Определение параметров регуляризации решения граничной обратной задачи теплопроводности

К.Т. Искаков, Ф.С. Телгожаева, В.П. Шерышев
Казахский национальный педагогический университет им. Абая
e-mail: kazizatt@mail.ru

Аннотация

Разработана методика определения параметров регуляризации решения граничной обратной задачи теплопроводности, возникающей при определении температуры в зоне контакта электрод - деталь, недоступной для непосредственного термометрирования при восстановлении деталей почвообрабатывающих машин с помощью электроконтактного нагрева.

Введение.

В настоящее время обратные задачи теплопроводности являются наиболее эффективными способами решения различных технологических проблем и в том числе технологии машиностроения вообще и технологии сельскохозяйственного машиностроения в частности.

Электроконтактная термомеханическая обработка является одним из современных перспективных направлений восстановления деталей почвообрабатывающих машин [1]. На эффективность процесса электроконтактной термомеханической обработки наибольшее влияние оказывает температура контактной поверхности электрод-деталь. Однако определение этой температуры связано с преодолением значительных технических трудностей, обусловленных высокими значениями температур и наличием электрических наводок.

В связи с этим особую актуальность приобретает граничная обратная задача теплопроводности, решение которой позволяет производить одновременное определение величин температур и плотностей тепловых потоков в трудно доступной зоне контакта электрод-деталь по результатам термометрирования зоны контакта деталь - теплоотводящая масса, доступной для непосредственного измерения температуры. Подобные постановки задач рассматривались в работах [2-3].

Постановка задачи.

Граничная обратная задача теплопроводности для нагрева детали (пластина по рис.1) тепловым потоком, обусловленным процессом электроконтактного нагрева, записывается в следующем виде:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad 0 < x < l, \qquad t > 0, \tag{1}$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = q_{izm}, \quad x = l, \quad t > 0, \tag{2}$$

$$T(l,t) = T_{izm} \quad x = l, \quad t > 0, \tag{3}$$

$$T(x,0) = T_0, \quad 0 \le x \le l, \quad t = 0. \tag{4}$$

Здесь $T = T(x,t)$ – температура детали, зависящая от пространственной координаты x и времени $t; T_0$ – начальная температура детали.

Данная граничная обратная задача теплопроводности относится к классу некорректно поставленных задач математической физики [4,5]. Для ее решения требуется разработка специальных регуляризующих алгоритмов [6,7].

Для доказательства существования и единственности решения граничной обратной задачи теплопроводности (1)-(4) и определения параметров регуляризации (вводятся ниже по тексту), осуществим переход к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d\theta}{dt} = f(t,\theta), \quad \theta(t_0) = \theta_0, \quad t, t_0 \in [\tau_1, \tau_2], \tag{5}$$

где $\theta = \theta(t)$ – некоторая функция времени. В дальнейшем мы полагаем что $\theta = \overline{T} = \frac{T_{isk}+T_{izm}}{2}$.

