-$ $+\,-$	Неустойч.узел устойч. узел Седло	Рисунок 2
$c \in (\sqrt{a_1 a_2}; a_1)$	A B C	$+\,+$ $+\,-$ $+$	Неустойч.узел Седло Седло	Рисунок 3
$c \in (a_1; \infty)$	A B C	$+\,-$ $+\,+$ $+\,-$	Седло Неустойч.узел Седло	Рисунок 4

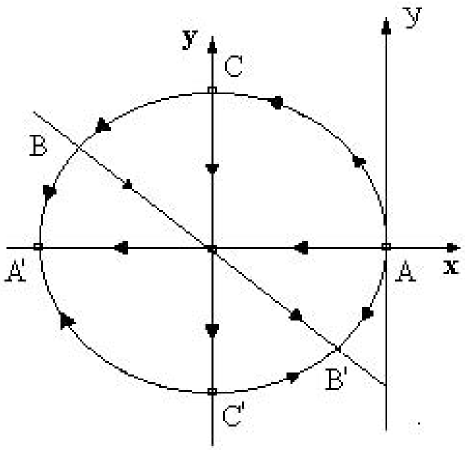

Рисунок 1.

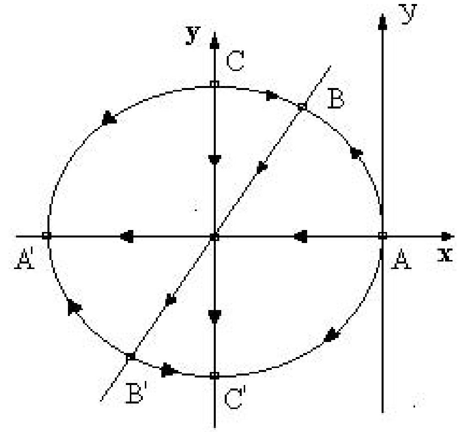

Рисунок 2.

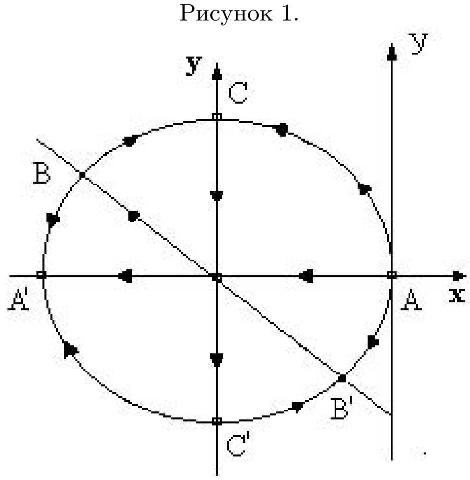

Рисунок 3.

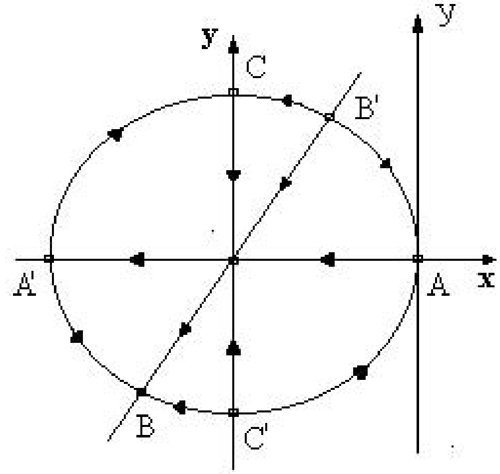

Рисунок 4.

Рассмотрим теперь особые случаи.

$c = a_2$. Преобразование Пуанкаре (2) приводит к системе:

$$\begin{cases} X' = X(a_1 + cY) \\ Y' = Y(a_1 - c), \end{cases}$$

$$J(A) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 - c \end{bmatrix}.$$

Характер точки A – неустойчивый узел.

Применяя преобразование (7) получим систему:

$$\begin{cases} X' = a_2 X(1 + Y) \\ Y' = -Y^2(a_1 - c). \end{cases}$$

Якобиан $J(B) = \begin{bmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, здесь $\det J(B) = 0$, $trJ(B) = a_2 \neq 0$, так что точка B – седло-узел, состоит он из 2 гиперболических и 1 параболического сектора, причем положительная полуось OY входит в параболический сектор (рис.5).

