

Численное решение одномерной обратной задачи акустики методом итераций Ландвебера

А.Т. Нурсейтова, Д.Б. Нурсейтов, Г.А. Тюлепбердинова
Казакский национальный педагогический университет имени Абая,
050010, г.Алматы, пр. Достык, 13,
e-mail: altyn_gold@yahoo.com, ndb80@mail.ru, tyulepberdinova@mail.ru

Аннотация

В статье рассматривается одномерная обратная задача акустики определения акустической жесткости. Рассматриваемая некорректная нелинейная задача исследуется в операторном виде $Aq = f$, где A — интегральный оператор. Получена оценка скорости сильной сходимости метода итераций Ландвебера. Проведены численные расчеты.

1 Постановка задачи

Рассматривается одномерная обратная задача акустики

$$u_{tt} = u_{xx} - \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}u_x, \quad x > 0, \quad t > 0, \quad (1)$$

$$u|_{t < 0} \equiv 0, \quad x > 0, \quad (2)$$

$$u_x|_{x=+0} = \gamma\delta(t), \quad t > 0, \quad (3)$$

$$u|_{x=+0} = g(t), \quad t > 0, \quad (4)$$

где полагается $\sigma(x) > 0$, $x > 0$, $\sigma \in C^1[0, \infty)$. Требуется найти решение прямой задачи (1)–(3) $u(x, t)$ и акустическую жесткость среды $\sigma(x)$ по дополнительной информации (4).

Известно [1], что решение прямой задачи (1)–(3) имеет вид

$$u(x, t) = s(x)\theta(t - x) + \tilde{u}(x, t), \quad (5)$$

где $\tilde{u}(x, t)$ — непрерывная для $x \geq 0$ и достаточно гладкая для $t > x > 0$ функция, $s(x) = -\gamma\sqrt{\sigma(x)/\sigma(+0)}$, θ — гэта-функция Хевисайда.

Подставляя (5) в систему (1)–(4), получим эквивалентную ей обратную задачу относительно $u(x, t)$ и $s(x)$

$$u_{tt} = u_{xx} - 2\frac{s'(x)}{s(x)}u_x, \quad t > x > 0, \quad (1')$$

$$u_x|_{x=0} = 0, \quad t > 0, \quad (2')$$

$$u(x, x+0) = s(x), \quad x > 0, \quad (3')$$

$$u|_{x=+0} = g(t), \quad t > 0. \quad (4')$$

Обозначим

$$q_1(x, t) = u_x(x, t), \quad q_2(x) = \frac{1}{s(x)} = -\frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\sigma(+0)}{\sigma(x)}}, \quad q_3(x) = 2 \frac{s'(x)}{s(x)} = \frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}.$$

Отметим, что поскольку

$$q_2'(x) = -\frac{s'(x)}{s^2(x)} = -\frac{1}{2}q_3(x)q_2(x), \quad s(+0) = -\gamma,$$

то

$$q_2(x) = -\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi)q_2(\xi) \int d\xi. \tag{6}$$

Используем формулу Даламбера для представления решения задачи Коши (1'),(2'),(4')

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [g(t-x) + g(t+x)] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} q_3(\xi)q_1(\xi, \tau) \int d\tau \int d\xi, \tag{7}$$

и дифференцируем (7) по x

$$u_x(x, t) = q_1(x, t) = \frac{1}{2} [-g'(t-x) + g'(t+x)] + \frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi)[q_1(\xi, t+x-\xi) + q_1(\xi, t-x+\xi)] \int d\xi. \tag{8}$$

Положим в (7) $t = x + 0$

$$s(x) = \frac{1}{2} [g(+0) + g(2x)] + \frac{1}{2} \int_0^x \int_{\xi}^{2x-\xi} q_3(\xi)q_1(\xi, \tau) \int d\tau \int d\xi,$$

$$s'(x) = g'(2x) + \int_0^x q_3(\xi)q_1(\xi, 2x-\xi) \int d\xi = \frac{1}{2} q_3(x)s(x).$$

Умножив почленно на (6), получаем

$$q_3(x) = \left[-\frac{1}{\gamma} - \frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi)q_2(\xi) \int d\xi \right] \left[2g'(2x) + 2 \int_0^x q_3(\xi)q_1(\xi, 2x-\xi) \int d\xi \right]. \tag{9}$$