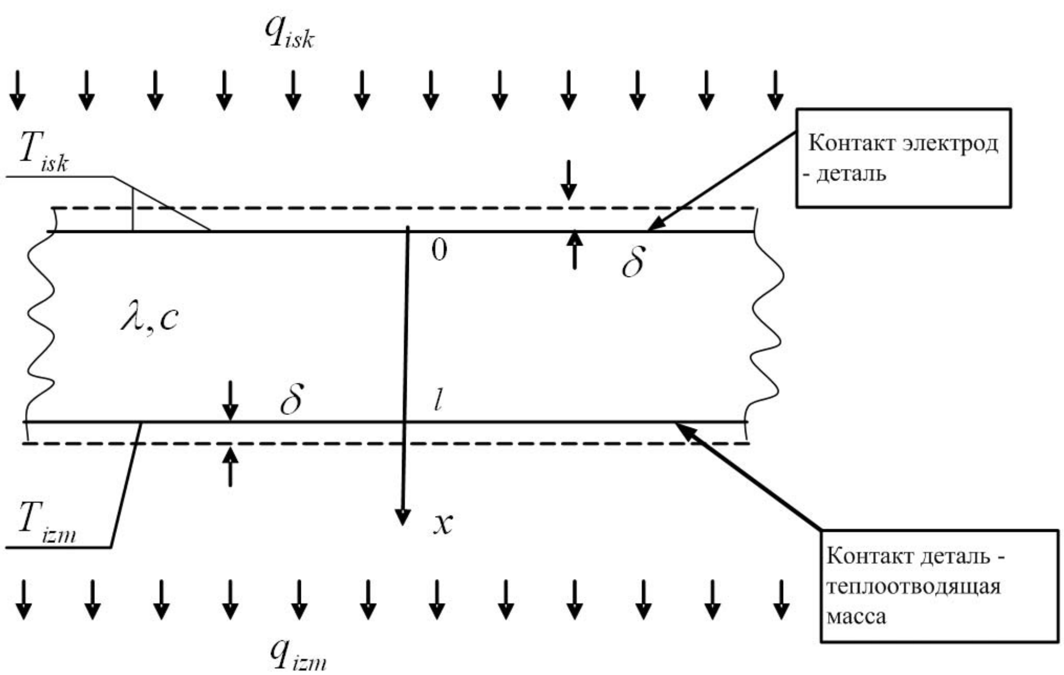

Рис. 1: Схематизация теплового процесса: T_{isk} - искомая температура контакта электрод-деталь, q_{isk} - искомая плотность теплового потока, T_{izm} - измеренная температура контакта деталь- теплоотводящая масса, q_{izm} - измеренная плотность теплового потока, l - толщина детали, δ - толщина термически тонкого слоя, λ, c - теплопроводность и удельная объемная теплоемкость материала детали

Метод решения.

Редукцию к задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения осуществим методом термически тонкого слоя [7, 8]. С этой целью рассмотрим термически тонкие слои толщины δ с теплофизическими характеристиками, совпадающими с теплофизическими характеристиками детали, плотно прилегающие к границам детали (пластины по рис.1) так что тепловой контакт между ними можно считать идеальным. Термически тонкие слои это слои, в пределах толщины которых, температуру можно считать зависящей только от одной переменной - времени t [9].

Для трехслойной пластины сформулируем вспомогательную задачу.

Вспомогательная задача. Температурное поле неограниченной трехслойной после добавления термически тонких слоев пластины (рис.1) описывается уравнением теплопроводности:

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda\frac{\partial T}{\partial x}\right), \quad -\delta < x < l+\delta, \quad t > 0 \tag{6}$$

удовлетворяющим граничным условиям:

$$q_{isk} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}, \quad x = -\delta, \tag{7}$$

$$q_{izm} = -\lambda\frac{\partial T}{\partial x}, \quad x = l+\delta; \tag{8}$$

условиям сопряжения:

$$\lambda\frac{\partial t}{\partial x}\bigg|_{x=x_i+0} = \lambda\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=x_i-0}, \quad T|_{x=x_i+0} = T|_{x=x_i-0}, \quad i=1,2; \quad t>0, \quad x_1=0, \quad x_2=l \tag{9}$$

и начальному условию:

$$T(x,0) = T_0, -\delta \le x \le l+\delta, \quad t=0 \tag{10}$$

Граничная обратная задача теплопроводности, с учетом математической постановки прямой задачи (6)-(10), формулируется следующим образом: на поверхности теплообмена деталь-теплоотводящая масса $x = l+\delta$ заданы измеренные температура T_{izm} и плотность теплового потока q_{izm} . Требуется определить температуру T_{isk} теплоовыделяющей поверхности электрод - деталь.