$c = a_1$. Преобразование (П.1) приводит к системе

$$\begin{cases} X' = X(1+Y) = a_1 X(1+Y) \\ Y' = (c-a_2)Y^2 = (a_1-a_2)Y^2. \end{cases}$$

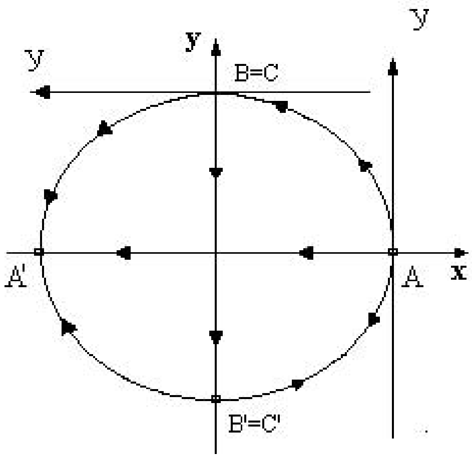

Рисунок 5.

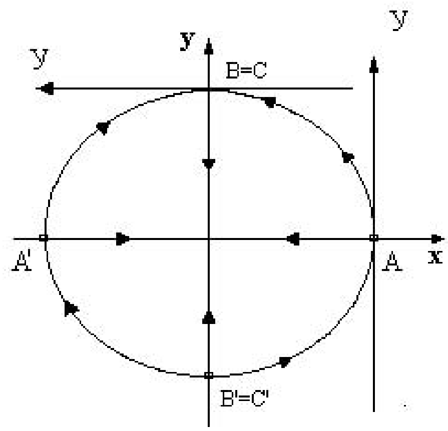

Рисунок 6.

В точке $A(0,0)$ якобиан $J(A) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\det J(A) = 0$, $trJ(A) = a_1$, т.е. точка A – седло-узел, также состоит из 2 гиперболических и 1 параболического секторов.

Преобразование (7) приводит к системе

$$\begin{cases} X' = X(a_1 Y + a_2) \\ Y' = -(a_1-a_2)Y. \end{cases}$$

Якобиан в точке $C(0,0)$

$$J(C) = \begin{bmatrix} a_1 Y + a_2 & a_1 X \\ 0 & -(a_1-a_2) \end{bmatrix}\Bigg|_{X=0;Y=0} = \begin{bmatrix} a_1 & \\ 0 & -(a_1-a_2) \end{bmatrix}.$$

Так что, в точке C наблюдается седло (рис.6)

$c = \sqrt{a_1 a_2}$. Система (A) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sqrt{a_1}x\left(\sqrt{a_1}x + \sqrt{a_2}y\right) \\ \dot{y} = -\sqrt{a_2}y\left(\sqrt{a_1}x + \sqrt{a_2}y\right) \end{cases}$$

Преобразование Пуанкаре (2) дает

$$\begin{cases} X' = \sqrt{a_1}X\left(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}Y\right) \\ Y' = \sqrt{a_1}Y\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right) \end{cases}$$

Якобиан $J(A) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}$, характер точки A – неустойчивый узел.

Преобразование (7) приводит к

$$J() = \begin{bmatrix} \sqrt{a_1 a_2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{a_2}\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right) \end{bmatrix},$$

т.е. точка C – седло. Прямая $\sqrt{a_1}x + \sqrt{a_2}y = 0$, как уже отмечалось, состоит из неподвижных точек (рис.7).

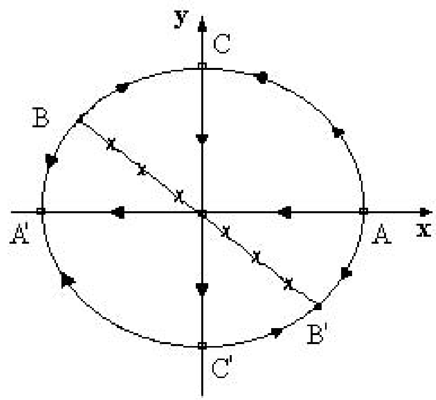

Рисунок 7.

Итак, объединяя полученные ранее, поведение системы вблизи особых направлений и поведение системы на бесконечности мы имеем возможность составить полную картину изменения топологической структуры поведения траекторий с изменением параметра С.

Список литературы

[1] *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Изд-во технико-теоретической литературы, 1949. – 550 с.

[2] *Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

[3] *Уиттекер Э.Т., Ватсон Д.Н.* Курс современного анализа. – М.: Физматгиз, 1963, т.1. – 343 с.

[4] *Эрроусмит Д., Плейс К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986. - 243 с.

[5] *Найфэ А.Х.* Методы возмущений. – М.: Мир, 1976. – 455 с.