Уравнения (8), (6), (9) образуют систему нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Решение этой системы будем искать в классе $q \in \vec{L}_2(l)$ таком, что $q_1 \in L_2(\Delta(l))$ и функции $q_2, q_3 \in L_2(0, l)$. Здесь

$$\Delta(l) := \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < t < 2l - x\}, \quad l > 0.$$

Заметим, что если решение задачи (8), (6), (9) существует и $u \in L_2(\Delta(l)) \cap C^2(\Delta(l))$, $s \in C^1(0, l)$, $g \in C^2(0, 2l)$, то по формуле $\sigma(x) = (\sigma(+0)/\gamma^2)s^2(x)$ мы можем найти решение обратной задачи (1')–(4'), при условии, что $\sigma(+0)$ известно.

2 Операторная форма обратной задачи В данной работе одномерная обратная задача для уравнения акустики будет исследоваться в операторной форме

$$Aq = f, \tag{10}$$

где в соответствии с (8), (6), (9),

$$Aq := q + Bq, \tag{11}$$

$$q(x, t) = (q_1, q_2, q_3)^\top, \quad (12)$$

$$q_1(x, t) = u_x(x, t), \quad q_2(x) = 1/S(x), \quad q_3(x) = 2s'(x)/S(x),$$

$$f(x, t) = (f_1, f_2, f_3)^\top, \quad (13)$$

$$f_1(x, t) = [g'(t+x) - g'(t-x)]/2, \quad f_2 = -1/\gamma, \quad f_3(x) = -2g'(2x)/\gamma,$$

$$Bq = (B_1q, B_2q, B_3q)^\top, \quad (14)$$

$$B_1q = -\frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi) [q_1(\xi, t+x-\xi) + q_1(\xi, t-x+\xi)] \int d\xi,$$

$$B_2q = \frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi) q_2(\xi) \int d\xi,$$

$$B_3q = 2B_2q [g'(2x) + B_4q] + (2/\gamma) B_4q,$$

$$B_4q = \int_0^x q_3(\xi) q_1(\xi, 2x-\xi) \int d\xi.$$

Определение 1 Будем говорить, что элемент $q(x, t) = (q_1, q_2, q_3)^\top$ принадлежит пространству $\vec{L}_2(l)$, если

$$q_1(x, t) \in L_2(\Delta(l)), \quad q_k(x) \in L_2(0, l), \quad k = 2, 3,$$

где $\Delta(l) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < t < 2l - x\}$.

Имеют место следующие утверждения [?]

Лемма 1 (Ограниченность оператора A) Предположим, что оператор A определен формулами (11)–(14) и пусть $g' \in L_2(0, 2l)$. Тогда $A: \vec{L}_2(l) \rightarrow \vec{L}_2(l)$ и верны оценки:

$$\|B_1q\|_{L_2(\Delta(l))}^2 \leq l \|q\|_{\vec{L}_2(l)}^4,$$

$$\|B_2q\|_{L_2(0, l)}^2 \leq \frac{l}{4} \|q\|_{\vec{L}_2(l)}^4,$$

$$\|B_3q\|_{L_2(0, l)}^2 \leq \left(\frac{6}{\gamma^2} + \frac{3\beta}{2}\right) \|q\|_{\vec{L}_2(l)}^4 + \frac{3}{2} \|q\|_{\vec{L}_2(l)}^8,$$

где $\beta := \|g'\|_{L_2(0, 2l)}^2$.