Температуры обеих поверхностей пластины $T_{isk} = T_{isk}(t), T_{izm} = T_{izm}(t)$ и плотности тепловых потоков $q_{isk} = q_{isk}(t), q_{izm} = q_{izm}(t)$ являются функциями времени. Пусть также температура пластины $T(x,t)$ является монотонной функцией переменной x на рассматриваемом интервале времени (это предположение справедливо при нагреве детали постоянным источником теплоты). Тогда, интегрируя левую и правую части уравнения теплопроводности (6) по переменной x в пределах соответствующих термически тонких слоев и основной части пластины и используя условия (7)-(9), получаем:

$$q_{isk}(t) = c\delta\frac{\partial T_{isk}}{\partial t} - \lambda\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \quad x=0, \quad t>0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}lc\left(\frac{\partial T_{isk}}{\partial t} + \frac{\partial T_{izm}}{\partial t}\right) = \lambda\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=l} - \lambda\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \tag{12}$$

$$q_{izm} = -c\delta\frac{\partial T_{izm}}{\partial t} - \lambda\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{x=l}, t>0. \tag{13}$$

Непосредственным вычислением из (11)-(13) получаем уравнение, связывающее плотности тепловых потоков q_{isk}, q_{izm}, с температурами T_{izm}, T_{isk} :

$$q_{isk} - q_{izm} = c\left(\frac{l}{2}+\delta\right)\frac{\partial}{\partial t}(T_{isk}+T_{izm}). \tag{14}$$

Условие монотонности изменения температур в пределах пластины по переменной x позволяет записать второе уравнение для определения плотностей тепловых потоков на контакте электрод - деталь и контакте деталь - теплоотводящая масса q_{isk} и q_{izm}в виде:

$$q_{isk} + q_{izm} = 2q_{cp}(t), \tag{15}$$

где $q_{cp}(t) = -\lambda \frac{\Delta T}{l}, \Delta T = T_{izm} - T_{isk}; \quad q_{cp}(t)$ – среднее значение плотности теплового потока.

Решая систему уравнений (14)-(15), получаем формулы, связывающие измеренные и искомые величины на каждой из контактных поверхностей:

$$q_{isk} = -\lambda \frac{\Delta T}{l} + \frac{c}{2}\left(\frac{l}{2} + \delta\right)\frac{\partial}{\partial t}\Delta T + c\left(\frac{l}{2} + \delta\right)\frac{\partial}{\partial t}T_{isk}, \tag{16}$$

$$q_{izm} = -\lambda \frac{\Delta T}{l} - \frac{c}{2}\left(\frac{l}{2} + \delta\right)\frac{\partial}{\partial t}\Delta T - c\left(\frac{l}{2} + \delta\right)\frac{\partial}{\partial t}T_{isk}. \tag{17}$$

Это и есть решение вспомогательной задачи.

Решение основной задачи. Теперь переходим к решению непосредственно поставленной задачи - к определению температуры поверхности контакта электрод-деталь T_{isk}.

Прибавляя и вычитая к числителям первых членов уравнений (16),(17) величину T_{isk}, от уравнений (16), (17) перейдем к системе уравнений:

$$q_{isk} = -\lambda \frac{T_{izm} + T_{isk} - 2T_{isk}}{l} + \frac{c}{2}\left(\frac{l}{2} + \delta\right)\frac{\partial}{\partial t}(T_{isk} + T_{izm}), \tag{18}$$

$$q_{izm} = -\lambda \frac{T_{izm} + T_{isk} - 2T_{isk}}{l} - \frac{c}{2}\left(\frac{l}{2} + \delta\right)\frac{\partial}{\partial t}(T_{isk} + T_{izm}). \tag{19}$$