Лемма 2 (Ограниченность производной Фреше $A'(q)$) Если $q \in \vec{L}_2(l)$, $g' \in L_2(0, 2l)$, то оператор A, определяемый (11)–(14), дифференцируем по Фреше $A'(q): \vec{L}_2(l) \rightarrow \vec{L}_2(l)$ и $A'(q)p = p + B'(q)p$ для $p \in \vec{L}_2(l)$, где

$$B'_1(q)p = -\frac{1}{2} \int_0^x q_3(\xi) [p_1(\xi, t+x-\xi) + p_1(\xi, t-x+\xi)] \int d\xi \\ - \frac{1}{2} \int_0^x p_3(\xi) [q_1(\xi, t+x-\xi) + q_1(\xi, t-x+\xi)] \int d\xi,$$

$$B'_2(q)p = \frac{1}{2} \int_0^x [q_3(\xi)p_2(\xi) + q_2(\xi)p_3(\xi)] \int d\xi,$$

$$B'_3(q)p = 2B'_2(q)p [g'(2x) + B_4q] + 2B'_4(q)p [B_2q + 1/\gamma],$$

$$B'_4(q)p = \int_0^x [q_3(\xi)p_1(\xi, 2x-\xi) + p_3(\xi)q_1(\xi, 2x-\xi)] \int d\xi,$$

и верны оценки:

$$\begin{aligned} \|B'_1(q)p\|_{L_2(\Delta(l))}^2 &\leq 4l\|q\|_{\vec{L}_2(l)}^2\|p\|_{\vec{L}_2(l)}^2, \\ \|B'_2(q)p\|_{L_2(0,l)}^2 &\leq l\|p\|_{\vec{L}_2(l)}^2\|q\|_{\vec{L}_2(l)}^2, \\ \|B'_3(q)p\|_{L_2(0,l)}^2 &\leq 8(\beta + 4/\gamma^2)\|q\|_{\vec{L}_2(l)}^2\|p\|_{\vec{L}_2(l)}^2 + 16\|q\|_{\vec{L}_2(l)}^6\|p\|_{\vec{L}_2(l)}^2. \end{aligned}$$

Лемма 3 (Ограниченность сопряженного оператора $(A'q)^*$) Пусть оператор A определяется (11)–(14), $g' \in L_2(0, 2l)$, тогда $\forall q \in \vec{L}_2(l)$ оператор $A'(q): \vec{L}_2(l) \rightarrow \vec{L}_2(l)$ имеет сопряженный оператор $[A'q]^*: \vec{L}_2(l) \rightarrow \vec{L}_2(l)$, действующий на $r \in \vec{L}_2(l)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} [A'_1q]^*r &= r_1 - \frac{1}{2}q_3(x) \left\{ \int_x^{(x+t)/2} r_1(\xi, t+x-\xi) \int d\xi \right. \\ &\quad \left. + \int_x^{l-(t-x)/2} r_1(\xi, t-x+\xi) \int d\xi - 2\left[B_2q\left(\frac{t+x}{2}\right) + \frac{1}{\gamma}\right]r_3\left(\frac{t+x}{2}\right) \right\}, \\ [A'_2q]^*r &= r_2 + \frac{1}{2}q_3(x) \int_x^l \{r_2(\xi) + 2r_3(\xi)[g'(2\xi) + B_4q(\xi)]\} \int d\xi, \\ [A'_3q]^*r &= r_3 - \frac{1}{2} \int_x^l \left\{ \int_\xi^{2l-\xi} [q_1(x, t+\xi-x) + q_1(x, t-\xi+x)]r_1(\xi, t) \int dt \right. \\ &\quad \left. - q_2(x)r_2(\xi) - 2q_2(x)r_3(\xi)[g'(2\xi) + B_4q(\xi)] \right. \\ &\quad \left. - 4q_1(x, 2\xi-x)\left[B_2q(\xi) + \frac{1}{\gamma}\right]r_3(\xi) \right\} \int d\xi, \end{aligned}$$

и верны оценки:

$$\begin{aligned} \|[B'_1q]^*r\|_{L_2(\Delta(l))}^2 &\leq 2l\|r\|_{\vec{L}_2(l)}^2\|q\|_{\vec{L}_2(l)}^2 + 2(\|q\|_{\vec{L}_2(l)}^4 + 4/\gamma^2)\|r\|_{\vec{L}_2(l)}^2\|q\|_{\vec{L}_2(l)}^2, \\ \|[B'_2q]^*r\|_{L_2(0,l)}^2 &\leq \frac{3}{4}(l + 2\beta + 2\|q\|_{\vec{L}_2(l)}^4)\|r\|_{\vec{L}_2(l)}^2\|q\|_{\vec{L}_2(l)}^2, \\ \|[B'_3q]^*r\|_{L_2(0,l)}^2 &\leq 3(8/\gamma^2 + \beta + 3l/2 + 3\|q\|_{\vec{L}_2(l)}^4)\|r\|_{\vec{L}_2(l)}^2\|q\|_{\vec{L}_2(l)}^2. \end{aligned}$$