Далее введем в рассмотрение среднюю по сечению детали температуру: $\overline{T} = \frac{T_{isk}+T_{izm}}{2}$. При известной средней температуре и заданной температуре поверхности контакта деталь-теплоотводящая масса искомая температура поверхности контакта электрод-деталь определится по формуле:

$$T_{isk} = 2\overline{T} - T_{izm}. \tag{20}$$

После преобразования уравнений (18), (19) получим систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} q_{isk} &= -\frac{2\lambda}{l}(\overline{T} - T_{isk}) + c\left(\frac{l}{2} + \delta\right)\frac{d\overline{T}}{dt} \\ q_{izm} &= -\frac{2\lambda}{l}(\overline{T} - T_{isk}) - c\left(\frac{l}{2} + \delta\right)\frac{d\overline{T}}{dt} \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Первое уравнение системы представляет собой формулу для определения плотности теплового потока на поверхности контакта электрод-деталь, а вторая может быть использована для определения температуры этой поверхности Присоединяя ко второму уравнению системы (21) начальное условие $\overline{T}(0) = T_0$, для расчета средней температуры $\overline{T}$ получаем:

$$c\left(\frac{l}{2} + \delta\right)\frac{d\overline{T}}{dt} - \frac{2\lambda}{l}\overline{T} = -q_{izm} - \frac{2\lambda}{l}T_{izm}, \quad \overline{T}(0) = T_0 \tag{22}$$

После выполнения достаточно простых преобразований приходим к следующей задаче Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$\frac{d\overline{T}}{dt} - \frac{\lambda}{l}b_1\overline{T} = -\frac{q_{izm} + b_2 T_{izm}}{b_3}, \quad \overline{T}(0) = T_0, \tag{23}$$

где $b_1 = \left[\frac{c}{2}\left(\frac{l}{2}+\delta\right)\right]^{-1}, \quad b_2 = \frac{2\lambda}{c}, \quad b_3 = c\left(\frac{l}{2}+\delta\right).$

Таким образом, нам удалось осуществить переход от исходно некорректно поставленной граничной обратной задачи теплопроводности (1)-(4) к задаче Коши вида:

$$\frac{d\overline{T}}{dt} = f(t,\overline{T}), \quad \overline{T}(t_0) = T_0, \quad t, t_0 \in [\tau_1, \tau_2], \tag{24}$$

где $f(t,\overline{T}) = \frac{\lambda}{l} b_1 \overline{T} - \frac{q_{izm}+b_2 T_{izm}}{b_3}$; $T_0 = 0$ $\tau_1 = 0$, $\tau_2 = \tau$; τ - интервал времени интегрирования, который наряду с параметром δ является параметром регуляризации, подлежащим определению.

Теперь для доказательства существования и единственности решения граничной обратной задачи теплопроводности (1)-(4), которая с помощью метода термически тонкого слоя была сведена к задаче Коши вида (24) докажем лемму, основанную на принципе сжимающих отображений [9, 10].

Лемма 1 *При выполнении условия Липшица относительно* $\overline{T}$:

$$\left|f(t,\overline{T}') - f(t,\overline{T}'')\right| \le K\left|\overline{T}' - \overline{T}''\right|, \tag{25}$$

справедливого для любых $\overline{T}'$ *и* $\overline{T}''$*, существует единственное решение задачи Коши (24).*

Доказательство. Существование и единственность решения задачи Коши (24) эквивалентно существованию и единственности решения интегрального уравнения:

$$\overline{T}(t) = T_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, \overline{T}(\xi))d\xi. \tag{26}$$

Рассмотрим далее отображение множества функций , построенное по правилу:

$$g(\overline{T}(t)) = T_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\xi, \overline{T}(\xi))d\xi. \tag{27}$$

в пространстве непрерывных на отрезке $[\tau_1, \tau_2]$ функций.

Тогда задача о нахождении решения интегрального уравнения (26) сведется к нахождению неподвижной точки отображения g, т.е. к нахождению функции $\overline{T}$ такой, что $g(\overline{T}) = \overline{T}$. Для того чтобы существовала одна такая точка, достаточно того, чтобы отображение g было сжимающим. Покажем, что это имеет место.