3 Схема метода итераций Ландвебера

Введем сетку $x = ih$, $t = kh$, где $i = \overline{0, N}$, $k = \overline{i, 2N-i}$, N – размер сетки, $h = l/N$ – шаг сетки. Введем следующие обозначения для сеточных функций:

$$\begin{aligned} q[i, k] &= (q_1[i, k], q_2[i], q_3[i]), \\ q_1[i, k] &:= q_1(ih, kh), \quad q_2[i] := q_2(ih), \quad q_3[i] := q_3(ih), \\ f[i, k] &= (f_1[i, k], f_2[i], f_3[i]), \\ f_1[i, k] &:= f_1(ih, kh), \quad f_2[i] := f_2(ih), \quad f_3[i] := f_3(ih). \end{aligned}$$

Для описания схемы воспользуемся методом математической индукции.

1. Зададим начальное приближение $q^0[i, k] = (q_1^0[i, k], q_2^0[i], q_3^0[i])$.

2. Предположим, что $q^n[i, k]$ уже известно, тогда вычисляем значения $Aq^n[i, k]$:

$$\begin{aligned} A_1 q^n[i, k] &= q_1^n[i, k] - \frac{h}{4} (q_3^n[0] (q_1^n[0, k+i] + q_1^n[0, k-i]) + 2q_3^n[i] q_1^n[i, k]) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} q_3^n[j] (q_1^n[j, k+i-j] + q_1^n[j, k-i+j]) h, \\ A_2 q^n[i] &= q_2^n[i] + \frac{h}{4} (q_3^n[0] q_2^n[0] + q_3^n[i] q_2^n[i]) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{i-1} q_3^n[j] q_2^n[j] h, \\ A_3 q^n[i] &= q_3^n[i] + \left(0.5h (q_3^n[0] q_2^n[0] + q_3^n[i] q_2^n[i]) + \sum_{j=1}^{i-1} q_3^n[j] q_2^n[j] h \right) \\ &\quad \times \left(0.5h (q_3^n[0] q_1^n[0, 2i] + q_3^n[i] q_1^n[i, i]) + \sum_{j=1}^{i-1} q_3^n[j] q_1^n[j, 2i-j] h - 0.5\gamma f_3[i] \right) \\ &\quad + 2/\gamma \left(0.5h (q_3^n[0] q_1^n[0, 2i] + q_3^n[i] q_1^n[i, i]) + \sum_{j=1}^{i-1} q_3^n[j] q_1^n[j, 2i-j] h \right). \end{aligned}$$

3. Вычисляем значения функционалов

$$\begin{aligned} J_1(q^n) &= \|r_1\|_{L_2}^2 = \|A_1 q^n - f_1\|_{L_2}^2 = \sum_{i=0}^N \sum_{k=i}^{2N-i} (A_1 q^n[i, k] - f_1[i, k])^2 h^2, \\ J_2(q^n) &= \|r_2\|_{L_2}^2 = \|A_2 q^n - f_2\|_{L_2}^2 = \sum_{i=0}^N (A_2 q^n[i] - f_2[i])^2 h, \\ J_3(q^n) &= \|r_3\|_{L_2}^2 = \|A_3 q^n - f_3\|_{L_2}^2 = \sum_{i=0}^N (A_3 q^n[i] - f_3[i])^2 h, \end{aligned}$$

и если $J_1(q^n)$, $J_2(q^n)$, $J_3(q^n)$ достаточно малы, то останавливаем процесс, принимая q^n за приближенное решение обратной задачи.

4. Если функционалы $J_1(q^n)$, $J_2(q^n)$, $J_3(q^n)$ недостаточно малы, то вычисляем градиенты функционалов

$$\begin{aligned} J'_1(q^n)[i, k] &= 2[A'_1 q^n]^* r[i, k] = r_1[i, k] - 0.5q_3^n[i] \left(\sum_{j=i}^{(i+k)/2} r_1[j, k+i-j] h \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{N-(k-i)/2} r_1[j, k-i+j] h - 2(B_2 q[(k+i)/2] + 1/\gamma) r_3[(k+i)/2] \right), \\ J'_2(q^n)[i] &= 2[A'_2 q^n]^* r[i] = r_2[i] \\ &\quad + 0.5q_3^n[i] \sum_{j=i}^N \{ r_2[j] + 2r_3[j] (B_4 q[j] - 0.5\gamma f_3[j]) \} h, \\ J'_3(q^n)[i] &= 2[A'_3 q^n]^* r[i] = r_3[i] \\ &\quad - 0.5 \sum_{j=i}^N \left(\sum_{p=j}^{2N-j} (q_1^n[i, p+j-i] + q_1^n[i, p-j+i]) r_1[j, p] h \right. \\ &\quad \left. - q_2^n[i] r_2[j] - 2q_2^n[i] r_3[j] (B_4 q[j] - 0.5\gamma f_3[j]) \right. \\ &\quad \left. - 4q_1^n[i, 2j-i] (B_2 q[j] + 1/\gamma) r_3[j] \right) h, \end{aligned}$$

$$\text{где } B_2 q[i] = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^i q_3^n[j] q_2^n[j] h, \quad B_4 q[i] = \sum_{j=0}^i q_3^n[j] q_1^n[j, 2i-j] h.$$

5. Вычисляем следующее приближение q^{n+1}

$$q_1^{n+1} = q_1^n - \alpha_1 J'_1(q^n), \quad q_2^{n+1} = q_2^n - \alpha_2 J'_2(q^n), \quad q_3^{n+1} = q_3^n - \alpha_3 J'_3(q^n).$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in (0, \|A\|^{-2})$.

4 Численные результаты

Для проверки работы алгоритма по решению обратной задачи зададим точную функцию $s(x)$, затем решим прямую задачу методом обращения разностной схемы, возьмем след решения при $x = 0$, тем самым определим функцию $g(t)$ — дополнительную информацию. Теперь опишем вычислительные эксперименты для различного вида функций $s(x)$.

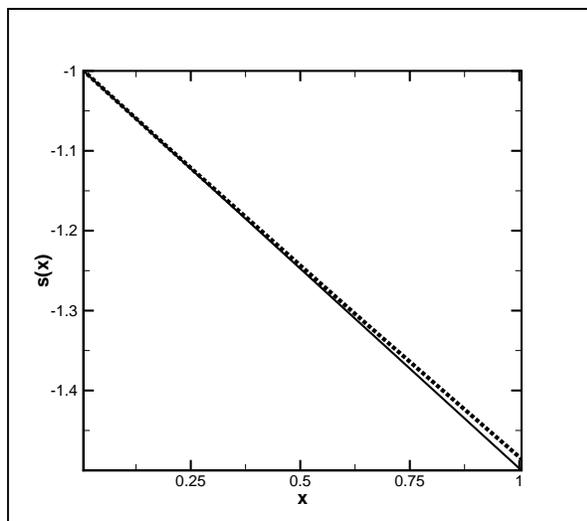


Рис. 1: Сплошной линией отмечен график точной функции, точками - восстановленная функция $s(x)$