Поскольку из условия Липшица (25) следует, что

$$|f(t,\overline{T}_1) - f(t,\overline{T}_2)| \le K|\overline{T}_1 - \overline{T}2|, \tag{28}$$

то для любых функции $\overline{T}, z \in C[\tau_1, \tau_2]$ будет справедливо неравенство:

$$\rho(g(\overline{T}), g(z)) \le \max_{\tau_1 \le t \le \tau_2} \left| \int\limits_{t_0}^{t} K\rho(\overline{T}, z)d\delta \right| = K(\tau_2 - \tau_1)\rho(\overline{T}, z), \tag{29}$$

где

$$\rho(\overline{T}, z) = \max_{\tau_1 \le t \le \tau_2} |\ \overline{T}(t) - z(t)\ | \ . \tag{30}$$

Заметим, что отображение будет сжимающим при условии, если отрезок $[\tau_1, \tau_2]$ достаточно мал, т.е. если:

$$K(\tau_2 - \tau_1) < 1. \tag{31}$$

Поэтому можно заключить, что при выполнении условий (28)-(31), справедлива доказываемая лемма существования и единственности решения задачи Коши (24). *Лемма доказана.*

Теорема 1 *Для того чтобы в условиях монотонного нагрева на достаточно малом интервале времени существовало единственное решение граничной обратной задачи теплопроводности (1)-(4) необходимо выполнение условия:*

$$\frac{a^2\tau}{\frac{l^2}{4} + \frac{\delta l}{2}} < 1 \tag{32}$$

Здесь $a^2 = \frac{\lambda}{c}$ *- коэффициент температурапроворности материала детали.*

Доказательство. Из проведенных выше исследований следует, что доказательство теоремы существования и единственности решения граничной обратной задачи теплопроводности (1)-(4) (для случая постоянных теплофизических характеристик) равносильно доказательству существования и единственности решения задачи Коши (24). Решение задачи (24) будет единственным при выполнении условия (31). В рассматриваемом нами случае, согласно уравнению (22) параметр K вычисляется по формуле:

$$K = \frac{a^2}{\frac{l^2}{4} + \frac{\delta l}{2}}. \tag{33}$$

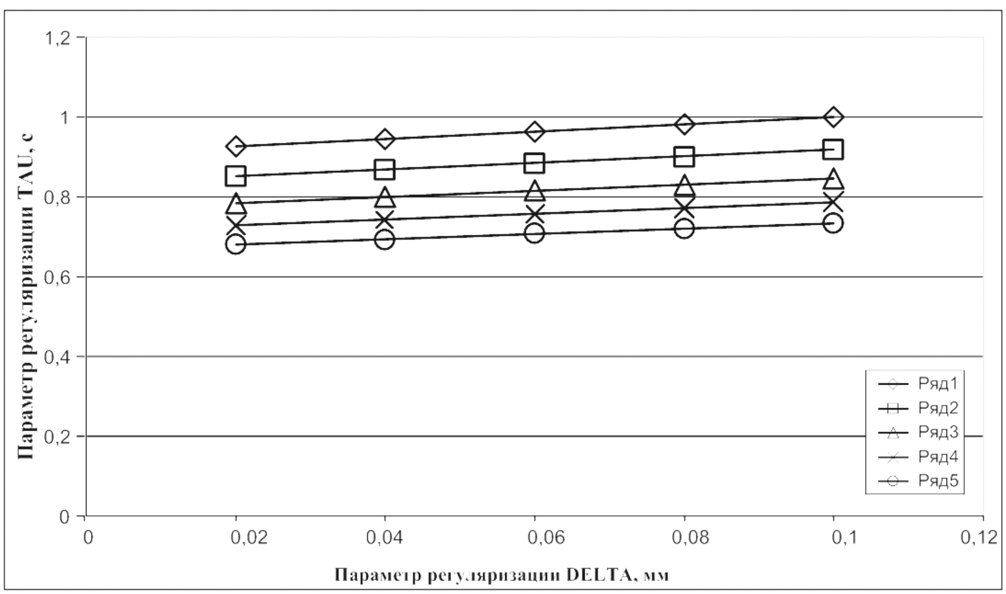

Рис. 2: Зависимости второго параметра регуляризации τ от первого параметра регуляризации δ при различных значениях температуропроводности a^2