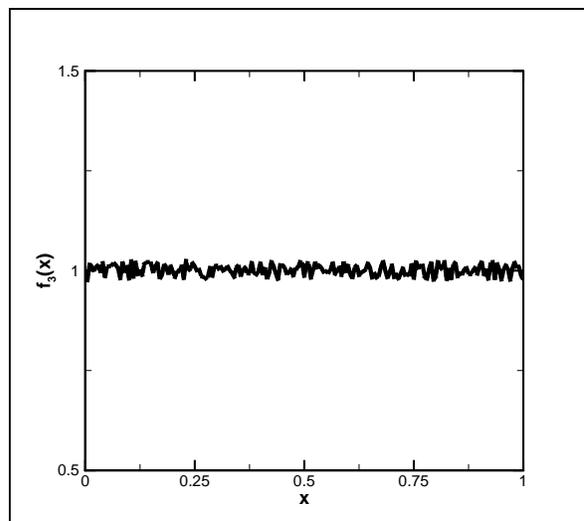


Рис. 2: График зашумленной функции $f_3(x)$

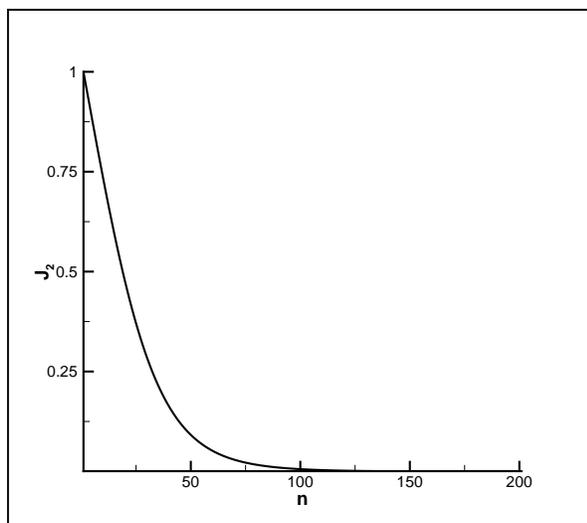


Рис. 3: График функционала $J_2(q^n)$

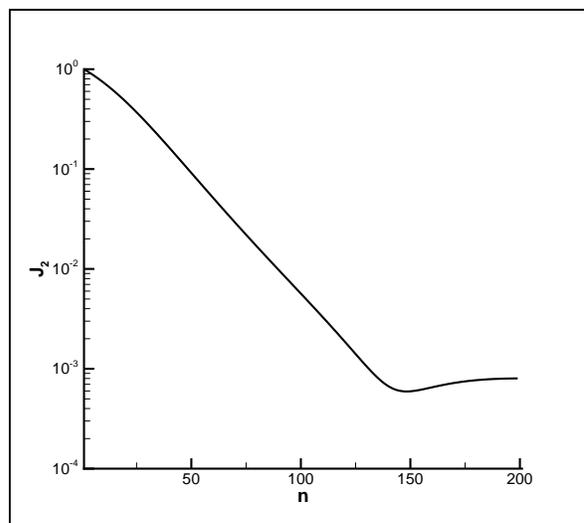


Рис. 4: График функционала $J_2(q^n)$ в логарифмическом масштабе

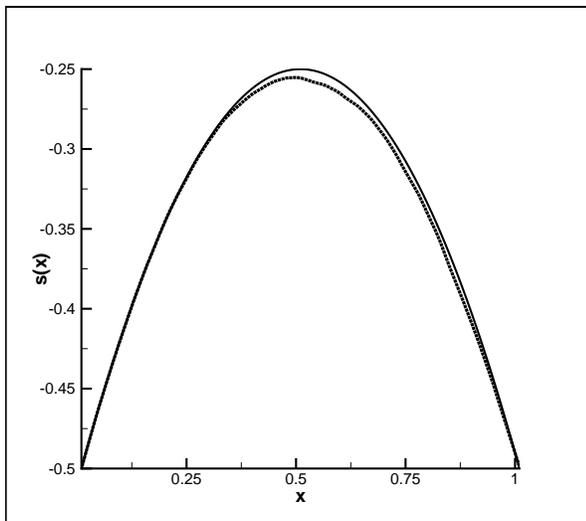


Рис. 5: Сплошной линией помечена точная функция $S(x)$, пунктиром - восстановленная

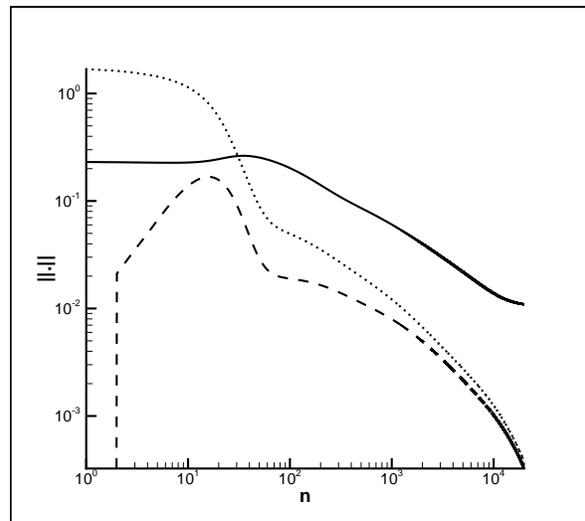


Рис. 6: $J_1(q^n)$ – сплошная линия, $J_2(q^n)$ – пунктирная линия, $J_3(q^n)$ – точечная линия