Подставляя в формулу (31) $\tau_2 - \tau_1 = \tau$ и значение K , вычисленное по формуле (33), получаем условие:

$$\frac{a^2\tau}{\frac{l^2}{4}+\frac{\delta l}{2}} < 1 \tag{34}$$

это именно то условие, при котором существует единственное решение граничной обратной задачи теплопроводности (1)-(4). *Теорема доказана.*

Примеры расчетов.

На рисунке 2 приведены зависимости второго параметра регуляризации τ от первого параметра регуляризации δ при заданном значении толщины детали $l = 0,002$ и при различных значениях коэффициента температуропроводности: $a^2 = 1,1E{-}06m^2/c$ (Ряд2), $a^2 = 1,2E{-}06m^2/c$ (Ряд3), $a^2 = 1,3E-06m^2/c$ (Ряд4), $a^2 = 1,4E-06m^2/c$ (Ряд5), $a^2 = 1,5E-06m^2/c$ (Ряд6).

Большему значению температуропроводности соответствует меньшее значение параметра τ. С другой стороны, чем меньше значение первого параметра регуляризации δ, тем меньше интервал времени интегрирования τ, на котором существует единственное решение граничной обратной задачи теплопроводности (1)-(4).

Заключение.

Формула (34) позволяет по заданному значению первого параметра регуляризации δ определять значение второго параметра регуляризации τ, обеспечивающее существование единственного решения граничной обратной задачи теплопроводности (1)-(4).

Заметим, что с одной стороны, значение параметра δ должно быть значительно меньше толщины пластины l (для того, чтобы примыкающие слои можно было считать термически тонкими), с другой стороны, его следует выбирать максимально возможно большим для того, чтобы иметь наибольшее допустимое значение области интегрирования τ.

Список литературы

[1] *Чижов В.Н., Болтенков А.А., Телгожаева Ф.С., Селивёрстов М.В.* Математическое моделирование тепловых процессов в системе "электрод-деталь-теплоотводящая масса"при ремонте деталей// Вестник Алтайского Государственного Университета №12.- Барнаул, 2009. – С.80-84.

[2] *Султангазин У.М., Атанбаев С.А., Кожабекова П.А., Шерышев В.П.* Расчет температурных полей по данным дистанционных наблюдений.// В книге "Космические исследования в Казахстане - Алматы, РОНДА, 2002. – С.324-330.

[3] *Бажанов А.А., Лесков С.П., Шерышев В.П.* Контроль температуры минерального расплава при производстве базальтового волокна. КИПиА в Казахстане № 1 (23), Май, 2009. – С.37-40.

[4] *Вабищевич П.Н.* Продолжение по пространственной переменной в граничной обратной задаче теплообмена// Матем. Моделирование, №4.– 1992. – С. 44-54.

[5] *Кабанихин С.И.* Обратные и некорректные задачи. Сибирское научное издательство. – Новосибирск, 2009.– 290с.

[6] *Алифанов О.М., Артюхин Е.А., Румянцев С.В.* Экстремальные методы решения некорректных задач.– М.: Наука, 1988. – 288 с.

[7] *Мацевитый Ю.М.* Обратные задачи теплопроводности в 2-х т. Т.1. Методология.– Киев: Наукова думка, 2002. – 408 с.

[8] *Бажанов А.А., Чижов В.Н., Шерышев В.П.* Метод термически тонкого слоя в задачах моделирования и идентификации тепловых процессов.– Алматы, 2005. – 295с.

[9] *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

[10] *Садовничий В.А.* Теория операторов. – 2-е изд. – М. Изд-во Моск. ун-та, 1986. – 368с.