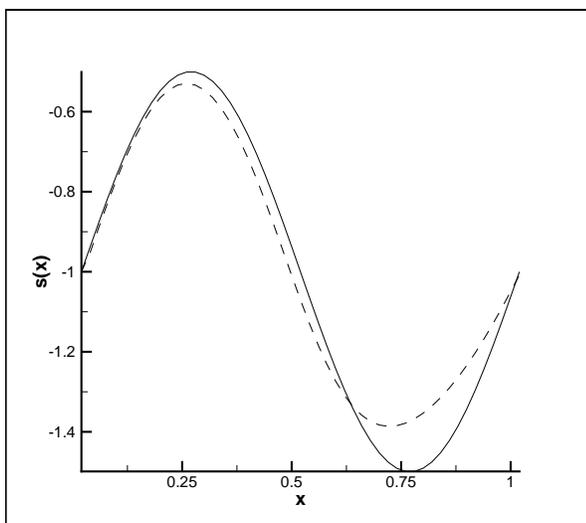


Рис. 7: Сплошной линией помечена точная функция $S(x)$, пунктиром - восстановленная

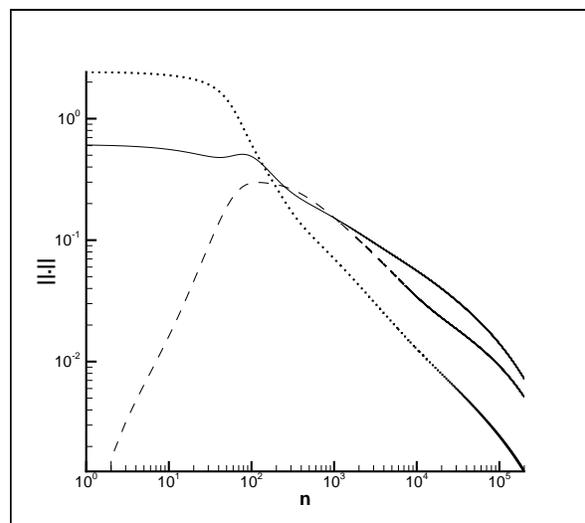


Рис. 8: $J_1(q^n)$ – сплошная линия, $J_2(q^n)$ – пунктирная линия, $J_3(q^n)$ – точечная линия

4.1 Линейная функция $s(x)$, параметр шума $\varepsilon \simeq 0.01$

Для следующих параметров $N = 200$, $l = 1$, $h = l/N = 0.005$ с функцией вида $s(x) = -0.5x - 1$ была решена прямая задача и получена функция $g(t)$. После добавления случайной ошибки функция $g(t)$ приняла вид (рис. 2) результаты вычислительного эксперимента представлены на рис. 1

4.2 $s(x)$ – парабола, параметр шума $\varepsilon \simeq 0.13$ На рис. 5, 6 показаны результаты численных расчетов для функции $s(x) = -(x - 1/2)^2 - 1/4$, с параметрами $N = 100$, $l = 1$, $h = l/N = 0.02$ и возмущением входных данных $\|\bar{g}_3 - g_3\| = 0.131659$.

4.3 Периодическая функция $s(x)$, параметр шума $\varepsilon \simeq 0.002$ На рис. 7, 8 показаны результаты численных расчетов для функции $s(x) = 1/2 \sin(2\pi x) - 1$, с параметрами $N = 50$, $l = 1$, $h = l/N = 0.02$ и небольшим возмущением входных данных $\|\bar{g}_3 - g_3\| = 0.002$.

Список литературы

- [1] Романов В. Г. Обратные задачи для дифференциальных уравнений. — Новосибирск: НГУ, 1973.
- [2] Кабанихин С. И., Бектемесов М. А., Нурсеитова А. Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы. — Алматы: Международный фонд обратных задач, 2006.